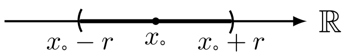
فصل اول
حد وپیوستگی

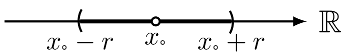
یکی از مفاهیم اصلی در بحث حسابان مفهوم مشتق است. از آنجا که برای بیان دقیق این مفهوم نیازمند مفهوم مقدماتی‌تر حد هستیم، در این فصل به بررسی حد یک تابع و یک حالت خاص از آن، یعنی پیوستگی، می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا همسایگی یک نقطه را تعریف می‌کنیم.

فرض کنیم $x_0 \in \mathbb{R}$. در این صورت همسایگی این نقطه به شعاع $r > 0$، که آن را با نماد $N_r(x_0)$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی که به صورت زیر تعریف می‌شود.

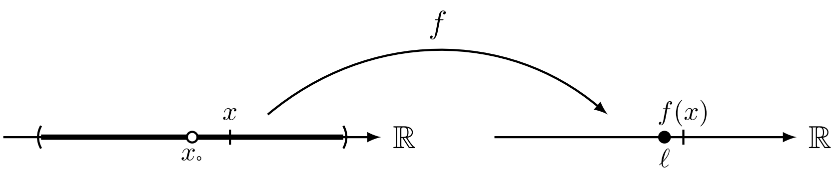
$$N_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R};\ x_0 - r < x < x_0 + r\} = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\}$$



که همان فاصله باز $(x_0 - r, x_0 + r)$ از اعداد حقیقی است. مجموعه $N_r(x_0) - \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - x_0| < r\}$ را همسایگی محذوف این نقطه می‌نامیم.



ابتدا بیانی شهودی از مفهوم حد تابع در یک نقطه را بیان می‌کنیم. فرض کنیم f تابعی حقیقی تعریف شده بر یک همسایگی محذوف نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ باشد (یعنی دامنه تعریف تابع f حاوی یک همسایگی محذوف x_0، چون $N_r(x_0) - \{x_0\}$ باشد).

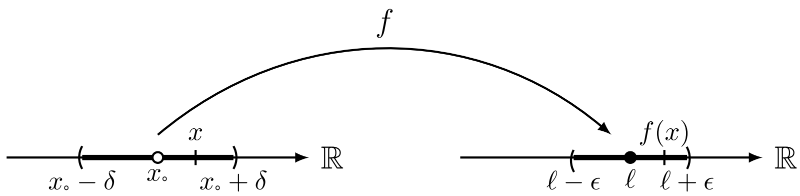


در این صورت f را در نقطه x_0 دارای حد ℓ نامیم و این خاصیت را با نماد $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ نشان می‌دهیم هر گاه بتوانیم مقادیر تابع، یعنی $f(x)$ را به اندازه دلخواه نزدیک ℓ کنیم به شرط آن که x به اندازه کافی به x_0 نزدیک شده باشد. درک فوق از مفهوم حد در اواخر قرن ۱۹ میلادی توسط ریاضیدانی به نام وایراشتراوس به صورت زیر به زبان ریاضی بیان گردید و از آن به بعد توسط سایر ریاضیدانان به عنوان تعریف ریاضی حد پذیرفته شد.

تعریف

فرض کنیم $f : D \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی محذوف نقطه x_0 تعریف شده باشد. در این صورت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ هرگاه برای هر همسایگی از نقطه ℓ، چون $N_\epsilon(\ell)$، یک همسایگی از نقطه x_0، چون $N_\delta(x_0)$، وجود داشته باشد به گونه‌ای که با انتخاب x از همسایگی محذوف $N_\delta(x_0) - \{x_0\}$ و در دامنه تعریف f، مقادیر متناظر تابع، یعنی $f(x)$، در همسایگی $N_\epsilon(\ell)$ قرار بگیرند. با استفاده از نمادهای ریاضی، تعریف فوق به صورت خلاصه زیر بیان می‌شود. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ هرگاه

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \quad \Big(0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon \Big)$$



باید توجه داشت که نقش اصلی تعریف ریاضی فوق اثبات قضایای ریاضی مربوط به حد است ولی ما در اینجا، برای آشنایی بیشتر با این تعریف، چند مثال ساده را با استفاده از آن بررسی می‌کنیم.

مثال. صحت هر یک از حدود زیر را با استفاده از تعریف ریاضی حد بررسی کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2} 3x - 7 = -1$.

باید نشان دهیم برای هر $\epsilon > 0$ (در نقش شعاع همسایگی نقطه $\ell = -1$) عدد $\delta > 0$ (در نقش شعاع همسایگی $a = 2$) وجود دارد به گونه‌ای که برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(3x - 7) - (-1)| < \epsilon$$

با فرض در اختیار داشتن $\epsilon > 0$، با شروع از نامساوی نهایی، یعنی $|(3x - 7) - (-1)| < \epsilon$، خواهیم داشت

$$|(3x - 7) - (-1)| = |3x - 6| = 3|x - 2| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - 2| < \frac{\epsilon}{3}$$

بنابر این کافی است $\delta > 0$ را با شرط $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$ انتخاب کنیم. در این صورت اگر $x \in \mathbb{R}$ با شرط $0 < |x - 2| < \delta$ انتخاب شود آنگاه $|(3x - 7) - (-1)| < \epsilon$.

ب) $\lim_{x\to -1} \frac{2x}{x^2+1} = -1$.
نشان می‌دهیم

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\mathbb{R}\quad \Big(0<|x-(-1)|<\delta\ \Rightarrow\ |\frac{2x}{x^2+1}-(-1)|<\epsilon\Big)$$

برای $\epsilon>0$، با توجه به اینکه

$$|\frac{2x}{x^2+1}+1| = |\frac{2x+x^2+1}{x^2+1}| = \frac{|x+1|^2}{1+x^2} \le |x+1|^2$$

برای داشتن $|\frac{2x}{x^2+1}+1|<\epsilon$ کافی است $\delta>0$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $|x+1|^2<\epsilon$. برای این منظور کافی است $\delta\le\sqrt{\epsilon}$ انتخاب شود.

ج) $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.
نشان می‌دهیم

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\mathbb{R}\quad \Big(0<|x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |\sin x-\sin x_0|<\epsilon\Big)$$

بعدا مشاهده می‌کنیم برای هر زاویه θ (بر حسب رادیان) $|\sin\theta|\le|\theta|$. اکنون برای $\epsilon>0$، با توجه به اینکه

$$\begin{aligned}|\sin x-\sin x_0| &= |2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})|\\ &\le 2|\sin(\frac{x-x_0}{2})|\le 2|\frac{x-x_0}{2}|=|x-x_0|\end{aligned}$$

کافی است $\delta>0$ با شرط $\delta\le\epsilon$ انتخاب شود. در این صورت به راحتی مشاهده می‌شود اگر $0<|x-x_0|<\delta$ آنگاه $|\sin x-\sin x_0|<\epsilon$.

د) $\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.
مشابه قسمت قبل بوده، به عنوان تمرین به عهده خواننده گذاشته می‌شود.

برخی از خواص اولیه حد در قضیه زیر بیان شده‌اند.

قضیه

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف $x_\circ$ تعریف شده باشد. در این صورت

الف) $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=\ell$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ}|f(x)-\ell|=\circ$.

ب) اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=\ell$ آنگاه $\lim\limits_{x\to x_\circ}|f(x)|=|\ell|$.

ج) $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=\circ$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ}|f(x)|=\circ$.

د) اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=\ell$ و $\ell\neq\circ$ آنگاه همسایگی محذوفی حول $x_\circ$ وجود دارد که در هر نقطه از آن مقدار f با ℓ هم‌علامت باشد.

ه) اگر مقدار f در یک همسایگی محذوف f نامنفی (نامثبت) باشد و $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=\ell$ آنگاه $\ell\geq\circ$ ($\ell\leq\circ$).

اثبات. در اینجا جهت نشان دادن نحوه استفاده از تعریف در اثبات خاصیت‌ها، فقط قسمت (د) و (ه) را اثبات می‌کنیم.

د) فرض کنیم $\ell>\circ$. در این صورت با انتخاب $\epsilon=\frac{\ell}{۲}$ (بدیهی است که مقادیر دیگری نیز می‌توانستیم برای ϵ انتخاب کنیم)، با استفاده از فرض وجود حد برابر ℓ، عدد $\delta>\circ$ وجود دارد که برای هر x در همسایگی محذوف $N_\delta(x_\circ)-\{x_\circ\}$،

$$|f(x)-\ell|<\epsilon=\frac{\ell}{۲}$$

و از آنجا

$$-\frac{\ell}{۲}<f(x)-\ell<\frac{\ell}{۲}$$

و بنابر این در این همسایگی محذوف، $\circ<\frac{\ell}{۲}=\ell-\frac{\ell}{۲}<f(x)$. به عبارت دیگر، مقادیر f در این همسایگی محذوف همه مثبت خواهند بود. در حالتی که $\ell<\circ$، با انتخاب $\epsilon=-\frac{\ell}{۲}$ نتیجه به طور مشابه به دست می‌آید.

ه) فرض کنیم همسایگی $N_r(x_\circ)$ وجود داشته باشد که برای هر $x\in N_r(x_\circ)-\{x_\circ\}$، $f(x)\geq\circ$. اگر $\ell<\circ$ آنگاه بنابر قسمت قبل، همسایگی محذوفی از $x_\circ$ وجود دارد که همه جا بر آن f با ℓ هم‌علامت و در نتیجه منفی باشد. یعنی عدد $r'>\circ$ وجود دارد که برای هر $x\in N_{r'}(x_\circ)-\{x_\circ\}$، $f(x)<\circ$. اکنون برای $x\in N_r(x_\circ)\cap N_{r'}(x_\circ)$ غیر $x_\circ$، از یک طرف طبق فرض $f(x)\geq\circ$ و از طرف دیگر، طبق نتیجه فوق، $f(x)<\circ$. تناقض حاصل نشان می‌دهد $\ell\geq\circ$. ■

با بررسی توابع مختلف، مشاهده می‌شود بسیاری از توابع بر اساس توابعی با ساختار ساده و با استفاده از اعمال جبری بر روی توابع (مانند جمع، ضرب و تقسیم) به دست می‌آیند. بر همین اساس، قضیه بعدی بررسی رفتار حدی توابع را به رفتار حدی اجزای تشکیل‌دهنده آن توابع منوط می‌کند.

قضیه.

فرض کنیم دو تابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه $x_\circ$ تعریف شده باشند و $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x) = \ell$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x) = m$. در این صورت هر یک از توابع $f \pm g$، λf ($\lambda x_\circ \in \mathbb{R}$ ثابت) و fg نیز در این نقطه حد داشته، داریم

$$\lim_{x\to x_\circ} (f(x) \pm g(x)) = \ell \pm m \quad , \quad \lim_{x\to x_\circ} (\lambda f(x)) = \lambda\ell \quad , \quad \lim_{x\to x_\circ} (f(x)g(x)) = \ell m$$

به علاوه، اگر $m \neq \circ$ آنگاه تابع $\dfrac{f}{g}$ در یک همسایگی محذوف $x_\circ$ تعریف شده در این نقطه حد برابر $\dfrac{\ell}{m}$ خواهد داشت.

اثبات قضیه با استفاده از تعریف حد به سادگی امکان‌پذیر است ولی جهت جلوگیری از طولانی شدن بحث از ارائه آن در اینجا صرف‌نظر می‌شود. قضیه بعدی که کاربردهای زیادی خواهد داشت تحت نام قضیه فشردگی نامیده می‌شود.

قضیه.

فرض کنیم سه تابع f، g و h در یک همسایگی محذوف نقطه $x_\circ$ تعریف شده، برای هر x در این همسایگی $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x) = \lim\limits_{x\to x_\circ} h(x) = \ell$ آنگاه تابع g نیز در این نقطه حد داشته، داریم $\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x) = \ell$.

اثبات. برای $\epsilon > \circ$ باید نشان دهید عدد $\delta > \circ$ وجود دارد به گونه‌ای که برای هر x در همسایگی محذوف $N_\delta(x_\circ) - \{x_\circ\}$، $|g(x) - \ell| < \epsilon$. بنابه فرض عدد $r > \circ$ وجود دارد که برای هر x در همسایگی محذوف $N_r(x_\circ) - \{x_\circ\}$، $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. از طرف دیگر طبق فرض وجود حد برابر ℓ برای توابع f و h،

$$\begin{array}{ll} \exists\delta_1 > \circ\ \forall x & \left(\circ < |x - x_\circ| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \text{یا} \quad \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon\right) \\ \exists\delta_2 > \circ\ \forall x & \left(\circ < |x - x_\circ| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |h(x) - \ell| < \epsilon \quad \text{یا} \quad \ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon\right) \end{array}$$

اکنون اگر عدد $\delta > \circ$ را با شرط $\delta \leq \min\{r, \delta_1, \delta_2\}$ اختیار کنیم آنگاه به سادگی مشاهده می‌شود برای x با شرط $\circ < |x - x_\circ| < \delta$ نامساوی $|g(x) - \ell| < \epsilon$ برقرار خواهد بود. ■

مثال. فرض کنید $x_\circ > \circ$. نشان دهید $\lim\limits_{x\to x_\circ} \sqrt{x} = \sqrt{x_\circ}$. در حالت کلی، اگر $n \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی بزرگتر از ۱ باشد نشان دهید $\lim\limits_{x\to x_\circ} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_\circ}$.

با توجه به اینکه

$$۰ \leq |\sqrt{x}-\sqrt{x_۰}| = |\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_۰})(\sqrt{x}+\sqrt{x_۰})}{\sqrt{x}+\sqrt{x_۰}}| = \frac{|x-x_۰|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_۰}} \leq \frac{۱}{\sqrt{x_۰}}|x-x_۰|$$

و صفر بودن حد عبارت سمت راست، وقتی $x \to x_۰$، با استفاده از قضیه فشردگی خواهیم داشت $\lim\limits_{x\to x_۰} |\sqrt{x}-\sqrt{x_۰}| = ۰$ که از آن نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

برای حالت کلی نیز اگر در اتحاد $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-۱}+ab^{n-۲}+\cdots+ab^{n-۲}+b^{n-۱})$ مقدار a را برابر $x^{\frac{۱}{n}}$ و b را برابر $x_۰^{\frac{۱}{n}}$ قرار دهیم آنگاه

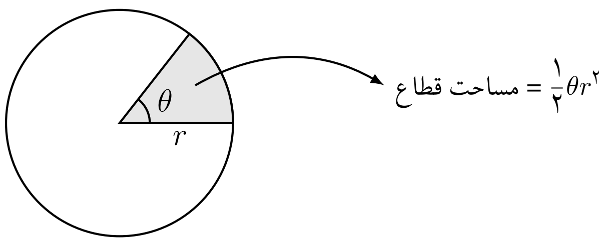
$$(x^{\frac{۱}{n}})^n - (x_۰^{\frac{۱}{n}})^n = (x^{\frac{۱}{n}} - x_۰^{\frac{۱}{n}})(x^{\frac{n-۱}{n}} + x^{\frac{n-۲}{n}}x_۰^{\frac{۱}{n}} + \cdots + x_۰^{\frac{n-۱}{n}})$$

و از آنجا

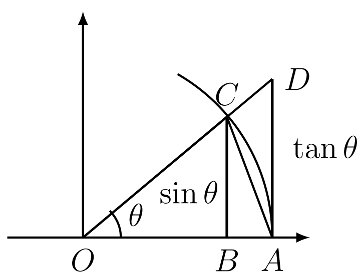
$$۰ \leq |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_۰}| = \frac{|x-x_۰|}{(x^{\frac{n-۱}{n}} + x^{\frac{n-۲}{n}}x_۰^{\frac{۱}{n}} + \cdots + x_۰^{\frac{n-۱}{n}})} \leq \frac{۱}{x_۰^{\frac{n-۱}{n}}}|x-x_۰|$$

اکنون نتیجه مانند قسمت قبل با استفاده از قضیه فشردگی به دست می‌آید.

تذکر. یادآوری می‌کنیم در یک دایره به شعاع r، مساحت قطاعی از دایره نظیر زاویه مرکزی θ (که بر حسب رادیان بیان شده باشد) برابر $\frac{۱}{۲}\theta r^۲$ خواهد بود.



اکنون فرض کنیم $۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$ زاویه مرکزی در دایره مثلثاتی (دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع برابر ۱) باشد. در این صورت مطابق شکل زیر، طول پاره‌خط BC برابر $\sin\theta$ و طول پاره‌خط AD برابر $\tan\theta$ خواهد بود.



همانطور که در این شکل نیز مشاهده می‌شود، مساحت مثلث OAC کمتر از مساحت قطاع OAC از دایره و آن نیز کمتر از مساحت مثلث OAD خواهد بود. با توجه به اینکه طول پاره‌خط OA برابر شعاع دایره و برابر ۱ است، خواهیم داشت

$$\text{مساحت مثلث } OAC = \frac{۱}{۲}\sin\theta < \text{مساحت قطاع } OAC = \frac{۱}{۲}\theta < \text{مساحت مثلث } OAD = \frac{۱}{۲}\tan\theta$$

به این ترتیب، در این حالت

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta$$

در حالتی که $-\frac{\pi}{۲} < \theta < ۰$، با توجه به اینکه $-\theta \in (۰, \frac{\pi}{۲})$، با استفاده از بحث فوق خواهیم داشت

$$-\sin\theta = \sin(-\theta) < -\theta < \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

پس برای زاویه θ با شرط $\frac{\pi}{۲} > |\theta| > ۰$ خواهیم داشت $|\sin\theta| < |\theta| < |\tan\theta|$. با استفاده از این نامساوی‌ها به سادگی دیده می‌شود

$$\forall\theta \in (-\frac{\pi}{۲}, ۰) \cup (۰, \frac{\pi}{۲}), \qquad \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < ۱$$

مثال. نشان می‌دهیم $\lim_{x\to۰}\frac{\sin x}{x} = ۱$.

با توجه به تذکر فوق، برای هر x در همسایگی محذوف $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) - \{۰\}$، $\cos x < \frac{\sin x}{x} < ۱$. اکنون با توجه به اینکه $\lim_{x\to۰}\cos x = \cos ۰ = ۱$ و $\lim_{x\to۰} ۱ = ۱$، بنابر قضیه فشردگی، $\lim_{x\to۰}\frac{\sin x}{x} = ۱$.

تمرین. فرض کنید f و g دو تابع تعریف شده بر یک همسایگی محذوف نقطه $x_۰ \in \mathbb{R}$ بوده، تابع g بر این همسایگی محذوف کراندار باشد (یعنی عدد $M > ۰$ وجود داشته باشد که برای هر x در این همسایگی محذوف، $|g(x)| \leq M$). اگر $\lim_{x\to x_۰} f(x) = ۰$ نشان دهید $\lim_{x\to x_۰} f(x)g(x) = ۰$.

همانگونه که مفهوم حد را تعریف کردیم، می‌توانیم مفاهیم حدهای چپ و راست یک تابع در یک نقطه را تعریف کنیم.

تعریف.

فرض کنیم f تابعی تعریف شده بر بازه‌ای چون $(x_۰, x_۰ + r)$، (که در آن فرض می‌کنیم $r > ۰$) باشد. در این صورت f را در نقطه $x_۰$ دارای حد راست برابر ℓ نامیم و آن را با نماد $\lim_{x\to x_۰^+} f(x) = \ell$ نشان می‌دهیم هرگاه

$$\forall\epsilon > ۰\ \exists\delta > ۰\ \forall x \in (x_۰, x_۰ + r) \qquad \Big(x_۰ < x < x_۰ + \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon\Big)$$

مفهوم حد چپ تابع در یک نقطه به نحو مشابه قابل تعریف است. به سادگی مشاهده می‌شود تابع f در نقطه $x_۰$ حدی برابر ℓ دارد اگر و تنها اگر حدهای چپ و راست تابع در این نقطه موجود بوده، هر دو برابر ℓ باشند. خاصیت‌های بیان شده برای حد، برای حدود یک‌طرفه نیز برقرار هستند.

مثال. هر یک از حدود یک‌طرفه زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^-} x[\frac{۱}{x}]$.

برای هر عدد حقیقی a، می‌دانیم $a-۱ < [a] \leq a$. اکنون اگر در این رابطه مقدار a را برابر $\frac{۱}{x}$ قرار دهیم آنگاه

$$\frac{۱}{x} - ۱ < [\frac{۱}{x}] \leq \frac{۱}{x}$$

نهایتا با ضرب طرفین نامساوی فوق در x و توجه به اینکه منفی بودن x باعث تغییر جهت نامساوی‌ها می‌شود، خواهیم داشت

$$۱ - x > x[\frac{۱}{x}] \geq ۱$$

با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to ۰^-} ۱ = \lim\limits_{x\to ۰^-} (۱-x) = ۱$، با استفاده از قضیه فشردگی (برای حدود یک‌طرفه) داریم $\lim\limits_{x\to ۰^-} x[\frac{۱}{x}] = ۱$.

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{\sin ۳x}{x}$.

قبلا مشاهده کردیم $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$. به این ترتیب با جایگزین کردن $۳x$ به جای x، خواهیم داشت $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin ۳x}{۳x} = ۱$. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۳x}{x} = ۳ \lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۳x}{۳x} = ۳ \times ۱ = ۳$$

چون تابع $\frac{\sin ۳x}{x}$ در $x = ۰$ حد دارد این تابع در این نقطه حد راست نیز داشته مقدار حد راست برابر حد آن است. پس

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{\sin ۳x}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin ۳x}{x} = ۳$$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \sqrt{x}\sin(\frac{۱}{x})$.

به سادگی با استفاده از تعریف حد مشاهده می‌شود $\lim\limits_{x\to ۰^+} \sqrt{x} = ۰$. با توجه به کراندار بودن تابع $\sin(\frac{۱}{x})$ بر بازه $(۰, \infty)$، داریم $\lim\limits_{x\to ۰^+} \sqrt{x}\sin(\frac{۱}{x}) = ۰$.

تعریف.

فرض کنیم f بر یک همسایگی از نقطه $x_\circ$ تعریف شده باشد (پس به طور خاص، تابع f در نقطه $x_\circ$ مقداری برابر $f(x_\circ)$ دارد). در این صورت f را در این نقطه پیوسته نامیم هرگاه $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$. گوئیم f در $x_\circ$ پیوسته راست است اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x) = f(x_\circ)$. به همین ترتیب، اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x) = f(x_\circ)$ آنگاه f را در این نقطه پیوسته چپ می‌نامیم.

روشن است که f در نقطه $x_\circ$ پیوسته است اگر و تنها اگر در این نقطه به طور همزمان پیوسته چپ و پیوسته راست باشد.

فرض کنیم $I \subset \mathbb{R}$ بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد. نقطه $x_\circ \in I$ را نقطه‌ای درونی برای این بازه نامیم هرگاه I یک همسایگی از این نقطه را در بر داشته باشد. اگر $x_\circ \in I$ نقطه‌ای درونی نباشد آنگاه یا نقطه ابتدایی یا نقطه انتهایی این بازه خواهد بود. تابع $f : I \to \mathbb{R}$ را بر بازه I پیوسته نامیم هرگاه این تابع در تمام نقاط درونی I پیوسته بوده، در نقاط ابتدا و انتهای بازه (به شرط وجود و تعلق به بازه) پیوستگی یک‌طرفه داشته باشد. (یعنی در نقطه ابتدای بازه (به شرط وجود) پیوسته راست و در نقطه انتهایی (به شرط وجود) پیوسته چپ باشد.)

مثال. قبلا مشاهده کردیم برای هر $x_\circ \in \mathbb{R}$، $\lim\limits_{x\to x_\circ} \sin x = \sin x_\circ$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ} \cos x = \cos x_\circ$. بنابر این توابع $\sin$ و $\cos$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

مثال. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. نشان دهید تابع $f : [\circ, \infty) \to \mathbb{R}$ با دستور $f(x) = \sqrt[n]{x}$ بر بازه $[\circ, \infty)$ پیوسته است.

برای $x_\circ \in [\circ, \infty)$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $x_\circ \in (\circ, \infty)$. در این حالت قبلا مشاهده کرده‌ایم $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x) = \lim\limits_{x\to x_\circ} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_\circ} = f(x_\circ)$. پس f بر بازه $(\circ, \infty)$ پیوسته است.

ب) $x_\circ = \circ$. نشان می‌دهیم $\lim\limits_{x\to \circ^+} f(x) = f(\circ)$ و در این صورت f در $x_\circ = \circ$ پیوسته راست خواهد بود. برای این منظور از تعریف استفاده می‌کنیم. نشان می‌دهیم برای هر $\epsilon > \circ$ عدد $\delta > \circ$ وجود دارد که برای هر $x \in [\circ, \infty)$،

$$\circ \leq x < \circ + \delta \ \Rightarrow\ |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{\circ}| = |\sqrt[n]{x}| < \epsilon$$

برای $\epsilon > \circ$، برای داشتن استلزام فوق کافی است $\delta > \circ$ را با شرط $\delta \leq \epsilon^n$ اختیار کنیم.

پس f در $x_\circ = \circ$ نیز پیوسته راست بوده، بنابر قسمت قبل، بر $[\circ, \infty)$ پیوسته خواهد بود.

برای بررسی پیوستگی برخی از توابع می‌توانیم از قضیه زیر استفاده کنیم.

قضیه

فرض کنیم توابع f و g در یک همسایگی از نقطه x_0 تعریف شده در این نقطه پیوسته باشند. در این صورت هر یک از توابع $f \pm g$، λf ($\lambda \in \mathbb{R}$ ثابت) و fg نیز در این نقطه پیوسته هستند. به علاوه اگر $g(x_0) \neq 0$ آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در این نقطه پیوسته است.

نتیجه

با توجه به پیوستگی تابع $f(x) = x$ و توابع ثابت بر $\mathbb{R}$، با استفاده مکرر از قضیه فوق مشاهده می‌شود هر تابع چندجمله‌ای چون $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته است.

مثال. نشان دهید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با دستور $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^3 + x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

برای $x_0 \in \mathbb{R}$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $x_0 \neq 0$. در این حالت یک همسایگی از x_0 وجود دارد حاوی 0 نبوده، در نتیجه بر این همسایگی f همه جا با ضابطه $f(x) = \dfrac{\sin x}{x(x^2+1)}$ داده شده است. در این حالت با توجه به پیوستگی توابع $\sin$ و تابع چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + x$ در x_0 و این که $p(x_0) = x_0(x_0^2 + 1) \neq 0$، بنابر قضیه قبل، تابع $f(x) = \dfrac{\sin x}{x(x^2+1)}$ در این نقطه پیوسته است.

ب) $x_0 = 0$. در این حالت نشان می‌دهیم $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{1+x^2} = 1 \times \frac{1}{1+0^2} = 1 = f(0)$$

پس f در این نقطه نیز پیوسته بوده، از آنجا بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

یکی دیگر از قضایایی که برای بررسی پیوستگی توابع کاربردهای زیادی دارد قضیه ترکیب توابع پیوسته است. البته قضیه زیر با بیانی دقیق‌تر به این موضوع می‌پردازد.

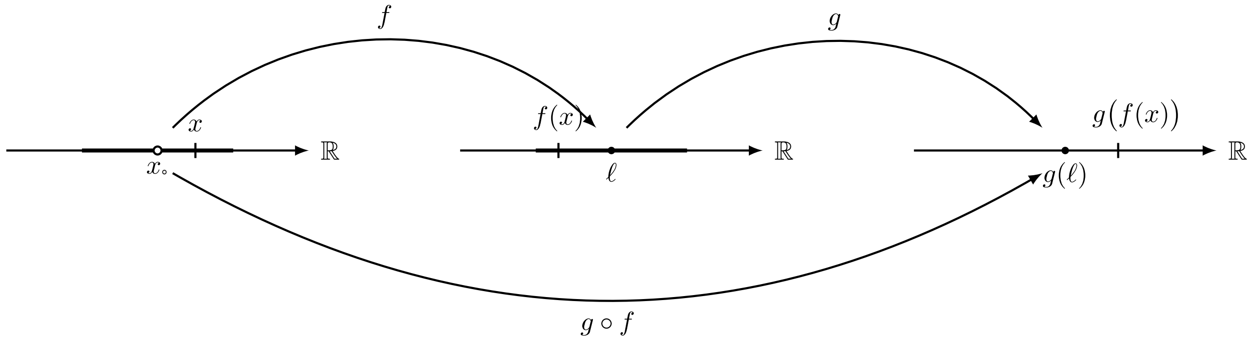
قضیه

فرض کنیم f در یک همسایگی محذوف نقطه $x_۰$ تعریف شده، $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=\ell$. اگر تابع g در یک همسایگی نقطه ℓ تعریف شده در این نقطه پیوسته باشد آنگاه تابع $g\circ f$ در نقطه $x_۰$ حد داشته، داریم

$$\lim_{x\to x_۰} g(f(x))=g(\ell)=g(\lim_{x\to x_۰} f(x))$$

به خصوص، اگر تابع f نیز در $x_۰$ پیوسته باشد آنگاه تابع $g\circ f$ نیز در این نقطه پیوسته خواهد بود.

اثبات قضیه به سادگی از تعریف و استفاده از مفروضات قضیه نتیجه می‌شود. شکل زیر ایده اثبات را بیان می‌کند.



به جای ارائه اثبات، با چند مثال به نحوه استفاده از این قضیه می‌پردازیم.

مثال. پیوستگی تابع f با دستور $f(x)=\begin{cases}\sin(\dfrac{x}{۱+x^۳}) & x\geq ۰\\ \dfrac{\sin x}{\sin^۲ x+۱} & x<۰\end{cases}$ را بر $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

فرض کنیم $x_۰\in\mathbb{R}$ نقطه‌ای دلخواه باشد. با توجه به ضابطه f، برای $x_۰$ سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $x_۰>۰$. در این صورت یک همسایگی از این نقطه در بازه $(۰,\infty)$ وجود دارد. در نتیجه همه جا بر این همسایگی f دارای ضابطه $f(x)=\sin(\dfrac{x}{۱+x^۳})$ خواهد بود. اگر قرار دهیم $p(x)=x$ و $q(x)=x^۳+۱$ آنگاه توابع p و q چندجمله‌ای و در نتیجه در $x_۰$ پیوسته هستند. به علاوه چون $x_۰>۰$، $q(x_۰)=x_۰^۳+۱\neq ۰$. در نتیجه تابع $\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{x}{۱+x^۳}$ در نقطه $x_۰$ پیوسته است. تابع $\sin$ نیز همه جا بر $\mathbb{R}$ و از جمله در نقطه $y_۰=\dfrac{x_۰}{x_۰^۳+۱}$ پیوسته بوده، بنابر قضیه اخیر، تابع $\sin(\dfrac{x}{x^۳+۱})$ در $x_۰$ پیوسته خواهد بود.

ب) $x_۰<۰$. مانند حالت قبل، f در یک همسایگی این نقطه ضابطه $f(x)=\dfrac{\sin x}{۱+\sin^۲ x}$ خواهد داشت. با در نظر گرفتن تابع $g(x)=\dfrac{x}{۱+x^۲}$ که همه جا بر $\mathbb{R}$ پیوسته است، و پیوستگی تابع $\sin$، بنابر قضیه فوق تابع $g(\sin x)=\dfrac{\sin x}{\sin^۲ x+۱}$ بر $\mathbb{R}$ و به خصوص در $x_۰$ پیوسته است.

ج) $x_\circ = \circ$. با توجه به نحوه تعریف تابع، لازم است پیوستگی چپ و راست تابع در این نقطه بررسی شود. همانطورکه در قسمت (ب) اشاره شد، تابع $\frac{\sin x}{\sin^{۲} x + ۱}$ همه جا بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. به خصوص این تابع در $x_\circ = \circ$ نیز پیوسته است. پس

$$\lim_{x\to\circ^-} f(x) = \lim_{x\to\circ^-} \frac{\sin x}{\sin^{۲} x + ۱} = \lim_{x\to\circ} \frac{\sin x}{\sin^{۲} x + ۱} = \frac{\sin \circ}{\sin^{۲} \circ + ۱} = \circ$$

با استدلالی مشابه آنچه در (الف) و (ب) مشاهده کردیم، می‌توان نشان داد تابع $\sin(\frac{x}{x^{۳}+۱})$ همه جا بر بازه $(-۱,\infty)$ پیوسته است. به خصوص این تابع در نقطه $x_\circ = \circ$ نیز پیوسته است. در نتیجه

$$\lim_{x\to\circ^+} f(x) = \lim_{x\to\circ^+} \sin(\frac{x}{x^{۳}+۱}) = \lim_{x\to\circ} \sin(\frac{x}{x^{۳}+۱}) = \sin(\frac{\circ}{\circ^{۳}+۱}) = \circ$$

به این ترتیب $\lim_{x\to\circ^-} f(x) = \lim_{x\to\circ^+} f(x) = f(\circ) = \circ$. پس f در $x_\circ = \circ$ نیز پیوسته بوده، از آنجا f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

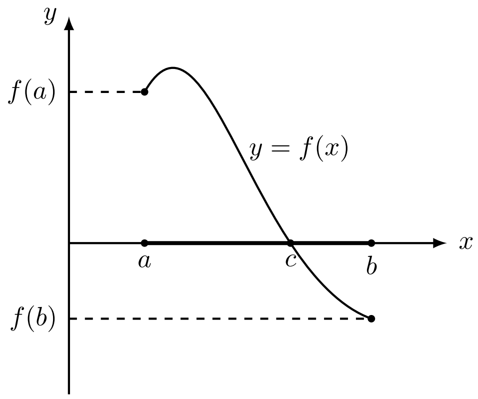
خواص توابع پیوسته

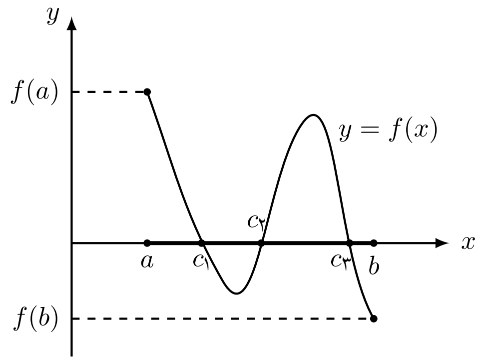
در این بخش یکی از خاصیت‌های مهم توابع پیوسته، تحت نام قضیه مقادیر میانی، را بررسی می‌کنیم. ابتدا حالت خاص این قضیه که به نام قضیه بولتسانو شناخته می‌شود را بیان می‌کنیم.

قضیه بولتسانو

فرض کنیم $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ بر این بازه تابعی پیوسته باشد. اگر دو عدد $f(a)$ و $f(b)$ علامت‌های مختلف داشته باشند آنگاه $c \in [a,b]$ وجود دارد که $f(c) = \circ$.

در شکل‌های زیر حکم قضیه بولتسانو مبنی بر وجود صفر یا صفرهای تابع پیوسته را مشاهده می‌کنیم. اثبات این قضیه مبتنی بر خاصیتی از مجموعه اعداد حقیقی تحت نام اصل کمال است که از ارائه آن در اینجا صرف‌نظر می‌شود.





یکی از کاربردهای قضیه بولتسانو اثبات وجود ریشه برای معادلات است که در زیر یک نمونه آن را مشاهده می‌کنیم.

مثال. نشان دهید معادله $x^۵ + x^۴ - x + ۲ = ۰$ دارای حداقل یک ریشه حقیقی است.
اگر تابع f با دستور $f(x) = x^۵ + x^۴ - x + ۲$ تعریف شده باشد آنگاه f یک چندجمله‌ای و در نتیجه بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. با توجه به اینکه

$$f(۰) = ۲ > ۰ \qquad \text{و} \qquad f(-۲) = -۳۲ + ۱۶ + ۲ + ۲ < ۰$$

مقدار f در دو نقطه $a = -۲$ و $b = ۰$ علامت‌های مختلف دارد. با توجه به پیوستگی تابع f بر بازه $[-۲, ۰]$، بنابر قضیه بولتسانو، عدد $c \in [-۲, ۰]$ وجود دارد که $f(c) = ۰$، یا $c^۵ + c^۴ - c + ۲ = ۰$. پس معادله فوق حداقل یک ریشه را خواهد داشت.

قضیه بواتسانو کاربردهای دیگری نیز می‌تواند داشته باشد. به عنوان یکی دیگر از کاربردهای آن خاصیت زیر را که به نام نقطه ثابت نامیده می‌شود مشاهده می‌کنیم.

مثال. فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر این بازه باشد. اگر برای هر $x \in [a, b]$، $a \leq f(x) \leq b$ نشان دهید $c \in [a, b]$ وجود دارد که $f(c) = c$.
فرض کنیم $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابع با ضابطه $g(x) = f(x) - x$ باشد. با توجه به پیوستگی f، تابع g نیز بر $[a, b]$ پیوسته است. در عین حال با توجه به اینکه $a \leq f(a)\ ,\ f(b) \leq b$،

$$g(b) = f(b) - b \leq ۰ \qquad \text{و} \qquad g(a) = f(a) - a \geq ۰$$

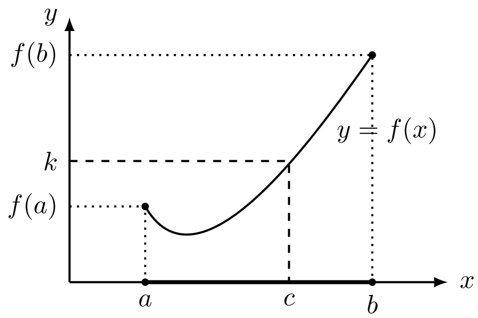
پس $g(a)$ و $g(b)$ نیز علامت‌های متفاوت دارند. در نتیجه بنابر قضیه بولتسانو، $c \in [a, b]$ وجود دارد که $g(c) = ۰$. در نتیجه $f(c) = c$.

اکنون آماده‌ایم تا قضیه مقادیر میانی را بیان کنیم.

قضیه مقادیر میانی

فرض کنیم $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر بازه $[a, b]$ بوده، $k \in \mathbb{R}$ عددی حقیقی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد. در این صورت $c \in [a, b]$ وجود دارد که $f(c) = k$.

اثبات. اگر $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ با دستور $g(x) = f(x) - k$ تعریف شده باشد آنگاه g بر $[a, b]$ پیوسته بوده، بنا به فرض قضیه، دو عدد $g(a)$ و $g(b)$ علامت‌های مختلف دارند. بنابر قضیه بولتسانو، عدد $c \in [a, b]$ وجود دارد که $g(c) = ۰$ یا $f(c) - k = ۰$. در نتیجه $f(c) = k$. ■



مثال. فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر این بازه باشد. نشان دهید $c \in [a, b]$ وجود دارد که $f(c) = \dfrac{f(a) + f(b)}{۲}$.

بدون از دست دادن کلیت، فرض کنیم $f(a) \leq f(b)$. اگر قرار دهیم $k := \dfrac{f(a) + f(b)}{۲}$ آنگاه $f(a) \leq k \leq f(b)$. یعنی k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ است. بنابر پیوستگی f بر بازه $[a, b]$، از قضیه مقادیر میانی نتیجه می‌شود $c \in [a, b]$ وجود دارد که $f(c) = k = \dfrac{f(a) + f(b)}{۲}$.

مثال. فرض کنید $a > ۰$. نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$، عدد یکتای $b > ۰$ وجود دارد که $b^n = a$. (این عدد یکتا را با نماد $a^{\frac{۱}{n}}$ یا $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم.)

فرض کنیم f تابع با ضابطه $f(x) = x^n$ است. روشن است که f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. در عین حال

$$f(۰) = ۰ \qquad \text{و} \qquad f(a + ۱) = (a + ۱)^n \geq ۱ + na > a$$

به این ترتیب a عددی بین $f(۰)$ و $f(۱+a)$ بوده، با توجه به پیوستگی f بر بازه $[۰, ۱+a]$، بنابر قضیه مقادیر میانی $b \in [۰, ۱+a]$ وجود دارد که $f(b) = a$ یا $b^n = a$. با توجه به اینکه $a \neq ۰$، داریم $b > ۰$. اثبات یکتا بودن b با خاصیت فوق را به عنوان

تمرین به عهده خواننده می‌گذاریم.

تمرین‌های فصل اول.

۱. با استفاده از تعریف ریاضی حد، صحت هر یک از حدود زیر را نشان دهید

الف) $\lim\limits_{x\to -۳}(۱-۴x)=۱۳$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x^۲+x-۴}{x+۲}=-۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲-۴x+۵)=۱$ د) $\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲-۱)=۸$

۲. نشان دهید برای هر $a>۰$، $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$. (راهنمایی: توجه کنید که $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\dfrac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$.)

۳. مقدار هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{\sqrt{۱+۳x}-۱}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt[۳]{۱+cx}-۱}{x}$ (c ثابت) ج) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt[۳]{x}-۱}{\sqrt{x}-۱}$

۴. فرض کنید f در یک همسایگی $x=۰$ تعریف شده باشد. اگر $\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=a$ و $\lim_{x\to ۰^-}f(x)=b$، هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x^۳-x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x^۳-x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x^۲-x^۴)$ د) $\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x^۲-x^۴)$

۵. فرض کنید $g(x)=\dfrac{x^۲+x-۶}{|x-۲|}$. مطلوب است محاسبه $\lim\limits_{x\to ۲^-}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۲^+}g(x)$. آیا مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}g(x)$ وجود دارد؟ توضیح دهید.

۶. با مثالی نشان دهید امکان دارد عبارت $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ وجود داشته باشد ولی هیچیک از حدود $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ وجود نداشته باشند.

۷. کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟ در هر مورد دلیل خود را توضیح دهید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۴}(\dfrac{۲x}{x-۴}-\dfrac{۸}{x-۴})=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۲x}{x-۴}-\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۸}{x-۴}$.

ب) $\lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x^2-4} = \frac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2-4)}$.

ج) اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ آنگاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ وجود ندارد.

د) اگر $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ و $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشند آنگاه $\lim_{x\to a} g(x)$ نیز وجود دارد.

ه) اگر برای هر x، $f(x) > 1$ و $\lim_{x\to 0} f(x)$ وجود داشته باشد آنگاه $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

و) اگر تابع $|f|$ در نقطه a حد داشته باشد آنگاه تابع f نیز در این نقطه حد دارد.

۸. فرض کنید $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-8}{x-1} = 10$. مقدار $\lim_{x\to 1} f(x)$ را تعیین کنید.

۹. حد تابع $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ را در $x = 0$ و بینهایت بررسی کنید.

۱۰. اگر $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5$ آنگاه مقدار هر یک از حدود $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ را تعیین کنید.

۱۱. با استفاده از قضیه فشردگی نشان دهید $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+x^2}\sin(\frac{\pi}{x}) = 0$.

۱۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در شرط $|f(x)-f(y)| \le C|x-y|$، که در آن $C>0$ عددی ثابت است، صدق نماید. نشان دهید f در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۳. در مورد هر یک از توابع زیر، بزرگترین زیرمجموعه از اعداد حقیقی را تعیین کنید که تابع داده شده بر آن پیوسته باشد.

الف) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} & x \ne -1, 1 \\ 1 & x = -1 \text{ یا } 1 \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ 1-x^2 & x \ge 0 \end{cases}$

۱۴. دامنه تعریف هر یک از توابع زیر را تعیین کرده، نشان دهید هر یک از این توابع بر دامنه تعریف خود پیوسته است.

الف) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x^3-2}$

ب) $f(x) = \frac{\sin x}{x+1}$

ج) $g(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{4-x^2}}$

د) $g(x) = \sin\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$

ه) $h(x) = \sqrt[4]{x} + x^3\cos(x^2-1)$

۱۵. نشان دهید تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۶. فرض کنید $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in(0,\infty)$ در رابطه $f(xy)=f(x)+f(y)$ صدق نماید.
الف) نشان دهید $f(1)=0$.
ب) اگر f در $x=1$ پیوسته باشد نشان دهید f بر $(0,\infty)$ پیوسته است.

۱۷. نشان دهید هر یک از معادلات زیر دارای حداقل یک ریشه است.

الف) $x^{10}-10x^{2}+5=0$ ب) $\cos x=x^{2}$

ج) $\sqrt{x-5}=\dfrac{1}{x+3}$

۱۸. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[-1,1]$ باشد و $f(-1)=2$ و $f(1)=4$. نشان دهید c با شرط $|c|<1$ وجود دارد که $f(c)=\pi$.

۱۹. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[0,2]$ باشد و $f(0)<0$ و $f(2)>1$. نشان دهید معادله $f(x)=\sin x$ دارای حداقل یک ریشه است.

۲۰. فرض کنید $f:[01]\to[0,1]$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید $c\in[0,1]$ وجود دارد که $f(c)=c$.

۲۱. فرض کنید $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دو تابع پیوسته بر بازه $[a,b]$ باشند. اگر $f(a)>g(a)$ و $f(b)<g(b)$ نشان دهید نمودار دو تابع حداقل در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

تمرین‌های تکمیلی

۱. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با دستور $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ به نام تابع دیریکله نامیده می‌شود.
الف) با استفاده از تعریف پیوستگی، نشان دهید این تابع در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.
ب) با استفاده از تابع فوق، تابعی مثال بزنید که فقط در یک نقطه پیوسته باشد. (ادعای خود را ثابت کنید.)

۲. فرض کنید تابع $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ بر بازه (a,b) تابعی پیوسته باشد. اگر $c\in(a,b)$ وجود داشته باشد که $f(c)>0$ نشان دهید f در یک همسایگی از این نقطه تابعی مثبت است.

۳. فرض کنید f در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده در این نقطه حدی برابر ℓ داشته باشد. اگر برای هر x در این همسایگی محذوف $f(x)\geq 0$ نشان دهید $\ell\geq 0$.

۴. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشد. اگر α و β دو عدد مثبت با شرط $\alpha+\beta=۱$ باشند نشان دهید $c\in[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=\alpha f(a)+\beta f(b)$.

۵. فرض کنیم f تابعی تعریف شده بر بازه‌ای چون $[a,\infty)$ باشد. f را در بی‌نهایت دارای حد ℓ نامیم، و این خاصیت را با $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell$ نشان می‌دهیم هرگاه به هر اندازه دلخواه بتوانیم مقادیر f را به ℓ نزدیک کنیم به شرط آنکه مقادیر x به اندازه کافی بزرگ شده باشند. به زبان ریاضی، گوییم $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell$ هرگاه برای هر عدد $\epsilon>۰$ عدد $N>۰$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که

$$\forall x\in[a,\infty) \qquad x>N \;\Rightarrow\; |f(x)-\ell|<\epsilon$$

به همین ترتیب اگر f بر بازه‌ای چون $(-\infty,a]$ تعریف شده باشد آنگاه گوییم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ هرگاه

$$\forall\epsilon>۰\;\; \exists N>۰\;\; \forall x\in(-\infty,a] \qquad x<-N \;\Rightarrow\; |f(x)-\ell|<\epsilon$$

به کمک تعریف بالا، صحت هر یک از حدود زیر را نشان دهید.

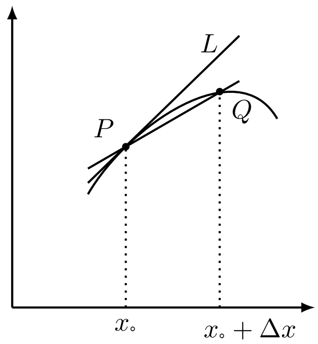
الف) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^۲-x}{x^۲+۱}=۱$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^۲-x})=\dfrac{۱}{۲}$

فصل دوم
مشتق

در این بخش مفهوم مشتق توابع یک متغیره را مطرح کرده، روش تعیین مشتق توابع، یا اصطلاحا مشتق‌گیری، را مشاهده می‌کنیم. اما قبل از شروع این بحث، ابتدا دو بحث تاریخی که در ارائه تعریف مشتق نقش مهمی داشته‌اند را بیان می‌کنیم.

بحث اول مفهوم هندسی شیب خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه است. فرض کنیم f تابعی پیوسته تعریف شده بر یک همسایگی نقطه $x_\circ \in \mathbb{R}$ و $C \subset \mathbb{R}^۲$ نمودار این تابع باشد. فرض کنیم $P \in C$ نقطه نظیر $x_\circ$ و $Q \in C$ نقطه نظیر $x_\circ + \Delta x$ باشد. به این ترتیب P نقطه‌ای به مختصات $(x_\circ, f(x_\circ))$ و Q نیز نقطه‌ای به مختصات $(x_\circ + \Delta x, f(x_\circ + \Delta x))$ خواهد بود. همچنین فرض کنیم L خط مماس بر منحنی C در نقطه P وجود داشته باشد. (توجه کنید در اینجا ما مفهوم خط مماس را تعریف نکرده، فقط به درک شهودی این خط بسنده می‌کنیم.)



با در نظر گرفتن خط گذرنده از دو نقطه P و Q، شیب این خط برابر $\dfrac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x}$ خواهد بود. اگر مقدار Δx کوچک و کوچکتر انتخاب شود آنگاه نقطه Q بر روی منحنی به نقطه P نزدیک و نزدیکتر شده، خطوط قاطع گذرنده از P و Q به خط مماس بر C در نقطه P میل می‌کنند. به این ترتیب طبیعی است که شیب خط مماس را برابر عبارت $\lim\limits_{\Delta x \to \circ} \dfrac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x}$ فرض کنیم.

بحث دوم مربوط به فیزیک مقدماتی شده، مفهوم سرعت لحظه‌ای یک متحرک را بیان می‌کند. فرض کنیم متحرکی بر روی یک مسیر مستقیم و با قانون $d = d(t)$ در حال حرکت باشد. منظور از قانون حرکت فوق این است که در لحظه t فاصله متحرک تا مبدا حرکت برابر $d(t)$ است. به این ترتیب در بازه زمانی $[t_\circ, t_\circ + \Delta t]$ (با فرض اینکه $\Delta t > \circ$) متحرک مسافت $d(t_\circ + \Delta t) - d(t_\circ)$ را طی کرده است. عبارت $\dfrac{d(t_\circ + \Delta t) - d(t_\circ)}{\Delta t}$ در فیزیک تحت نام سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $[t_\circ, t_\circ + \Delta t]$ نامیده می‌شود. روشن است که هرچه Δt کوچکتر انتخاب شود نسبت به دست آمده اطلاعات دقیق‌تری در مورد رفتار متحرک در بازه زمانی فوق به دست می‌دهد. بر این مبنا، اگر $\lim\limits_{\Delta t \to \circ} \dfrac{d(t_\circ + \Delta t) - d(t_\circ)}{\Delta t}$ وجود داشته باشد آن را سرعت لحظه‌ای متحرک در زمان $t = t_\circ$ می‌نامیم.

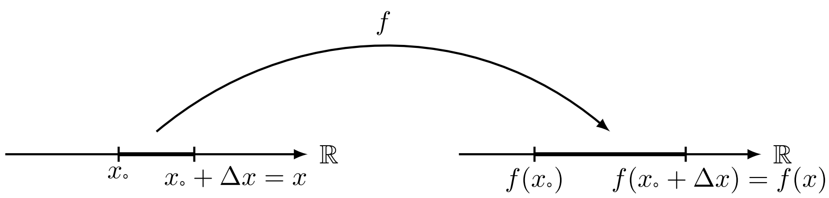
ساختارهایی مانند آنچه در دو مثال فوق ظاهرشده است در بسیاری از زمینه‌های دیگر نیز با تعابیر خاص آن زمینه مشاهده می‌شود. بنابر این بهتر است که این ساختار را به صورتی ریاضی و مستقل از تعبیر خاص آن تعریف کنیم.

تعریف

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی از نقطه x_0 تعریف شده باشد. در این صورت با انتخاب نمو Δx با این خاصیت که $x_0+\Delta x$ در دامنه تعریف f قرار بگیرد، عبارت $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ به نام تغییرات نسبی f بر بازه $[x_0, x_0+\Delta x]$، در حالتی که $\Delta x > 0$، یا بر بازه $[x_0+\Delta x, x_0]$، در حالتی که $\Delta x < 0$، نامیده می‌شود. اگر $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ وجود داشته باشد آنگاه آن را سرعت تغییرات تابع f در نقطه x_0، یا اصطلاحا مشتق f در a، نامیده و با نماد $f'(x_0)$ یا $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ نشان می‌دهیم و در این صورت f را در x_0 مشتق‌پذیر می‌نامیم.

برای نمو Δx، اگر قرار دهیم $x := x_0+\Delta x$ آنگاه $\Delta x = x - x_0$ و روشن است که $\Delta x \to 0$ اگر و تنها اگر $x \to x_0$. بنابر این در صورت مشتق‌پذیری f در x_0، خواهیم داشت

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



مثال. مشتق‌پذیری هر یک از توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

الف) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x = 0\end{cases}$ در نقطه $x_0 = 0$.

برای $x \neq 0$،

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sin(\frac{1}{x})-0}{x} = x\sin(\frac{1}{x})$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$$

پس این تابع در نقطه $x_\circ = \circ$ مشتق‌پذیر بوده، $f'(\circ) = \circ$.

ب) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$ در نقطه $x_\circ = 1$.

داریم

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x} - \circ}{x - 1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)}}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \infty\end{aligned}$$

در نتیجه این تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

تا اینجا مفهوم مشتق‌پذیری در یک نقطه را تعریف کردیم. با استفاده از این تعریف، اکنون می‌توانیم مشتق‌پذیری بر یک بازه را تعریف کنیم. فرض کنیم $I \subseteq \mathbb{R}$ بازه‌ای باز از اعداد حقیقی باشد. تابع $f : I \to \mathbb{R}$ را بر این بازه مشتق‌پذیر نامیم هرگاه f در هر نقطه از I مشتق‌پذیر باشد. در این حالت تابع جدیدی با دستور $x \mapsto f'(x)$ بر I قابل تعریف خواهد بود. این تابع را تابع مشتق f نامیده آن را با نماد f' نشان می‌دهیم.

مثال. مشتق‌پذیری هر یک از توابع زیر را بر $\mathbb{R}$ بررسی کرده، ضابطه تابع مشتق را در هر مورد تعیین کنید.

الف) $f(x) = x^n$، $(n \in \mathbb{N})$.

فرض کنیم $x_\circ \in \mathbb{R}$ نقطه‌ای دلخواه باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} &= \lim_{x\to x_\circ} \frac{x^n - x_\circ^n}{x - x_\circ} \\ &= \lim_{x\to x_\circ} \frac{(x - x_\circ)(x^{n-1} + x^{n-2}x_\circ + \cdots + x_\circ^{n-1})}{x - x_\circ} = nx_\circ^{n-1}\end{aligned}$$

در نتیجه f در نقطه دلخواه $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $f'(x_\circ) = nx_\circ^{n-1}$. به این ترتیب f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر بوده، تابع مشتق دارای ضابطه $f'(x) = nx^{n-1}$ خواهد بود.

ب) $f(x) = \sin x$.

مانند مثال قبل، برای نقطه‌ای چون $x_\circ \in \mathbb{R}$، ابتدا توجه می‌کنیم

$$\sin x - \sin x_\circ = 2\sin(\frac{x - x_\circ}{2})\cos(\frac{x + x_\circ}{2})$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} &= \lim_{x\to x_\circ}\frac{\sin x-\sin x_\circ}{x-x_\circ}\\ &= \lim_{x\to x_\circ}\frac{۲\sin(\frac{x-x_\circ}{۲})\cos(\frac{x+x_\circ}{۲})}{x-x_\circ}\\ &= \lim_{x\to x_\circ}\frac{\sin(\frac{x-x_\circ}{۲})}{\frac{x-x_\circ}{۲}}\cos(\frac{x+x_\circ}{۲})=\cos x_\circ\end{aligned}$$

در نتیجه تابع فوق در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $f'(x_\circ)=\cos x_\circ$. با توجه به دلخواه بودن $x_\circ\in\mathbb{R}$، تابع $\sin$ بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و تابع مشتق تابعی با دستور $f'(x)=\cos x$ است.

ج) $f(x)=|x|$.

می‌توانیم این تابع را به صورت $f(x)=\begin{cases} x & x\geq\circ\\ -x & x<\circ\end{cases}$ بیان کنیم. اکنون برای $x_\circ\in\mathbb{R}$، با توجه به نحوه تعریف تابع f، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

۱- اگر $x_\circ>\circ$ آنگاه برای x به اندازه کافی نزدیک این نقطه، x نیز مثبت بوده در نتیجه $f(x)=x$. به این ترتیب

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=\lim_{x\to x_\circ}\frac{x-x_\circ}{x-x_\circ}=۱$$

پس f در این نقطه مشتق‌پذیر است و $f'(x_\circ)=۱$.

۲- به همین ترتیب اگر $x_\circ<\circ$ آنگاه برای مقادیر x نزدیک $x_\circ$، x نیز منفی بوده در نتیجه $f(x)=-x$ و از آنجا $f'(x_\circ)=-۱$.

۳- در حالتی که $x_\circ=\circ$،

$$\lim_{x\to\circ}\frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ}\frac{|x|}{x}$$

و می‌دانیم که این حد وجود ندارد. بنابر تابع فوق در $x_\circ=\circ$ مشتق‌پذیر نیست.

بر اساس سه بررسی فوق، تابع f با دستور $f(x)=|x|$ بر $(-\infty,\circ)\cup(\circ,\infty)$ مشتق‌پذیر بوده، تابع مشتق تابعی با ضابطه زیر است.

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{\circ\},\qquad f'(x)=\begin{cases} ۱ & x>\circ\\ -۱ & x<\circ\end{cases}=\frac{|x|}{x}$$

به عنوان تمرین نشان دهید تابع f با دستور $f(x)=\cos x$ بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)=-\sin x$.

یکی از خاصیت‌های مهم توابع مشتق‌پذیر پیوستگی این توابع است که در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه.

اگر تابع f در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در این نقطه پیوسته است.

اثبات. طبق فرض f در یک همسایگی از نقطه $x_\circ$ تعریف شده است. برای $x \neq x_\circ$ در این همسایگی،

$$f(x) = f(x_\circ) + \big(f(x) - f(x_\circ)\big) = f(x_\circ) + \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}(x - x_\circ)$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = \lim_{x\to x_\circ} \Big(f(x_\circ) + \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}(x - x_\circ)\Big) = f(x_\circ) + \lim_{x\to x_\circ} \Big(\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}(x - x_\circ)\Big) = f(x_\circ) + f'(x_\circ)\times \circ = f(x_\circ)$$

پس f در $x_\circ$ پیوسته است. ■

به این ترتیب، اگر f در نقطه‌ای ناپیوسته باشد در این نقطه مشتق‌پذیر نیز نخواهد بود. به طور مثال، به سادگی مشاهده می‌شود تابع $f(x) = x[x]$ در $x = ۱$ ناپیوسته است. در نتیجه این تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. باید توجه داشت پیوستگی شرط لازم برای مشتق‌پذیری است ولی این شرط کافی نیست. به این معنی که صرف پیوستگی تابع در یک نقطه باعث مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه نیست. به طور مثال، قبلا مشاهده کردیم تابع $f(x) = |x|$ در نقطه $x = \circ$ پیوسته است ولی f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

برخی از توابع با استفاده از اعمال جبری بر روی توابع با ساختار ساده‌تر به دست می‌آیند. در این موارد، مشتق تابع داده شده را می‌توانیم با استفاده از مشتق توابع ساده‌تری که در ساختار آن شرکت کرده‌اند به دست آوریم.

قضیه

فرض کنیم توابع f و g در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت هر یک از توابع $f \pm g$، λf ($\lambda \in \mathbb{R}$ ثابت) و fg نیز در $x_\circ$ مشتق‌پذیر بوده، داریم

$$(f \pm g)'(x_\circ) = f'(x_\circ) \pm g'(x_\circ) \quad , \quad (\lambda f)'(x_\circ) = \lambda f'(x_\circ)$$

$$(fg)'(x_\circ) = f'(x_\circ)g(x_\circ) + f(x_\circ)g'(x_\circ)$$

به علاوه اگر $g(x_\circ) \neq \circ$ آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x_\circ)g(x_\circ) - f(x_\circ)g'(x_\circ)}{(g(x_\circ))^۲}$.

اثبات. اثبات بسیار ساده با استفاده از تعریف مشتق و استفاده از فرض مشتق‌پذیری توابع f و g به دست می‌آید. در اینجا فقط مشتق‌پذیری تابع $\frac{f}{g}$ را

بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_\circ)}{g(x_\circ)}=\frac{(f(x)-f(x_\circ))g(x_\circ)-f(x_\circ)(g(x)-g(x_\circ))}{g(x)g(x_\circ)}$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_\circ}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_\circ)}{g(x_\circ)}}{x-x_\circ} &= \lim_{x\to x_\circ}\frac{1}{x-x_\circ}\Big(\frac{(f(x)-f(x_\circ))g(x_\circ)-f(x_\circ)(g(x)-g(x_\circ))}{g(x)g(x_\circ)}\Big)\\ &= \lim_{x\to x_\circ}\frac{1}{g(x)g(x_\circ)}\Big(\frac{(f(x)-f(x_\circ))g(x_\circ)-f(x_\circ)(g(x)-g(x_\circ))}{x-x_\circ}\Big)\\ &= \lim_{x\to x_\circ}\frac{1}{g(x)g(x_\circ)}\Big(\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}g(x_\circ)-f(x_\circ)\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}\Big)\\ &= \frac{1}{(g(x_\circ))^2}\big(f'(x_\circ)g(x_\circ)-f(x_\circ)g'(x_\circ)\big)=\frac{f'(x_\circ)g(x_\circ)-f(x_\circ)g'(x_\circ)}{(g(x_\circ))^2}\end{aligned}$$

■

نتیجه

با توجه به مشتق‌پذیری هر یک از توابع $f_1(x)=x$، $f_2(x)=x^2$، …، $f_n(x)=x^n$ در هر نقطه از $\mathbb{R}$ و مشتق‌پذیری تابع ثابت، با استفاده مکرر از قضیه فوق، هر تابع چندجمله‌ای مانند $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_\circ$ در هر نقطه از $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$p'(x)=na_nx^{n-1}+\cdots+2a_2x+a_1$$

مثال. مشتق‌پذیری تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x^3+1} & x\geq\circ\\ x\cos x & x<\circ\end{cases}$ را بر $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

فرض کنیم $x_\circ\in\mathbb{R}$ نقطه‌ای دلخواه باشد. با توجه به نحوه تعریف f، سه حالت زیر را برای $x_\circ$ در نظر می‌گیریم.

الف) $x_\circ>\circ$. در این صورت یک همسایگی از $x_\circ$ چون $(x_\circ-r,x_\circ+r)$ وجود دارد که تمام نقاط آن در بازه $(\circ,\infty)$ قرار گیرد و به این ترتیب تابع f همه جا بر این همسایگی توسط ضابطه $f(x)=\frac{x}{x^3+1}$ داده می‌شود. با توجه به مشتق‌پذیری چندجمله‌ای‌های $p(x)=x$ و $q(x)=x^3+1$ و این که، با توجه به فرض $x_\circ>\circ$، $q(x_\circ)=x_\circ^3+1\neq\circ$، بنابر قضیه قبل، f در این نقطه مشتق‌پذیر است و

$$f'(x_\circ)=\frac{p'(x_\circ)q(x_\circ)-p(x_\circ)q'(x_\circ)}{q^2(x_\circ)}=\frac{x_\circ^3+1-x_\circ(3x_\circ^2)}{(x_\circ^3+1)^2}=\frac{1-2x_\circ^3}{(1+x_\circ^3)^2}$$

ب) $x_\circ < \circ$. به همین ترتیب در یک همسایگی از نقطه $x_\circ$، f توسط ضابطه $f(x) = x\cos x$ داده شده که حاصل‌ضرب دو تابع مشتق‌پذیر است. پس مجددا بنابر قضیه قبل، f در این نقطه مشتق‌پذیر است و

$$f'(x_\circ) = \cos x_\circ + x_\circ(-\sin x_\circ) = \cos x_\circ - x_\circ \sin x_\circ$$

ج) $x_\circ = \circ$. در این حالت لازم است وجود حد $\lim_{x\to\circ}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\circ}\frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}$ را بررسی کنیم. با توجه اینکه ضابطه f سمت راست و سمت چپ نقطه $x_\circ = \circ$ متفاوت است، حد راست و حد چپ عبارت فوق را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\circ^-}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\circ^-}\frac{x\cos x}{x} = \lim_{x\to\circ^-}\cos x = ۱\\ \lim_{x\to\circ^+}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\circ^+}\frac{\frac{x}{۱+x^۳}}{x} = \lim_{x\to\circ^+}\frac{۱}{۱+x^۳} = ۱\end{aligned}$$

در نتیجه $\lim_{x\to\circ}\frac{f(x)}{x} = ۱$. پس f در $x_\circ = \circ$ نیز مشتق‌پذیر است. با توجه به محاسبات فوق، ضابطه تابع مشتق به صورت زیر است.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{۱-۲x^۳}{(۱+x^۳)^۲} & x > \circ \\ ۱ & x = \circ \\ \cos x - x\sin x & x < \circ \end{cases}$$

همانطور که می‌دانیم یکی از روش‌های متداول برای ساختن توابع جدید استفاده از ترکیب توابع است. قضیه زیر بررسی مشتق تابع مرکب را بر اساس مشتق توابع شرکت کننده در ترکیب امکان‌پذیر می‌سازد.

قضیه

فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر در $x_\circ$ و g تابعی مشتق‌پذیر در $y_\circ = f(x_\circ)$ باشد. در این صورت تابع $g\circ f$ در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $(g\circ f)'(x_\circ) = g'(f(x_\circ))f'(x_\circ) = g'(y_\circ)f'(x_\circ)$.

اثبات این قضیه نیازمند کمی دقت ریاضی بوده، جهت جلوگیری از طولانی شدن بحث، از ارائه آن در اینجا صرف‌نظر می‌شود.

مثال. الف) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. نشان دهید تابع f با دستور $f(x) = x^{\frac{۱}{n}}$ بر $(\circ,\infty)$ مشتق‌پذیر بوده، ضابطه تابع مشتق را تعیین کنید.

ب) اگر $r \in \mathbb{Q}$ یک عدد گویای مثبت باشد، نشان دهید تابع $f(x) = x^r$ بر $(\circ,\infty)$ مشتق‌پذیر است و تابع مشتق را به دست آورید.

الف) توجه می‌کنیم که برای مشتق‌پذیری تابع $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ قضایایی که تاکنون بیان کرده‌ایم قابل استفاده نیستند. بنابر این مشتق‌پذیری این تابع را با استفاده از تعریف بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $x_0 \in (0, \infty)$ نقطه‌ای دلخواه باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{x - x_0}$$

برای محاسبه حد فوق اتحاد زیر را مود توجه قرار می‌دهیم. برای هر دو عدد حقیقی α و β، و برای هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$،

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$$

اکنون در این اتحاد اگر به جای α عبارت $x^{\frac{1}{n}}$ و به جای β، $x_0^{\frac{1}{n}}$ را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$(x^{\frac{1}{n}})^n - (x_0^{\frac{1}{n}})^n = (x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}}x_0^{\frac{1}{n}} + \cdots + x^{\frac{1}{n}}x_0^{\frac{n-2}{n}} + x_0^{\frac{n-1}{n}})$$

و از آنجا

$$\frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{x - x_0} = \frac{1}{(x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}}x_0^{\frac{1}{n}} + \cdots + x^{\frac{1}{n}}x_0^{\frac{n-2}{n}} + x_0^{\frac{n-1}{n}})}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{(x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}}x_0^{\frac{1}{n}} + \cdots + x^{\frac{1}{n}}x_0^{\frac{n-2}{n}} + x_0^{\frac{n-1}{n}})} \\ &= \frac{1}{x_0^{\frac{n-1}{n}} + x_0^{\frac{n-1}{n}} + \cdots + x_0^{\frac{n-1}{n}})} = \frac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1}\end{aligned}$$

ب) برای عد گویای مثبت $r \in \mathbb{Q}$ اعداد طبیعی $m, n \in \mathbb{N}$ وجود دارند که $r = \frac{m}{n}$. اکنون اگر قرار دهیم $h(x) = x^{\frac{1}{n}}$ و $p(x) = x^m$ آنگاه

$$f(x) = x^r = x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = p(h(x))$$

با توجه به قسمت قبل، تابع $h(x)$ مشتق‌پذیر بوده، چندجمله‌ای $p(x)$ نیز مشتق‌پذیر است. بنابر قضیه مشتق تابع مرکب، تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر است و

$$\begin{aligned}f'(x) &= p'(h(x))h'(x) \\ &= m(h(x))^{m-1}\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\end{aligned}$$

$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m-1}{n}}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}} = rx^{r-1}$$

به عبارت دیگر در این حالت نیز مشتق تابع $f(x) = x^r$ از همان قانون مشتق تابع چندجمله‌ای $q(x) = x^n$ پیروی می‌کند. در حالتی که $r \in \mathbb{Q}$ یک عدد گویای منفی باشد با قرار دادن $s = -r$ و توجه به اینکه $x^r = \frac{1}{x^s}$، از بحث فوق استفاده کرده، نشان دهید مشتق تابع $f(x) = x^r$ مجددا از همان قانون فوق پیروی می‌کند.

مثال. مشتق هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin(\frac{x}{1+x^2})$ ب) $f(x) = \tan(x^2)$ ج) $f(x) = \sqrt[3]{x^4+x}$

الف) با توجه به قضیه قبل،

$$f'(x) = \sin'(\frac{x}{1+x^2})(\frac{x}{1+x^2})' = \cos(\frac{x}{1+x^2})(\frac{(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2}) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\cos(\frac{x}{1+x^2})$$

ب) مانند قسمت (الف)،

$$f'(x) = \tan'(x^2)(x^2)' = 2x(1+\tan^2(x^2))$$

ج) اگر قرار دهیم $g(x) = \sqrt[3]{x}$ و $p(x) = x^4 + x$ آنگاه $f(x) = g(p(x))$. در نتیجه

$$f'(x) = g'(p(x))p'(x) = \frac{1}{3}(p(x))^{-\frac{2}{3}}p'(x) = \frac{1}{3}(x^4+x)^{-\frac{2}{3}}(4x^3+1)$$

تمرین. مشتق‌پذیری تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^3+x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ را بر $\mathbb{R}$ بررسی کرده، ضابطه تابع مشتق را تعیین کنید.

مشتقات مراتب بالاتر. فرض کنیم f بر بازه $I \subseteq \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد. قبلا اشاره کردیم در این حالت تابع جدیدی به نام تابع مشتق با نماد f' بر I تعریف شده است. اگر تابع اخیر در نقطه‌ای چون $x_0 \in I$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه $(f')'(x_0)$ را مشتق دوم f در x_0 نامیده آن را با نماد $f''(x_0)$ نشان می‌دهیم. مشتقات مراتب بالاتر به نحو مشابه تعریف می‌شوند.

مثال. مشتق مرتبه دوم تابع f با دستور $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ را تعیین کنید.

با استفاده از فرمول مشتق تابع مرکب

$$f'(x) = \cos(\sqrt{x})(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{۲\sqrt{x}}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} f''(x) = (f'(x))' &= \frac{-\sin(\sqrt{x})\frac{۱}{۲\sqrt{x}}۲\sqrt{x} - \cos(\sqrt{x})\frac{۲}{۲\sqrt{x}}}{(۲\sqrt{x})^۲} \\ &= \frac{-\sin(\sqrt{x}) - \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}{۴x} \end{aligned}$$

تمرین‌های فصل دوم.

۱. در مورد هر یک از توابع زیر بزرگترین دامنه‌ای را تعیین کنید که تابع داده شده بر آن مشتق‌پذیر باشد. سپس ضابطه تابع مشتق را بر این بازه تعیین کنید.

الف) $f(x) = \frac{x^۲ - ۴x + ۶}{x}$

ب) $f(x) = x^{\frac{۵}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}$

ج) $f(x) = (x + x^{-۱})^۲$

د) $f(x) = (\sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}})^۲$

ه) $g(x) = x|x|$

و) $h(x) = \sqrt[۳]{۱ + \sin x}$

ز) $f(x) = \sin(\sqrt{۱ + x})$

ح) $f(x) = \sqrt{\frac{x + ۱}{x - ۱}}$

ط) $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$

ی) $f(t) = \sqrt[۳]{t}(t^۲ + t^{-۱})$

۲. مشتق‌پذیری هر یک از توابع زیر را بر $\mathbb{R}$ بررسی کرده، ضابطه تابع مشتق را به دست آورید.

الف) $f(x) = \begin{cases} \sin^۲ x & x > ۰ \\ x^۳ & x \leq ۰ \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{۱ + x^۲} & x \geq ۰ \\ x^۳ - x & x < ۰ \end{cases}$

ج) $f(x) = \begin{cases} \frac{۱ - \cos x}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$

۳. نشان دهید تابع f با دستور $f(x) = \begin{cases} x^۲ \sin(\frac{۱}{x}) & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر است. ضابطه تابع مشتق را به

دست آورید. نشان دهید تابع مشتق در $x=\circ$ پیوسته نیست.

۴. فرض کنید f تابعی با دستور $f(x)=\begin{cases} x^{۲}\sin\left(\frac{x+۱}{x}\right) & x>\circ \\ x^{۳} & x\leq \circ \end{cases}$ باشد.نشان دهید تابع f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و ضابطه تابع مشتق را به دست آورید. آیا مشتق دوم f در $x=\circ$ وجود دارد؟

۵. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در رابطه $f(x+y)=f(x)f(y)$ صدق نماید.

الف) نشان دهید $f(\circ)=۱$.

ب) اگر f در $x=\circ$ مشتق‌پذیر باشد نشان دهید f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

۶. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر در $x=a$ باشد. نشان دهید

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

۷. مشتق اول و دوم تابع g با ضابطه $g(x)=\sqrt{\sin x}+\sin(\sqrt{x})$ را به دست آورید.

۸. فرض کنید $f(۱)=f'(۱)=۱$، $g(۱)=۲$ و $g'(۱)=\circ$. مشتق هر یک از توابع زیر را در نقطه $x=۱$ به دست آورید.

الف) $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ب) $h(x)=\dfrac{g(x)}{۱+f(x)}$ ج) $h(t)=\dfrac{t}{f(t)+g(t)}$

۹. نشان دهید مشتق تابعی زوج، تابعی فرد و مشتق تابعی فرد، تابعی زوج است.

۱۰. تابع f با دستور $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\leq ۲ \\ ax+b & x>۲ \end{cases}$ مفروض است. مقادیر a و b را به گونه‌ای تعیین کنید که f همه جا مشتق‌پذیر باشد. ضابطه تابع مشتق را تعیین کنید.

۱۱. هر یک از حدود زیر را با معرفی توابعی مناسب و استفاده از مشتق این توابع، محاسبه کنید.

الف) $\displaystyle\lim_{x\to\circ}\frac{\sin(۳x)}{x}$ ب) $\displaystyle\lim_{x\to\circ}\frac{\tan ۴x}{\sin ۵x}$

ج) $\displaystyle\lim_{x\to ۱}\frac{\sin(x-۱)}{x^{۲}+x-۲}$ د) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\tan x}{\sin x-\cos x}$

ه) $\displaystyle\lim_{x\to\circ}\frac{\sin(\sin x)}{x}$ و) $\displaystyle\lim_{x\to ۲}\frac{\tan(x^{۲}-۴)}{x-۲}$

۱۲. اگر $f(\circ)=۱$، $f'(\circ)=۲$ و $F(x)=f(xf(x))$، مطلوب است تعیین مقدار $F'(\circ)$.

۱۳. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ و مشتق‌پذیر در $x=0$ با $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ باشد. اگر تابع g با دستور $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(\sin x)}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ تعریف شده باشد نشان دهید g بر $\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است.

۱۴. کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟ در هر مورد نظر خود را توضیح دهید.

الف) اگر $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ آنگاه $f'(0)=0$.

ب) $\dfrac{d}{dx}|x^2+x|=|2x+1|$.

ج) $\dfrac{d}{dx}(\tan^2 x)=\dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$.

د) اگر f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در یک همسایگی این نقطه پیوسته است.

۱۵. فرض کنید f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند و $f(g(x))=x$. اگر $f'(x)=1+(f(x))^2$ نشان دهید $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

۱۶. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر در نقطه $a\in(0,\infty)$ باشد. مقدار حد زیر را بر حسب $f'(a)$ به دست آورید.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

۱۷. اگر سهمی $y=x^2+C$ بر خط $y=x$ مماس باشد مقدار ثابت C را پیدا کنید.

۱۸. نقاطی از خم به معادله $y=\sin(x-\sin x)$ را تعیین کنید که در آن نقاط خم بر محور x مماس باشد.

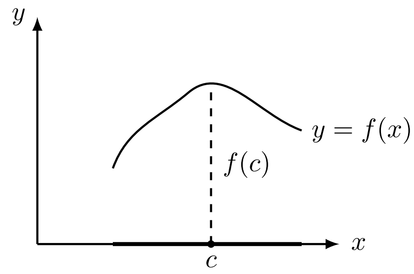
فصل سوم
کاربردهای مشتق

در این فصل خاصیت‌هایی از یک تابع را که با بررسی تابع مشتق آن قابل حصول هستند مطالعه می‌کنیم. برای این منظور بحث خود را با یادآوری مفاهیم ماکزیمم و مینیمم یک تابع آغاز می‌کنیم.

تعریف.

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}$. تابع $f : D \to \mathbb{R}$ را در نقطه $c \in D$ دارای ماکزیمم مطلق (مینیمم مطلق) بر D نامیم هرگاه برای هر $x \in D$، $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$). مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق f بر D را (در صورت وجود) اکسترمم‌های مطلق f بر D می‌نامیم.

از نظر هندسی، اگر $c \in D$ نقطه نظیر ماکزیمم مطلق تابع نامنفی f بر I باشد آنگاه نقطه $(c, f(c))$ از نمودار تابع f بیشترین ارتفاع را نسبت به محور x در بین سایر نقاط نمودار خواهد داشت.



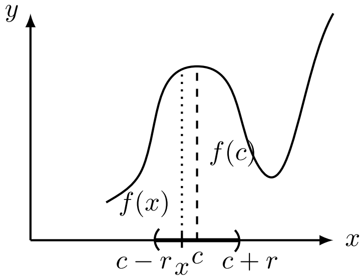
برای مینیمم مطلق تابع بر یک مجموعه نیز می‌توان تعبیر مشابهی ارائه داد. ماکزیمم و مینیمم مطلق یک تابع بر یک مجموعه را در صورت وجود اکسترمم‌های مطلق تابع بر آن مجموعه می‌نامیم. یکی از مفاهیم مرتبط با این مفهوم اکسترمم‌های نسبی یا موضعی است.

تعریف.

نقطه $c \in D$ را یک نقطه درونی برای مجموعه $D \subset \mathbb{R}$ نامیم هرگاه این مجموعه یک همسایگی از نقطه c را در بر داشته باشد. تابع $f : D \to \mathbb{R}$ را در نقطه درونی $c \in D$ دارای یک اکسترمم نسبی یا موضعی نامیم هرگاه عدد $r > 0$ وجود داشته باشد که $(c - r, c + r) \subset D$ و با محدود کردن دامنه تعریف تابع به این همسایگی، تابع $f : (c - r, c + r) \to \mathbb{R}$ در نقطه $c \in (c - r, c + r)$ دارای یک اکسترمم مطلق باشد، و در این صورت $f(c)$ را یک اکسترمم نسبی f بر D می‌نامیم.

پس به طور مثال، اگر تابع $f : D \to \mathbb{R}$ در نقطه درونی $c \in D$ یک ماکزیمم نسبی داشته باشد آنگاه عدد $r > 0$ وجود دارد که اولا $(c-r, c+r) \subset D$ و در ثانی

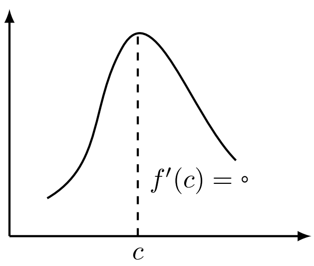
$$\forall x \in (c-r, c+r) \qquad f(x) \leq f(c)$$

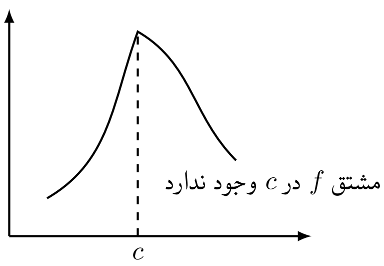


طبق تعریف بالا روشن است که اگر تابع $f : D \to \mathbb{R}$ در نقطه درونی $c \in D$ یک اکسترمم مطلق داشته باشد آنگاه این نقطه نظیر یک اکسترمم نسبی نیز برای f خواهد بود. باید توجه داشت که بر خلاف مقادیر اکسترمم مطلق یک تابع که در صورت وجود منحصر به فرد هستند، یک تابع بر یک مجموعه می‌تواند اکسترمم‌های نسبی متعددی از یک نوع (ماکزیمم یا مینیمم) داشته باشد. یکی از رفتارهای مهم یک تابع در نقاط نظیر اکسترمم‌های نسبی در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه.

اگر $f : D \to \mathbb{R}$ در نقطه درونی $c \in D$ یک اکسترمم نسبی داشته باشد آنگاه یا f در c مشتق‌پذیر نیست یا در صورت مشتق‌پذیری، $f'(c) = 0$.





اثبات. فرض کنیم f در c یک ماکزیمم موضعی داشته باشد. همچنین فرض کنیم f در این نقطه مشتق‌پذیر است. پس همسایگی چون $(c-r, c+r) \subset D$ وجود دارد که برای $x \in (c-r, c+r)$، $f(x) \leq f(c)$. به این ترتیب، برای هر $x \in (c-r, c)$، $f(x) - f(c) \leq 0$ و از آنجا، با توجه به اینکه $x - c < 0$، خواهیم داشت $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. با توجه به فرض مشتق‌پذیری f در c، عبارت $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ وجود دارد. در نتیجه

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

به همین ترتیب، برای هر $x \in (c, c+r)$، $f(x)-f(c) \leq ۰$ و از آنجا $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq ۰$. در نتیجه

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq ۰$$

به این ترتیب $f'(c) = ۰$. ■

با توجه به قضیه اخیر، نقاط درونی از دامنه تعریف یک تابع که در آنها تابع مشتق‌پذیر نیست یا در صورت مشتق‌پذیری، مشتق آن برابر صفر است از اهمیت برخوردار است. این نقاط را نقاط بحرانی تابع می‌نامیم. به طور دقیق‌تر، فرض کنیم $c \in D$ نقطه‌ای درونی باشد. این نقطه را یک نقطه بحرانی برای تابع $f : D \to \mathbb{R}$ نامیم هرگاه f یا در c مشتق‌پذیر نباشد یا در صورت مشتق‌پذیری در این نقطه، $f'(c) = ۰$. بنابر قضیه فوق، هر نقطه نظیر یک اکسترمم نسبی f بر D یک نقطه بحرانی این تابع است. ولی عکس این خاصیت لزوما برقرار نیست. به طور مثال نقطه $x = ۰$ یک نقطه بحرانی برای تابع با ضابطه $f(x) = x^۳$ است ولی در این نقطه f اکسترممی ندارد.

قبل از ادامه بحث، یکی از خاصیت‌های مهم تابعی پیوسته بر بازه‌ای بسته و کراندار را بیان می‌کنیم. این خاصیت تحت عنوان قضیه اکسترمم‌های مطلق یا قضیه مقادیر نهایی نامیده می‌شود.

قضیه اکسترمم‌های مطلق.

اگر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر بازه $[a,b]$ باشد آنگاه f اکسترمم‌های مطلق خود را بر این بازه اتخاذ می‌کند. یعنی نقاطی چون $p, q \in [a,b]$ وجود دارد که برای هر $x \in [a,b]$، $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$.

اثبات قضیه فوق نیازمند خاصیتی از بازه‌های بسته و کراندار است که از سطح این درس فراتر بوده، لذا از ارائه آن در اینجا صرف‌نظر می‌شود.

بنابر بحث قبل، اگر هر یک از نقاط p یا q درون بازه $[a,b]$ باشند آنگاه یک نقطه بحرانی برای f خواهند بود. بر این مبنا دستورالعمل زیر برای تعیین اکسترمم‌های مطلق تابعی پیوسته بر بازه‌ای بسته و کراندار را خواهیم داشت.

دستور العمل یافتن اکسترمم‌های مطلق یک تابع پیوسته بر بازه‌ای بسته و کراندار

فرض کنیم $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر بازه بسته و کراندار $[a,b]$ باشد. برای تعیین اکسترمم‌های مطلق f بر $[a,b]$، ابتدا نقاط بحرانی f بر بازه (a,b) را به دست می‌آوریم. سپس با مقایسه مقادیر f در این نقاط و نقاط a و b، بیشترین مقدار و کمترین مقدار f را تعیین می‌کنیم.

مثال. اکسترمم‌های مطلق تابع f با ضابطه $f(x) = x^۳ + ۶x^۲ - ۱۵x - ۱$ را بر بازه $[۰, ۳]$ تعیین کنید.

تابع f با ضابطه $f(x) = x^۳ + ۶x^۲ - ۱۵x - ۱$ یک چندجمله‌ای بوده بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. پس این تابع بر بازه بسته و کراندار

$[\circ,\text{۳}]$ نیز پیوسته بوده، بنابر قضیه اکسترمم‌های مطلق، این تابع مقادیر اکسترمم مطلق خود را بر این بازه اتخاذ خواهد نمود. برای یافتم این مقادیر اکسترمم، مطابق با دستورالعمل فوق، ابتدا نقاط بحرانی f را بر بازه باز $(\circ,\text{۳})$ تعیین می‌کنیم. چون هر تابع چندجمله‌ای بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، نقاط بحرانی تابع فوق بر $\mathbb{R}$ جواب‌های معادله $f'(x) = \circ$ خواهند بود.

$$f'(x) = \text{۳}x^{\text{۲}} + \text{۱۲}x - \text{۱۵} = \text{۳}(x-\text{۱})(x+\text{۵}) = \circ \quad \Rightarrow \quad x_{\text{۱}} = \text{۱} \;\text{ و }\; x_{\text{۲}} = -\text{۵}$$

بنابر این تابع f بر $\mathbb{R}$ دو نقطه بحرانی دارد و از آن دو، فقط $x_{\text{۱}} = \text{۱}$ در بازه $(\circ,\text{۳})$ است. اکنون مقدار تابع f را در نقاط ابتدا و انتها و نقطه بحرانی درون بازه تشکیل داده با هم مقایسه می‌کنیم.

$$f(\circ) = -\text{۱} \quad , \quad f(\text{۱}) = -\text{۹} \quad , \quad f(\text{۳}) = \text{۱۷}$$

به این ترتیب، کمترین مقدار f بر بازه $[\circ,\text{۳}]$ در نقطه $x_{\text{۱}} = \text{۱}$ و برابر $f(\text{۱}) = -\text{۹}$ و بیشترین مقدار آن در نقطه $b = \text{۳}$ و برابر $f(\text{۳}) = \text{۱۷}$ است. توجه می‌کنیم بنابر آنچه مشاهده کردیم

$$\forall x \in [\circ,\text{۳}] \qquad -\text{۹} \le f(x) = x^{\text{۳}} + \text{۶}x^{\text{۲}} - \text{۱۵}x - \text{۱} \le \text{۱۷}$$

مثال. تابع f با دستور $f(x) = \begin{cases} \sqrt[\text{۳}]{x^{\text{۳}} - \text{۳}x} & x \ge \circ \\ x^{\text{۲}} + \text{۲}x & x < \circ \end{cases}$ مفروض است.

الف) نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}$ را تعیین کنید.

ب) اکسترمم‌های مطلق f بر بازه $[-\text{۱},\text{۲}]$ را به دست آورید.

الف) برای تعیین نقاط بحرانی f ابتدا مشتق f را بر $\mathbb{R}$ تعیین می‌کنیم. با توجه به نحوه تعریف f،

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{۳}(x^{\text{۲}} - \text{۱})}{\text{۳}\sqrt[\text{۳}]{(x^{\text{۳}} - \text{۳}x)^{\text{۲}}}} & x > \circ \;\text{ و }\; x \neq \sqrt{\text{۳}} \\ \text{۲}(x+\text{۱}) & x < \circ \end{cases}$$

برای تعیین مشتق f در نقاط $\sqrt{\text{۳}}$ و $\circ$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم. ابتدا نقطه $\sqrt{\text{۳}}$.

$$\lim_{x \to \sqrt{\text{۳}}} \frac{f(x) - f(\sqrt{\text{۳}})}{x - \sqrt{\text{۳}}} = \lim_{x \to \sqrt{\text{۳}}} \frac{\sqrt[\text{۳}]{x(x+\sqrt{\text{۳}})(x-\sqrt{\text{۳}})}}{x - \sqrt{\text{۳}}} = \infty$$

پس f در این نقطه مشتق‌پذیر نبوده، این نقطه یک نقطه بحرانی برای f است. برای نقطه ۰،

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}}{x}=-\infty$$

به این ترتیب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ وجود نداشته و در نتیجه f در $x_0=0$ مشتق‌پذیر نیست. پس این نقطه نیز یک نقطه بحرانی برای f است. نقاط بحرانی دیگر تابع جواب‌های معادله $f'(x)=0$ خواهند بود.

$$\forall x>0\quad f'(x)=\frac{(x^2-1)}{\sqrt[3]{x^3-3x}}=0\quad\Rightarrow\quad x=\pm 1$$

اما $x=-1$ در شرط $x>0$ صدق نمی‌کند. پس $x_1=1$ تنها نقطه بحرانی f در ناحیه $x>0$ صادق در شرط $f'(x)=0$ خواهد بود.

$$\forall x<0\quad f'(x)=2(x+1)=0\quad x=-1$$

به این ترتیب، تابع f بر $\mathbb{R}$ چهار نقطه بحرانی $x_1=0$ و $x_2=\sqrt{3}$، $x_3=1$ و $x_4=-1$ را دارد.

ب) به سادگی مشاهده می‌شود f بر $\mathbb{R}$ و در نتیجه بر $[-1,2]$ پیوسته است. برای تعیین اکسترمم‌های این تابع پیوسته بر بازه بسته و کراندار $[-1,2]$ ابتدا نقاط بحرانی f بر بازه باز $(-1,2)$ را تعیین می‌کنیم. بنابر قسمت (الف)، $x_1=0$ و $x_2=\sqrt{3}$ و $x_3=1$ نقاط بحرانی f در این بازه هستند. توجه می‌کنیم که $x_4=-1\notin(-1,2)$. اکنون مقدار تابع f را در نقاط $x_1=0$، $x_2=\sqrt{3}$، $x_3=1$، $a=-1$ و $b=2$ حساب کرده، این مقادیر را با هم مقایسه می‌کنیم.

$$f(-1)=(-1)^2+2(-1)=-1\quad,\quad f(0)=\sqrt[3]{0^3-3\times 0}=0\quad,\quad f(\sqrt{3})=0$$
$$f(1)=\sqrt[3]{-2}\quad,\quad f(2)=\sqrt[3]{2}$$

در نتیجه

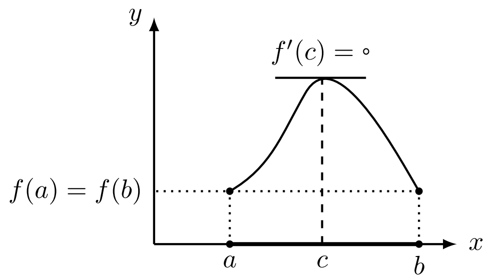
$$\min_{[-1,2]} f=f(1)=-\sqrt[3]{2}\quad\text{و}\quad\max_{[-1,2]} f=f(2)=\sqrt[3]{2}$$

قضایای رل و میانگین.

در این بخش به بیان یکی از ویژگی‌های مهم توابع مشتق‌پذیر تحت عنوان قضیه مقدار میانگین پرداخته، برخی نتایج حاصل از این قضیه برای توابع مشتق‌پذیر را در بخش بعد مورد توجه قرار می‌دهیم. بحث خود را با حالت خاص این قضیه که به نام قضیه رل نامیده می‌شود شروع می‌کنیم.

قضیه رل

فرض کنیم $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر $[a,b]$ و مشتق‌پذیر بر (a,b) باشد. اگر $f(a) = f(b)$ آنگاه $c \in (a,b)$ وجود دارد که $f'(c) = ۰$.



اثبات. بنابر قضیه اکسترمم‌های مطلق، نقاط $p,q \in [a,b]$ وجود دارد که

$$\forall x \in [a,b] \qquad f(p) \le f(x) \le f(q)$$

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $f(p) = f(q)$. در این حالت برای هر $x \in [a,b]$، $f(x) = f(p) = f(q)$. یعنی f بر $[a,b]$ تابع ثابت بوده، در نتیجه در هر نقطه از (a,b) مشتق برابر صفر است.

ب) $f(p) < f(q)$. در این حالت با توجه به اینکه $f(p) \le f(a) = f(b) \le f(q)$، یکی از دو حالت $f(p) < f(a) = f(b) \le f(q)$ یا $f(p) \le f(a) = f(b) < f(q)$ رخ می‌دهند. در هر حال، حداقل یکی از نقاط p یا q متعلق به مجموعه $\{a,b\}$ نبوده، در داخل بازه (a,b) قرار خواهد داشت. با توجه به فرض مشتق‌پذیری f بر (a,b)، f' در این نقطه برابر صفر خواهد بود. ■

مثال. نشان دهید معادله $x^۵ + ۵x - ۱ = ۰$ دارای دقیقا یک ریشه در $\mathbb{R}$ است.

فرض کنیم f تابع با ضابطه $f(x) = x^۵ + ۵x - ۱$ باشد. این تابع یک چندجمله‌ای بوده، در نتیجه بر سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته است. ابتدا با استفاده از قضیه بولتسانو، نشان می‌دهیم f دارای حداقل یک ریشه است.

$$f(۰) = -۱ < ۰ \qquad \text{و} \qquad f(۱) = ۵ > ۰$$

با توجه به پیوستگی f بر بازه $[۰,۱]$ و بنابر قضیه بولتسانو، $c \in (۰,۱)$ وجود دارد که $f(c) = ۰$. اکنون فرض کنیم عدد دیگری چون $c' \neq c$ وجود داشته باشد که $f(c') = ۰$. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $c < c'$. توجه می‌کنیم تابع f بر بازه $[c,c']$ پیوسته بوده، همه جا بر $\mathbb{R}$ و به خصوص بر (c,c') مشتق‌پذیر است. به علاوه، طبق فرض فوق، $f(c') = ۰ = f(c)$.

بنابر قضیه رل، عددی چون $d \in (c, c')$ وجود دارد که $f'(d) = ۰$. اما

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = ۵x^۴ + ۵ > ۰$$

تناقض حاصل ناشی از فرض وجود نقطه c' با خاصیت $f(c') = ۰$ بوده، در نتیجه فقط یک عدد c با خاصیت $c^۵ + ۵c - ۱ = ۰$ وجود دارد.

مثال. نشان دهید یک و تنها یک $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $c^۳ = \frac{۱}{۱ + c^۲}$.
فرض کنیم f تابع با ضابطه $f(x) = x^۳ - \frac{۱}{۱ + x^۲}$ باشد. با استفاده از قضایای فصل اول و دوم، به سادگی مشاهده می‌شود f بر $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$$f(۰) = -۱ < ۰ \qquad \text{و} \qquad f(۱) = \frac{۱}{۲} > ۰$$

با توجه به پیوستگی f بر بازه $[۰, ۱]$، بنابر قضیه بولتسانو، عدد $c \in [۰, ۱]$ وجود دارد که $f(c) = c^۳ - \frac{۱}{۱ + c^۲} = ۰$. مانند مثال قبل، فرض کنیم عدد $c' \neq c$ وجود داشته باشد که $c'^۳ = \frac{۱}{۱ + c'^۲}$ یا $f(c') = ۰$. ابتدا توجه می‌کنیم

$$c'^۳ = \frac{۱}{۱ + c'^۲} > ۰$$

در نتیجه c' عددی مثبت است. فرض کنیم $c < c'$. در این حالت، f بر $[c', c]$ پیوسته و بر (c', c) مشتق‌پذیر است. به علاوه، $f(c) = ۰ = f(c')$. بنابر قضیه رل، عدد $d \in (c, c')$ وجود دارد که $f'(d) = ۰$. با توجه به اینکه $c' > ۰$، داریم $d > ۰$. اما توجه می‌کنیم که

$$\forall x > ۰ \qquad f'(x) = ۳x^۲ - \frac{-۲x}{(۱ + x^۲)^۲} = ۳x^۲ + \frac{۲x}{(۱ + x^۲)^۲} > ۰$$

در نتیجه عدد $d > ۰$ با خاصیت $f'(d) = ۰$ نمی‌تواند وجود داشته باشد.
حالت $c' > c$ به نحو مشابه بحث می‌شود. در نتیجه عدد c' با خاصیت فوق وجود ندارد.
مثال. فرض کنید $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعی مشتق‌پذیر باشند. اگر نمودار دو تابع حداقل در دو نقطه یکدیگر را قطع کنند نشان دهید نقطه‌ای چون $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $f'(c) = g'(c)$.
طبق فرض نقاط $a, b \in \mathbb{R}$ با شرط $a < b$ وجود دارند که $f(a) = g(a)$ و $f(b) = g(b)$. اگر $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابع با دستور $h(x) = f(x) - g(x)$ باشد آنگاه، بنابر فرض مسئله، h بر $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. در نتیجه h بر $[a, b]$ پیوسته

و بر (a,b) مشتق‌پذیر است. به علاوه

$$h(a)=f(a)-g(a)=\circ \qquad \text{و} \qquad h(b)=f(b)-g(b)=\circ$$

پس $h(a)=h(b)$. بنابر قضیه رل، عدد $c\in(a,b)$ وجود دارد که $h'(c)=\circ$. در نتیجه در این نقطه $f'(c)-g'(c)=\circ$، یا $f'(c)=g'(c)$.

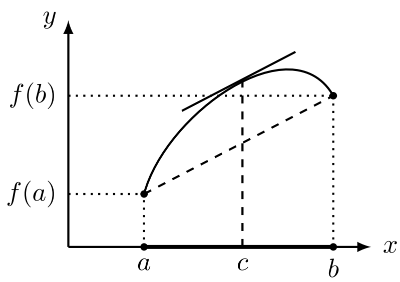
مثال. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی دو بار مشتق‌پذیر باشد. اگر نمودار f خط L به معادله $mx+d$ را حداقل در سه نقطه قطع کند نشان دهید نقطه‌ای چون $c\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $f''(c)=\circ$.

اگر g تابع با ضابطه $g(x)=f(x)-mx-d$ باشد آنگاه g بر $\mathbb{R}$ تابعی دو بار مشتق‌پذیر است. طبق فرض، اعداد $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ با $a_۱<a_۲<a_۳$ وجود دارند که $g(a_۱)=g(a_۲)=g(a_۳)=\circ$. از قضیه رل نتیجه می‌شود نقاط $b_۱\in(a_۱,a_۲)$ و $b_۲\in(a_۲,a_۳)$ وجود دارند که $g'(b_۱)=g'(b_۲)=\circ$ و در نتیجه $f'(b_۱)=f'(b_۲)=m$. اکنون با در نظر گرفتن تابع f' بر بازه $[b_۱,b_۲]$، این تابع بر این بازه پیوسته بوده بر $(b_۱,b_۲)$ مشتق‌پذیر است (توجه کنیم که f بر $\mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر است). به علاوه، بنابر نتایج فوق، $f'(b_۱)=f'(b_۲)=m$. بنابر قضیه رل برای تابع f'، عدد $c\in(b_۱,b_۲)$ وجود دارد که $(f')'(c)=\circ$ یا $f''(c)=\circ$.

در ادامه، قضیه مقدار میانگین را که در واقع حالت کلی‌تری از قضیه رل محسوب می‌شود، بیان و اثبات می‌نماییم.

قضیه مقدار میانگین

۱۳- قضیه مقدار میانگین: فرض کنیم تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت $c\in(a,b)$ وجود دارد که $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



اثبات. فرض کنیم $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابع با ضابطه

$$g(x)=f(x)-f(a)-\Big(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big)(x-a)$$

باشد. با توجه به فرض قضیه، تابع g بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر است. به علاوه، $g(a)=\circ$ و $g(b)=\circ$. پس $g(a)=g(b)$. بنابر قضیه

رل، $c \in (a,b)$ وجود دارد که $g'(c) = ۰$. در نتیجه $۰ - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ یا $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

مثال. هر یک از نامساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\forall a,b \in \mathbb{R}, \qquad |\sin b - \sin a| \leq |b-a|$ $\qquad$ ب) $\forall a,b \in (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}), \quad |a-b| \leq |\tan a - \tan b|$

الف) برای $a,b \in \mathbb{R}$، اگر $a = b$ آنگاه نامساوی مورد نظر تبدیل به تساوی شده، برقرار خواهد بود. پس فرض کنیم $a \neq b$ و به طور مثال، $a < b$. با توجه به پیوستگی تابع $\sin$ بر $[a,b]$ و مشتق‌پذیری آن بر بازه (a,b)، بنابر قضیه مقدار میانگین، عدد $c \in (a,b)$ وجود خواهد داشت که

$$\sin'(c) = \frac{\sin b - \sin a}{b-a} \qquad \text{یا} \qquad \sin b - \sin a = (b-a)\cos c$$

در نتیجه

$$|\sin b - \sin a| = |(b-a)\cos c| = |b-a||\cos c| \leq |b-a|$$

در حالتی که $a > b$، با جابجا کردن نقش a و b در روابط فوق، مجددا نامساوی مورد نظر به نحو مشابه به دست می‌آید.

ب) برای $a,b \in (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$، اگر $a = b$ آنگاه طرفین نامساوی مورد نظر برابر خواهند بود. پس فرض کنیم $a \neq b$ و به طور مثال، $a < b$. (حالت $a > b$ به نحو مشابه بررسی می‌شود.) با توجه به پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع $\tan$ بر $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ و این که $[a,b] \subset (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$، تابع $\tan$ بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر است. بنابر قضیه مقدار میانگین، عدد $c \in (a,b)$ وجود دارد که

$$\tan'(c) = \frac{\tan b - \tan a}{b-a} \qquad \text{یا} \qquad \tan b - \tan a = (b-a)\frac{۱}{\cos^۲ c}$$

و از آنجا

$$|\tan b - \tan a| = |(b-a)\frac{۱}{\cos^۲ c}| = |b-a||\frac{۱}{\cos^۲ c}| \geq |b-a|$$

مثال. فرض کنید $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ توابعی پیوسته بر این بازه و مشتق‌پذیر بر (a,b) باشند و $f(a) = g(a)$. اگر برای هر $x \in (a,b)$، $f'(x) < g'(x)$ نشان دهید $f(b) < g(b)$.

فرض کنیم $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابع با دستور $h(x) = f(x) - g(x)$ باشد. در این صورت h بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر است. بنابر قضیه مقدار میانگین، عدد $c \in (a,b)$ وجود دارد که

$$h(b) - h(a) = (b-a)h'(c)$$

با توجه به فرض، $h'(c) = f'(c) - g'(c) < 0$. از آنجا که $b - a > 0$، $(b-a)h'(c) < 0$. همچنین $h(a) = f(a) - g(a) = 0$. در نتیجه

$$f(b) - g(b) = h(b) = h(b) - h(a) = (b-a)h'(c) < 0$$

و در نتیجه $f(b) < g(b)$.

مثال. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر بوده، $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$. اگر $f(0) = 0$ نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $|f(x)| \leq |x|$.

برای $x \in \mathbb{R}$، اگر $x = 0$ آنگاه با توجه به فرض $f(0) = 0$، داریم $|f(0)| = |0|$. فرض کنیم $x \neq 0$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $x > 0$. در این حالت x را ثابت در نظر می‌گیریم. طبق فرض، تابع f بر $[0, x]$ پیوسته و بر $(0, x)$ مشتق‌پذیر است. در نتیجه طبق قضیه مقدار میانگین، عدد $c \in (0, x)$ وجود دارد که

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

در نتیجه

$$|\frac{f(x)}{x}| = |f'(c)| = \frac{1}{1+c^4} \leq 1$$

و از آنجا $|f(x)| \leq |x|$.

ب) اگر $x < 0$ آنگاه مجددا با ثابت انگاشتن x، تابع f بر $[x, 0]$ پیوسته و بر $(x, 0)$ مشتق‌پذیر است. بنابر قضیه مقدار میانگین،

$$\exists c \in (x, 0) \qquad f'(c) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x}$$

در نتیجه

$$|\frac{f(x)}{x}| = |f'(c)| = \frac{1}{1+c^4} \leq 1$$

و به این ترتیب نتیجه در این حالت نیز به دست می‌آید.

رفتار هندسی توابع مشتق‌پذیر.

به عنوان یکی از کاربردهای قضیه مقدار میانگین، می‌توانیم تعیین رفتار تابع با استفاده از تابع مشتق را مطرح نماییم. برای این منظور ابتدا تعریف ساده زیر را یادآوری می‌کنیم.

تعریف.

تابع $f: I \to \mathbb{R}$ را بر بازه $I \subset \mathbb{R}$ تابعی صعودی (نزولی) نامیم هرگاه برای هر دو نقطه $x_1, x_2 \in I$ با شرط $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). به همین ترتیب f را بر I اکیدا صعودی (اکیدا نزولی) نامیم هرگاه برای نقاط دلخواه $x_1, x_2 \in I$ با شرط فوق، $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

تابع f را بر I یکنوا (اکیدا یکنوا) نامیم هرگاه f بر این بازه تابعی صعودی یا تابعی نزولی (اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی) باشد. قضیه زیر نقش تابع مشتق را در تعیین یکنوایی یک تابع مشتق‌پذیر نشان می‌دهد.

قضیه.

فرض کنیم I بازه‌ای از اعداد حقیقی و $f: I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر این بازه و در نقاط درونی I مشتق‌پذیر باشد. در این صورت

الف) اگر برای هر نقطه درونی $x \in I$، $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) آنگاه f بر I صعودی (اکیدا صعودی) است.

ب) اگر برای هر نقطه درونی $x \in I$، $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) آنگاه f بر I تابعی نزولی (اکیدا نزولی) است.

ج) اگر برای هر نقطه درونی $x \in I$، $f'(x) = 0$ آنگاه f بر I ثابت است.

اثبات. الف) فرض کنیم برای هر نقطه درونی x از بازه I، $f'(x) \geq 0$. برای نقاط $x_1, x_2 \in I$ با شرط $x_1 < x_2$، با توجه به اینکه $[x_1, x_2] \subset I$، و بنابه فرض، $f: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ بر این بازه پیوسته است. همچنین چون بازه (x_1, x_2) زیرمجموعه‌ای از نقاط درونی بازه I است، f بر این باز بازه نیز مشتق‌پذیر خواهد بود. در نتیجه بنابر قضیه مقدار میانگین، $c \in (x_1, x_2)$ وجود دارد که

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

توجه می‌کنیم طبق فرض شروع اثبات، $f'(c) \geq 0$. در نتیجه $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$. از آنجا که $x_2 - x_1 > 0$ خواهیم داشت $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ و یا $f(x_1) \leq f(x_2)$. پس f بر I صعودی است.

سایر قسمت‌های قضیه به همین ترتیب ثابت می‌شوند. ■

مثال. نشان دهید تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$ تابعی اکیدا صعودی است.
توجه می‌کنیم f بر $\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. با نوشتن تابع f به صورت

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \end{cases}$$

خواهیم داشت

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \qquad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & x > 0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & x < 0 \end{cases}$$

مشتق‌پذیری تابع در نقطه $x_0 = 0$ را مستقیما با استفاده از تعریف بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه در سمت راست و چپ این نقطه ضابطه تعریف تابع تغییر می‌کند لازم است حدود چپ و راست عبارت تعریف کننده مشتق را تشکیل دهیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1 \end{aligned}$$

بنابر این $f'(0) = 1$. با بررسی تابع مشتق مشاهده می‌شود

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$$

در نتیجه بنابر قضیه فوق، f بر $\mathbb{R}$ تابعی اکیدا صعودی است.

مثال. فرض کنید $p \geq 1$ عددی گویا باشد.

الف) نشان دهید برای هر $x \geq 0$، $1 + x^p \leq (1+x)^p$.

ب) برای هر دو عدد حقیقی $a, b \geq 0$ نشان دهید $a^p + b^p \leq (a+b)^p$.

الف) اگر $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ تابع با ضابطه $f(x) = (1+x)^p - x^p$ باشد آنگاه f بر $[0,\infty)$ پیوسته و بر $(0,\infty)$ مشتق‌پذیر است. برای هر $x \in (0,\infty)$،

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1} - px^{p-1}$$

از آنجا که $p \geq 1$، $p - 1 \geq 0$ و در نتیجه $x^{p-1} \geq (1+x)^{p-1}$. در نتیجه $f'(x)$ برای همه مقادیر $x \in (0,\infty)$ مثبت بوده، بنابر قضیه قبل، f بر $[0,\infty)$ تابعی اکیدا صعودی است. پس اگر $x \geq 0$ آنگاه $f(x) \geq f(0) = 1$. به این ترتیب

$$\forall x \in [0,\infty) \qquad (1+x)^p - x^p \geq 1 \quad \text{یا} \quad 1 + x^p \leq (1+x)^p$$

ب) برای دو عدد حقیقی $a, b \geq 0$ اگر $a = 0$ یا $b = 0$ آنگاه نامساوی مورد نظر واضح است. پس فرض کنیم $a, b > 0$. در اینحالت $\frac{a}{b}$ عددی مثبت است. با قرار دادن $x = \frac{a}{b}$ در نامساوی قسمت (الف) خواهیم داشت

$$1 + (\frac{a}{b})^p \leq (1 + \frac{a}{b})^p$$

به این ترتیب با ضرب طرفین نامساوی فوق در عدد مثبت b^p، نامساوی خواسته شده به دست می‌آید.

مثال. فرض کنید $f : (\circ, \infty) \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر بوده، $f'(x) = \frac{۱}{x}$. اگر $f(۱) = \circ$، نشان دهید برای هر $a, b \in (\circ, \infty)$، $f(ab) = f(a) + f(b)$.

برای حل مسئله فوق، فرض کنیم $a \in (\circ, \infty)$ عددی داده شده باشد. اگر g تابعی با ضابطه $g(x) = f(ax) - f(x)$ باشد آنگاه g بر $(\circ, \infty)$ تابعی مشتق‌پذیر است. داریم

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = f'(ax) \times a - f'(x) = \frac{۱}{ax}a - \frac{۱}{x} = \circ$$

بنابر قضیه قبل، g بر $(\circ, \infty)$ تابع ثابت است. یعنی عدد $C \in \mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر $x \in (\circ, \infty)$، $g(x) = C$.
اکنون برای تعیین این مقدار ثابت از شرط $f(۱) = \circ$ استفاده می‌کنیم. طبق فرض فوق، $g(۱) = C$. در نتیجه

$$C = g(۱) = f(a \times ۱) - f(۱) = f(a)$$

به این ترتیب

$$\forall x \in (\circ, \infty) \qquad g(x) = f(ax) - f(x) = f(a) \quad \text{یا} \quad f(ax) = f(a) + f(x)$$

اگر در رابطه فوق به جای x مقدار $b \in (\circ, \infty)$ را قرار دهیم رابطه مورد نظر حاصل می‌شود.
مثال فوق از اهمیت زیادی برخوردار است. بنابر این مثال، اگر $f : (\circ, \infty) \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با شرط $f'(x) = \frac{۱}{x}$، برای هر $x \in (\circ, \infty)$، باشد آنگاه این تابع عمل ضرب در دامنه تعریف را تبدیل به عمل جمع در برد می‌نماید. بعدا در فصل پنجم درس با چنین تابعی بیشتر آشنا خواهیم شد.
تمرین زیر نیز نشان می‌دهد برای بررسی اکیدا یکنوا بودن تابعی مشتق‌پذیر بر یک بازه، می‌توانیم شرط اکیدا مثبت بودن تابع مشتق بر تمام نقاط بازه را کمی تعدیل کرده، اجازه دهیم تابع مشتق در تعداد متناهی نقطه از بازه صفر باشد.
تمرین. فرض کنید $I \subset \mathbb{R}$ یک بازه و $f : I \to \mathbb{R}$ بر این بازه مشتق‌پذیر باشد. اگر برای هر $x \in I$ به جز $c \in I$، $f'(x) > \circ$ و $f'(c) = \circ$ نشان دهید f بر I اکیدا صعودی است.

اکنون بر اساس مشاهدات فوق، می‌توانیم آزمون مشتق اول برای تعیین اکسترمم‌های نسبی یا موضعی یک تابع را به صورت زیر بیان کنیم.

قضیه (آزمون مشتق اول)

فرض کنیم f در یک همسایگی c تابعی پیوسته و بر همسایگی محذوف این نقطه مشتق‌پذیر باشد. اگر تابع مشتق در گذر از نقطه c تغییر علامت دهد آنگاه f در نقطه c یک اکسترمم خواهد داشت. اگر برای $x < c$، $f'(x) < ۰$ و برای $x > c$، $f'(x) > ۰$ آنگاه f در c یک مقدار مینیمم نسبی، و اگر برای $x < c$، $f'(x) > ۰$ و برای $x > c$، $f'(x) < ۰$ آنگاه f در c یک مقدار ماکزیمم نسبی دارد.

قضیه فوق به سادگی از قضیه قبل نتیجه شده، از ارائه اثبات در اینجا صرف‌نظر می‌شود.

مثال. کلیه اکسترمم‌های تابع f با ضابطه $f(x) = \dfrac{|x-۲|}{|x|+۱}$ را بر $\mathbb{R}$ تعیین کنید.

ابتدا توجه می‌کنیم تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است. برای بررسی اکسترمم‌های تابع f لازم است ابتدا نقاط بحرانی این تابع را به دست آوریم. برای این منظور ابتدا f را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-۲}{۱+x} & ۲ \leq x \\ \dfrac{-(x-۲)}{۱+x} & ۰ \leq x < ۲ \\ \dfrac{-(x-۲)}{۱-x} & x < ۰ \end{cases}$$

بر این اساس،

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{۳}{(۱+x)^۲} & ۲ < x \\ \dfrac{-۳}{(۱+x)^۲} & ۰ < x < ۲ \\ \dfrac{۱}{(۱-x)^۲} & x < ۰ \end{cases}$$

برای نقاط $x = ۰$ و $x = ۲$ مستقیما از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم. با توجه به تغییر ضابطه f در اطراف این دو نقطه، در هر مورد لازم است حدود یک طرفه عبارت تعریف کننده مشتق را بررسی نماییم.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to ۰^-} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} &= \lim_{x\to ۰^-} \frac{\frac{۲-x}{۱-x}-۲}{x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{۱-x} = ۱ \\ \lim_{x\to ۰^+} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} &= \lim_{x\to ۰^+} \frac{\frac{۲-x}{۱+x}-۲}{x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{-۳}{۱+x} = -۳ \end{aligned}$$

به این ترتیب f در $x=0$ مشتق‌پذیر نبوده، این نقطه یکی از نقاط بحرانی تابع f است. برای نقطه $x=2$،

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{2-x}{1+x}-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{3}\\ \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{x-2}{1+x}-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

در نتیجه f در این نقطه نیز مشتق‌پذیر نبوده، $x=2$ نیز یک نقطه بحرانی برای f است. با بررسی تابع مشتق مشاهده می‌شود f نقطه بحرانی دیگری بر $\mathbb{R}$ ندارد. اکنون برای تعیین اکسترمم‌های f بر $\mathbb{R}$ تغییر علامت مشتق را در نقاط بحرانی مورد توجه قرار می‌دهیم. با توجه به جدول زیر

x			0		2		
$f'(x)$		$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	1

تابع f در نقطه $x=0$ ماکزیمم مطلق برابر $f(0)=2$ و در نقطه $x=2$ مینیمم مطلق برابر $f(2)=0$ دارد.

تابع اولیه

فرض کنیم $I\subseteq\mathbb{R}$. تابع $F:I\to\mathbb{R}$ را یک تابع اولیه برای $f:I\to\mathbb{R}$ بر I نامیم هرگاه برای هر $x\in I$، $F'(x)=f(x)$.
به طور مثال، هر یک از توابع $F(x)=x^3$ و $G(x)=x^3+4$ توابع اولیه‌ای برای $f(x)=3x^2$ بر $\mathbb{R}$ هستند. روشن است که اگر F تابع اولیه‌ای برای تابع f بر I باشد آنگاه برای هر ثابت $C\in\mathbb{R}$، تابع $F+C$ نیز یک تابع اولیه برای f خواهد بود.
اکنون این سئوال مهم مطرح می‌شود که آیا هر تابع اولیه f به همین صورت حاصل می‌شود؟ قضیه زیر پاسخ این سئوال را ارائه می‌دهد.

قضیه.

اگر F یک تابع اولیه برای f بر بازه باز I باشد آنگاه هر تابع اولیه f بر I به صورت $F+C$ است که در آن $C\in\mathbb{R}$ مقداری ثابت است.

اثبات فرض کنیم F یک تابع اولیه برای تابع f بر بازه I باشد. اگر G نیز تابع اولیه دیگری برای همین تابع باشد آنگاه با در نظر گرفتن تابع $H:=G-F$ بر بازه I،

$$\forall x\in I\qquad H'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

بنابر قضایای قبل، H بر بازه باز I تابع ثابت است. یعنی ثابت $C\in\mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر $x\in I$، $H(x)=C$ و در نتیجه برای هر $x\in I$، $G(x)=F(x)+C$. ■

قضیه مقدار میانگین کوشی

آخرین مطلبی که در این فصل مشاهده می‌کنیم تعمیمی از قضیه مقدار میانگین بوده، تحت نام قضیه مقدار میانگین کوشی نامیده می‌شود.

قضیه

فرض کنیم توابع $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ توابعی پیوسته بر این بازه و مشتق‌پذیر بر (a,b) باشند. در این صورت $c\in(a,b)$ وجود دارد که $(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$. به خصوص اگر برای هر $x\in(a,b)$، $g'(x)\neq ۰$ آنگاه $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

اثبات فرض کنیم $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابع با دستور

$$h(x)=\big(f(x)-f(a)\big)\big(g(b)-g(a)\big)+\big(f(b)-f(a)\big)\big(g(b)-g(x)\big)$$

باشد. با توجه به مفروضات قضیه، تابع h بر بازه $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر است. به علاوه،

$$h(a)=\big(f(b)-f(a)\big)\big(g(b)-g(a)\big)=h(b)$$

بنابر قضیه رل، عدد $c\in(a,b)$ وجود دارد که $h'(c)=۰$. اما

$$h'(x)=f'(x)\big(g(b)-g(a)\big)-\big(f(b)-f(a)\big)g'(x)$$

در نتیجه برای مقدار c فوق، $f'(c)\big(g(b)-g(a)\big)-\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)=۰$ که از آن نتیجه مورد نظر به دست می‌آید. ■

مثال فرض کنید f در یک همسایگی $x_۰$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید برای هر x در این همسایگی c بین x و $x_۰$ وجود دارد که

$$f(x)=f(x_۰)+f'(x_۰)(x-x_۰)+\frac{f''(c)}{۲}(x-x_۰)^۲$$

طبق فرض همسایگی چون $(x_۰-r,x_۰+r)$ حول نقطه $x_۰$ وجود دارد که f بر آن دو بار مشتق‌پذیر است. اکنون رابطه فوق را برای هر نقطه دلخواه $x_۱\in(c-r,c+r)$ ثابت می‌کنیم. برای این نقطه حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

۱- اگر $x_۱=x_۰$ آنگاه کافی است c را برابر $x_۱=x_۰$ اختیار کنیم. در این صورت تساوی فوق حاصل می‌شود.

۲- فرض کنیم $x_۱>x_۰$. در این حالت با در نظر گرفتن دو تابع $h(x)=f(x)-f(x_۰)-f'(x_۰)(x-x_۰)$ و $g(x)=(x-x_۰)^۲$ بر بازه $[x_۰,x_۱]$، روشن است که هر دو تابع بر $[x_۰,x_۱]$ پیوسته و بر $(x_۰,x_۱)$ مشتق‌پذیر هستند. در نتیجه

بنابر قضیه مقدار میانگین کوشی، عدد $c_1 \in (x_0, x_1)$ وجود دارد که

$$\frac{h(x_1)-h(x_0)}{g(x_1)-g(x_0)} = \frac{h'(c_1)}{g'(c_1)} \quad \text{یا} \quad \frac{f(x_1)-f(x_0)-(x_1-x_0)f'(x_0)}{(x_1-x_0)^2} = \frac{f'(c_1)-f'(x_0)}{2(c_1-x_0)} \qquad (1)$$

اکنون با در نظر گرفتن تابع f' بر بازه $[x_0, c_1]$ (که در همسایگی (x_0-r, x_0+r) قرار دارد)، f' بر این بازه پیوسته و بر (x_0, c_1) مشتق‌پذیر است. (توجه کنیم که طبق فرض، f بر همسایگی (x_0-r, x_0+r) دو بار مشتق‌پذیر است.) بنابر قضیه مقدار میانگین، عدد $c \in (x_0, c_1)$ وجود دارد که

$$\frac{f'(c_1)-f'(x_0)}{c_1-x_0} = (f')'(c) = f''(c)$$

با جایگذاری این نتیجه در رابطه (۵)، خواهیم داشت

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)-(x_1-x_0)f'(x_0)}{(x_1-x_0)^2} = \frac{f'(c_1)-f'(x_0)}{2(c_1-x_0)} = \frac{1}{2}f''(c)$$

و از آنجا

$$f(x_1)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) = \frac{f''(c)}{2!}(x_1-x_0)^2$$

که همان رابطه مورد نظر است.

۳- در حالی که $x_0 < x_1$، همان دو تابع h و g در قسمت قبل را این‌بار بر بازه $[x_1, x_0]$ در نظر گرفته، بحث را مانند فوق کامل کنید.

بحثی که در مثال قبل مشاهده کردیم را می‌توانیم برای حالتی که f مشتقات مراتب بالاتری داشته باشد، به همان روش انجام داده قضیه زیر را به دست آوریم.

قضیه

فرض کنیم f تابعی تعریف شده بر یک همسایگی نقطه x_0 بوده، برای عدد $n \in \mathbb{N}$، بر این همسایگی $n+1$ بار مشتق‌پذیر باشد. در این صورت برای هر x در این همسایگی عدد c بین x و x_0 وجود دارد که

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

در عبارت فوق جمله $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ را چندجمله‌ای تیلور مرتبه n تابع f حول نقطه x_0 و جمله $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ را باقیمانده تیلور تابع f در نقطه x_0 می‌نامیم. اگر مقدار جمله باقیمانده برای مقادیر x در همسایگی x_0 کوچک باشد آنگاه می‌توانیم از تقریب زیر استفاده نماییم.

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

مثال. چندجمله‌ای‌های تیلور تابع $\sin$ از مرتبه ۱، ۲ و ۳ را حول $x_0 = 0$ به دست آورید.
بنابر آنچه در بالا اشاره گردید، اگر چندجمله‌ای تیلور تابع مورد نظر از مرتبه n را با نماد $T_n(x)$ نشان دهیم آنگاه چندجمله‌ای‌های خواسته شده ساختاری به صورت زیر دارند.

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\
T_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\
T_3(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3
\end{aligned}$$

به این ترتیب، برای تابع $\sin$ در نقطه $x_0 = 0$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= x \\
T_3(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3
\end{aligned}$$

قاعده هوپیتال.
به عنوان یکی دیگر از کاربردهای قضیه مقدار میانگین کوشی می‌توانیم به قاعده هوپیتال اشاره کنیم. یکی از بیان‌های این قاعده روشی برای رفع ابهام از عباراتی به فرم $\frac{f(x)}{g(x)}$ را برای زمانی که با نزدیک شدن متغیر x به نقطه‌ای چون x_0 توابع مشتق‌پذیر f و g هر دو به صفر میل می‌کنند مورد توجه قرار می‌دهد. قبل از بیان رسمی این قاعده ابتدا حالت ساده‌ای از این قضیه را در زیر بررسی می‌کنیم.
فرض کنیم توابع f و g در یک همسایگی از نقطه x_0 مشتق‌پذیر باشند و $f(x_0) = g(x_0) = 0$. با توجه به فرض مشتق‌پذیری، هر دو تابع در این همسایگی پیوسته نیز خواهند بود. به خصوص $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$ و $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = 0$. به

این ترتیب عبارت $\lim_{x\to x_\circ}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ مبهم است. اکنون، علاوه بر مفروضات فوق، فرض کنیم $\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)}{g(x)}$ موجود بوده برابر عدد ℓ باشد و به علاوه تابع g' در هیچ نقطه‌ای از همسایگی محذوف نظیر صفر نباشد. در این حالت، برای x در همسایگی فوق غیر از $x_\circ$، اگر $x > x_\circ$، آنگاه با استفاده از قضیه مقدار میانگین کوشی، عدد $c \in (x_\circ, x)$ وجود دارد که

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_\circ)}{g(x) - g(x_\circ)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

در حالتی که $x < x_\circ$، عدد c در بازه $(x, x_\circ)$ وجود خواهد داشت که

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{f(x_\circ) - f(x)}{g(x_\circ) - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

پس در هر حالت عدد c بین x و $x_\circ$ وجود دارد که $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. اکنون اگر $x \to x_\circ$، آنگاه c نیز به $x_\circ$ میل کرده، در نتیجه $\frac{f'(c)}{g'(c)} \to \ell$. به این ترتیب

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to x_\circ}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال. می‌خواهیم مقدار عبارت $\lim_{x\to\circ}\frac{\sin ax}{bx}$ را با استفاده از قاعده هوپیتال به دست آوریم. توجه می‌کنیم که توابع $f(x) = \sin ax$ و $g(x) = bx$ در شرایط فوق صدق می‌کنند. در عین حال

$$\lim_{x\to\circ}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\circ}\frac{a\cos ax}{b} = \frac{a}{b}$$

پس $\lim_{x\to\circ}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$.

مثال. مطلوب است محاسبه عبارت $\lim_{x\to\circ}\frac{۱-\cos x}{x^۲}$.

با توجه به برقراری شرایط فوق، با استفاده از قاعده هوپیتال، خواهیم داشت

$$\lim_{x\to x}\frac{۱-\cos x}{x^۲} = \lim_{x\to\circ}\frac{\sin x}{۲x}$$

برای عبارت اخیر نیز دوباره از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم. (البته مقدار عبارت اخیر به سادگی و بدون استفاده از این قاعده نیز بنابر مطالب فصل اول قابل محاسبه است.)

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\sin x}{۲x} = \lim_{x\to\circ}\frac{\cos x}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

نتیجه نهایی را می‌توانیم در قالب محاسبات متوالی به صورت زیر بیان کنیم.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱-\cos x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{۲x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\cos x}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

قبل از بیان حالت کلی‌تر قاعده هوپیتال، ابتدا تعریف زیر را یادآوری می‌کنیم.

تعریف

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه $x_۰$ تعریف شده باشد. گوییم وقتی x به $x_۰$ میل می‌کند مقدار f به بینهایت میل می‌کند، و آن را با $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x) = \infty$ نشان می‌دهیم هرگاه بتوانیم مقادیر f را به اندازه دلخواه بزرگ کنیم به شرط آنکه مقادیر x به اندازه کافی به $x_۰$ نزدیک شده باشند. به زبان ریاضی، $\lim_{x\to x_۰} f(x) = \infty$ هرگاه

$$\forall M > ۰ \quad \exists\delta > ۰ \quad \forall x \qquad ۰ < |x - x_۰| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > M$$

به همین ترتیب، گوییم $\lim_{x\to x_۰} f(x) = -\infty$ هرگاه

$$\forall M > ۰ \quad \exists\delta > ۰ \quad \forall x \qquad ۰ < |x - x_۰| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) < -M$$

مثال. با استفاده از تعریف فوق نشان می‌دهیم $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱}{\sqrt{|x|}} = \infty$. بنابر این تعریف، باید نشان دهیم برای عدد مثبت M، عدد $\delta > ۰$ وجود دارد که اگر $۰ < |x| < \delta$ آنگاه $\frac{۱}{\sqrt{|x|}} > M$. اما

$$\frac{۱}{\sqrt{|x|}} > M \;\Leftrightarrow\; \sqrt{|x|} < \frac{۱}{M} \;\Leftrightarrow\; |x| < \frac{۱}{M^۲}$$

بنابر این کافی است $\delta > ۰$ را با شرط $\delta \leq \frac{۱}{M^۲}$ انتخاب کنیم. در این صورت به سادگی تحقیق می‌شود اگر $۰ < |x| < \delta$ آنگاه $\frac{۱}{\sqrt{|x|}} > M$.

اکنون می‌توانیم یکی از حالت‌های قاعده هوپیتال را به صورت زیر بیان کنیم.

قاعده هوپیتال

فرض کنیم توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر بوده، تابع g' در آن غیر صفر باشد. اگر

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = \lim_{x\to x_\circ} g(x) = \circ$$

یا

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = \pm\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to x_\circ} g(x) = \pm\infty$$

(به عبارت دیگر، اگر عبارت $\lim\limits_{x\to x_\circ} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ به فرم مبهم $\dfrac{\circ}{\circ}$ یا $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ باشد) آنگاه

$$\lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_\circ} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

به شرط آنکه عبارت $\lim\limits_{x\to x_\circ} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود داشته باشد یا برابر $\pm\infty$ باشد.

تذکر. قاعده هوپیتال در صورت برقراری شرایط مناسب، برای حدود یکطرفه $(x \to x_\circ^\pm)$ و حدود در بی‌نهایت و منفی بی‌نهایت نیز قابل به کارگیری است. یادآوری می‌کنیم تابع f را در بی‌نهایت دارای حد ℓ نامیم هرگاه با افزایش مقادیر x، مقادیر تابع در یک همسایگی از پیش تعیین شده برای ℓ قرار گیرند. به بیان دقیق، گوییم $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ هرگاه

$$\forall \epsilon > \circ \quad \exists N > \circ \quad \forall x \qquad x > N \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \epsilon$$

به همین ترتیب، عبارت $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ از لحاظ ریاضی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\forall \epsilon > \circ \quad \exists N > \circ \quad \forall x \qquad x < -N \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \epsilon$$

عباراتی به فرم $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ نیز به نحو مشابه قابل تعریف هستند که آن را به عهده خواننده می‌گذاریم.

تمرین‌های فصل سوم

۱. اکسترمم‌های مطلق هر یک از توابع پیوسته زیر را بر بازه‌های داده شده به دست آورید.

الف) $f(x) = x\sqrt{۴ - x^۲} \qquad [-۱, ۲]$

ب) $f(x) = \begin{cases} ۴ - x^۲ & x < ۰ \\ ۲x + ۴ & x \geq ۰ \end{cases} \qquad [-۲, ۲]$

ج) $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۳۶x \qquad [۰, ۴]$

د) $f(x) = x^{۴/۵}(x - ۴)^۲ \qquad [-۱, ۵]$

ه) $f(x) = ۳x^۴ - ۴x^۳ - ۱۲x + ۱ \qquad [-۲, ۳]$

۲. فرض کنید r و s دو عدد گویای مثبت باشند. ماکزیمم مطلق تابع f با دستور $f(x) = x^r(۱ - x)^s$ را بر بازه $[۰, ۱]$ تعیین کنید.

۳. نزدیکترین نقطه از خم به معادله $y = \sqrt{x}$ را تا نقطه $(\frac{۳}{۲}, ۰)$ تعیین کنید.

۴. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر $\mathbb{R}$ بوده، $f(۰) = ۰$ و $f'(x) = \dfrac{x}{۱ + x^۲}$. نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $|f(x)| \leq \dfrac{۱}{۲}|x|$.

۵. فرض کنید f و g توابعی دو بار مشتق‌پذیر بوده، در روابط $f'(x) = g(x)$ و $f''(x) = -f(x)$ صدق کنند. اگر h تابعی با دستور $h(x) = f^۲(x) + g^۲(x)$ باشد و $h(۰) = ۵$، مقدار $h(۱۰)$ را به دست آورید.

۶. فرض کنید f و g توابعی پیوسته بر $[a, b]$ و مشتق‌پذیر بر (a, b) باشند. اگر $f(a) = g(a)$ و برای هر $x \in (a, b)$، $f'(x) < g'(x)$ نشان دهید $f(b) < g(b)$.

۷. نشان دهید برای هر $x > ۰$، $\sqrt{x + ۱} < ۱ + \frac{۱}{۲}x$.

۸. عدد a را یک نقطه ثابت برای تابع f نامیم هرگاه $f(a) = a$. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر باشد و برای هر x، $f'(x) \neq ۱$. نشان دهید f حداکثر یک نقطه ثابت دارد.

۹. فرض کنید $p \in (۰, ۱)$ عددی گویا باشد. نشان دهید برای هر $x > ۰$، $(۱ + x)^p < ۱ + px$.

۱۰. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[۰, ۴]$ و مشتق‌پذیر بر $(۰, ۴)$ باشد و $f(۰) = ۱$. اگر برای هر $x \in (۰, ۴)$، $۲ \leq f'(x) \leq ۵$نشان دهید $۹ \leq f(۴) \leq ۲۱$.

۱۱. فرض کنید $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی فرد باشد. اگر g در نقطه $a > ۰$ دارای یک مقدار ماکزیمم نسبی باشد نشان دهید g در نقطه $-a$ یک مقدار می‌نیمم نسبی دارد.

۱۲. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ بوده، $f(b) < f(a)$. نشان دهید f' در نقطه‌ای بین a و b باید منفی باشد.

۱۳. ماکزیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}$ را تعیین کنید.

تمرین‌های تکمیلی.

۱. برای ثابت c، نشان دهید معادله $x^3 - 15x + c = 0$ حداکثر یک ریشه در بازه $[-2,2]$ دارد.

۲. الف) فرض کنید $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ که در آن $a > 0$. با استفاده از روش اکسترمم‌های توابع، نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) \geq 0$ اگر و تنها اگر $b^2 - ac \leq 0$.

ب) برای اعداد حقیقی a_1، ...، a_n و b_1، ...، b_n با در نظر گرفتن تابع $f(x) = (a_1x+b_1)^2 + \cdots + (a_nx+b_n)^2$ نامساوی شوراتز، یعنی

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

را ثابت کنید.

۳. فرض کنید f تابعی دوبار مشتق‌پذیر بوده، تابع f'' پیوسته باشد. اگر معادله $f(x) = 0$ حداقل سه ریشه متمایز داشته باشد نشان دهید معادله $f''(x) = 0$ دارای حداقل یک ریشه است.

۴. فرض کنید f تابعی دوبار مشتق‌پذیر بوده، تابع f'' پیوسته باشد.اگر برای هر x، $f''(x) > 0$ نشان دهید معادله $f(x) = 0$ حداکثر می‌تواند دو ریشه داشته باشد.

۵. فرض کنید f در یک همسایگی $x = a$ دو بار مشتق‌پذیر بوده، تابع f'' بر این همسایگی پیوسته باشد. اگر $f'(a) = 0$ و $f''(a) > 0$ نشان دهید f در $x = a$ دارای یک مقدار می‌نیمم است.

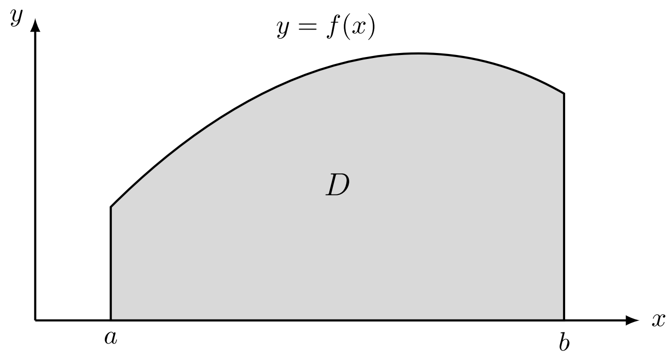
۶. فرض کنید $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعی مشتق‌پذیر بوده، برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) \leq g(x)$. اگر در نقطه‌ای چون $x_0 \in \mathbb{R}$، $f(x_0) = g(x_0)$ نشان دهید در این نقطه $f'(x_0) = g'(x_0)$.

۷. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مثبت و مشتق‌پذیر با شرط $f'(x) = f(x)$، برای هر $x \in \mathbb{R}$ باشد. به علاوه فرض کنید $f(0) = 1$. نشان دهید برای هر $a, b \in \mathbb{R}$، $f(a+b) = f(a)f(b)$.

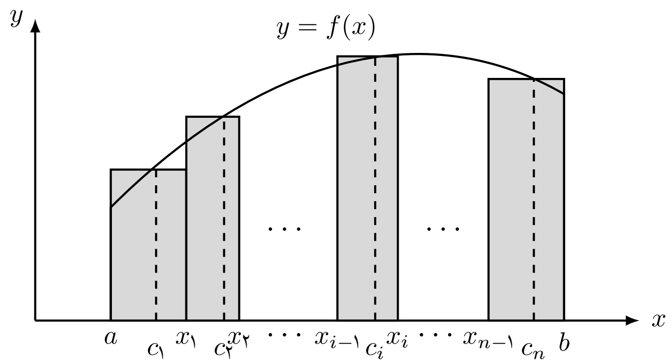
فصل چهارم
انتگرال معین و برخی کاربردهای آن

مانند آنچه در فصل دوم درس مشاهده کردیم، در اینجا نیز بحث خود را با دو مثال تاریخی که در ایجاد انگیزه تعریف انتگرال معین سهیم بوده‌اند آغاز می‌کنیم.

تعیین مساحت زیر یک نمودار. فرض کنیم $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نامنفی بوده، D ناحیه محصور بین نمودار این تابع و محور x، بین خطوط $x=a$ و $x=b$ باشد.



برای تعیین مساحت ناحیه D می‌توانیم روندی به صورت زیر را آغاز کنیم. فرض کنیم x_1، x_2، …، x_{n-1} نقاطی بین a و b با شرط $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ باشند. جهت هماهنگی در نامگذاری، نقطه a را با x_0 و b را با x_n نشان می‌دهیم. در این صورت مجموعه نقاط $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ بازه $[a,b]$ را به n زیر بازه $[x_0, x_1]$، $[x_1, x_2]$، …، $[x_{n-1}, x_n]$ تقسیم می‌کند. برای هر $i = 1, \ldots n$، اگر $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ نقطه‌ای دلخواه باشد آنگاه عبارت $f(c_i)\Delta x_i$، که در آن Δx_i طول بازه $[x_{i-1}, x_i]$ و برابر $x_i - x_{i-1}$ است، برابر مساحت مستطیل بنا شده بر این زیر بازه و با ارتفاعی برابر $f(c_i)$ بوده، تقریبی از مساحت زیر نمودار بالای محور x و بین خطوط $x = x_{i-1}$ و $x = x_i$ خواهد بود. به این ترتیب $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ تقریبی از مساحت ناحیه D است.

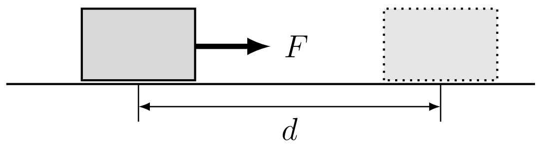


یک بررسی ساده نشان می‌دهد برای آنکه تقریب فوق دقیق‌تر شود کافی است تعداد تقسیمات بازه $[a,b]$، یعنی n افزایش یافته در عین حال طول هر یک از زیر بازه‌های حاصل کوچک و کوچکتر شود. بنابر این روند، می‌توانیم بگوییم

$$\text{مساحت ناحیه } D = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

توجه می‌کنیم که نماد حد ظاهر شده در تعریف فوق با آنچه در فصل اول درس مشاهده کردیم فرق می‌کند. در واقع این نماد در اینجا نحوه تغییر حاصل‌جمع‌های $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ را نشان می‌دهد وقتی تعداد تقسیمات بازه $[a,b]$ به سمت بی‌نهایت میل کرده، همزمان طول هر یک از زیر بازه‌ها به صفر میل کند.

کار حاصل از نیرو در جابجایی یک جسم. بنابر آنچه در فیزیک مقدماتی مشاهده کرده‌ایم، اگر نیرویی به بزرگی F نیوتن که در امتداد مسیر حرکت به یک جسم صلب وارد می‌شود باعث جابجایی آن جسم به اندازه d متر شود آنگاه کار حاصل از این نیرو در این جابجایی به صورت $W = F \times d$ تعریف می‌شود.



اکنون فرض کنیم جسم مورد نظر ما در امتداد محور x قرار گرفته، نیروی F نیز در راستای این محور به جسم اعمال گردد. همچنین فرض کنیم مقدار نیرو بستگی به موقعیت جسم بر روی محور x داشته باشد. (به بیان دیگر F تابعی از x باشد.) می‌خواهیم تحت این شرایط، کار حاصل از این نیرو را در جابجایی جسم در بازه مکانی $[a,b]$، واقع بر محور x، محاسبه کنیم. برای این منظور می‌توانیم مانند مثال قبل، بازه $[a,b]$ را به n زیر بازه کوچکتر $[x_0, x_1]$، ...، $[x_{n-1}, x_n]$ تقسیم کنیم که در آن x_0 همان a و x_n نیز برابر b است. در صورتی که طول هر زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ به اندازه کافی کوچک باشد آنگاه می‌توانیم فرض کنیم نیرو در طول جابجایی بر روی این زیر بازه تقریبا ثابت و به طور مثال برابر مقدار نیرو در نقطه‌ای چون $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ باشد. به این ترتیب کار حاصل از نیروی F در جابجایی روی بازه $[x_{i-1}, x_i]$ تقریبا برابر $\Delta W_i = F(c_i)\Delta x_i$ بوده، کار حاصل از نیروی فوق در جابجایی بر بازه $[a,b]$ تقریبا برابر

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$$

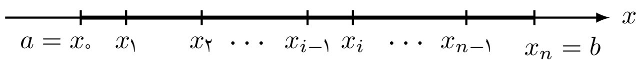
خواهد بود. روشن است که برای داشتن تقریب بهتر کافی است تعداد تقسیات بازه $[a,b]$ را افزایش داده طول هر یک از زیر بازه

ها را همزمان کاهش دهیم. به این ترتیب، با روندی مانند مثال قبل می‌توانیم بگوییم

$$W = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$$

دو مثال فوق و مثال‌های مشابه در سایر زمینه‌ها، انگیزه‌های اصلی در تعریف انتگرال معین هستند. برای داشتن تعریف دقیقی از این مفهوم نخست لازم است مفهوم افراز یک بازه را مورد توجه قرار دهیم.

زیرمجموعه متناهی P از بازه $[a,b]$ را یک افراز از این بازه نامیم هرگاه $a,b \in P$. در نمایش یک افراز توسط مجموعه نقاط آن، فرض می‌کنیم نقاط به ترتیب صعودی مرتب شده باشند. به این ترتیب اگر $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ افرازی از بازه $[a,b]$ باشد آنگاه $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$.



برای این افراز و برای هر $1 \leq i \leq n$، طول بازهٔ iام، یعنی $[x_{i-1}, x_i]$، را با نماد Δx_i نشان می‌دهیم. همچنین قرار می‌دهیم $\|P\| := \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}$. نماد اخیر را اندازه افراز، یا اصطلاحا نرم (norm) افراز P می‌نامیم. با توجه به نحوه تعریف اندازه افراز، روشن است اگر $\|P\|$ کوچک شود آنگاه n افزایش یافته همزمان طول هر یک از زیر بازه‌های حاصل از این افراز کاهش می‌یابد. بنابر این $\|P\| \to 0$ معادل دو شرط $n \to \infty$ و $\Delta x_i \to 0$، برای هر $i = 1, \ldots n$، به طور همزمان خواهد بود. افراز $P = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ از بازه $[a,b]$ را منظم نامیم هرگاه طول زیر بازه‌های حاصل همه با هم برابر باشند. به عبارت دیگر، هرگاه

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n$$

و در این صورت این مقدار مشترک را با نماد Δx نشان می‌دهیم. در این حالت روشن است که $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

اکنون آماده‌ایم تا مفهوم انتگرال معین را بیان کنیم.

تعریف

فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. برای افراز $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ از بازه $[a,b]$، با انتخاب نقاط $c_1\in[x_0,x_1]$، ...، $c_n\in[x_{n-1},x_n]$ (به طور دلخواه)، حاصل‌جمع $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ را یک حاصل‌جمع ریمان تابع f بر $[a,b]$ نظیر افراز P نامیده، آن را با نماد $S(f,P)$ نشان می‌دهیم. اگر با تغییر افراز P به گونه‌ای که $\|P\|\to 0$، عبارات فوق همگرا به عددی چون A شوند آنگاه f را بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر (ریمان) نامیده عدد A را با نماد $\int_a^b f$ یا $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان می‌دهیم. پس

$$\int_a^b f=\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P)$$

مثال. نشان می‌دهیم تابع ثابت $f(x)=k$ بر هر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و انتگرال $\int_a^b f$ را تعیین می‌کنیم.
فرض کنیم $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ افرازی از بازه $[a,b]$ باشد. در این صورت برای هر انتخاب نقاط $c_i\in[x_{i-1},x_i]$،

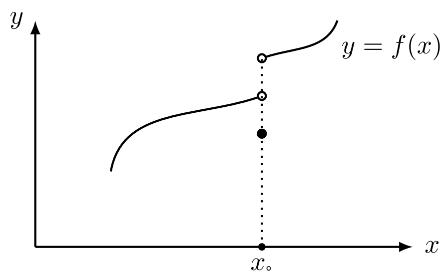
$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} k\Delta x_i=k\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=k(b-a)$$

به این ترتیب مقدار $S(f,P)$ به ازای هر افراز دلخواه P از بازه $[a,b]$ مقدار ثابت $k(b-a)$ خواهد. روشن است که با تغییر افراز P به گونه‌ای که $\|P\|$ کوچک شود مقدار $S(f,P)$ تغییر نکرده همواره همان مقدار ثابت فوق خواهد بود. پس می‌توانیم بگوییم

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P)=k(b-a)$$

به این ترتیب، طبق تعریف، تابع فوق بر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b f=\int_a^b k\,dx=k(b-a)$.

باید توجه داشت که بر خلاف مثال ساده فوق، بررسی انتگرال‌پذیری یک تابع دلخواه با استفاده از تعریف در حالت کلی کاری بسیار دشوار و حتی در برخی موارد غیر عملی است. قضیه زیر، که آن را بدون اثبات می‌پذیریم، دسته‌ای از توابع انتگرال‌پذیر را مشخص می‌کند. ولی قبل از بیان آن ابتدا نوع خاصی از ناپیوستگی توابع را مورد توجه قرار می‌دهیم.
فرض کنیم تابع f در یک همسایگی از نقطه x_0 تعریف شده باشد. در این صورت f را در این نقطه دارای ناپیوستگی جهشی نامیم هرگاه حدود یک‌طرفه $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ هر دو وجود داشته باشند ولی مساوی نباشند. در این حالت $f(x_0)$ نیز هر مقداری می‌تواند داشته باشد.



قضیه

فرض کنیم تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ در حداکثر تعداد متناهی نقطه از بازه $[a,b]$ ناپیوستگی از نوع جهش داشته، در سایر نقاط این بازه پیوسته باشد. . در این صورت f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. به طور خاص، هر تابع پیوسته بر بازه $[a,b]$ بر این بازه انتگرال‌پذیر است.

پس به طور مثال هر یک از توابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 - 2x$، $f(x) = x - \sin x$ یا $f(x) = x[x]$ بر هر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر هستند. در اینجا این سئوال مطرح می‌شود که چگونه می‌توانیم مقدار انتگرال این توابع را بر بازه مفروض محاسبه کنیم. مقدار انتگرال معین برخی توابع را می‌توانیم بر اساس تذکر زیر محاسبه کنیم.

تذکر. اگر f بر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه برای محاسبه $\int_a^b f$ می‌توانیم $\lim\limits_{\|P\|\to 0} S(f,P)$ را برای رده خاصی از افرازها (مثلا افرازهای منظم)، یا با انتخاب نقاط خاصی به عتوان نقاط $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ محاسبه کنیم.

مثال. تابع $f(x) = x$ تابعی پیوسته و در نتیجه بر هر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. اکنون برای افراز دلخواه $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ از بازه $[a,b]$، اگر برای هر $i = 1, \ldots, n$، $c_i := \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$ آنگاه c_i نقطه‌ای در بازه $[x_{i-1}, x_i]$ بوده، خواهیم داشت

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

در نتیجه برای این تابع

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} S(f,P) = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

مثال. مطلوب است محاسبه $\int_a^b x^2\,dx$.

توجه می‌کنیم تابع $f(x) = x^2$ تابعی پیوسته و در نتیجه بر هر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. در نتیجه برای محاسبه مقدار

$\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P)$ می‌توانیم از رده خاص افرازهای منظم استفاده کرده، انتخاب نقاط $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ را نیز به نحو خاص انجام دهیم. پس فرض کنیم $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ افرازی منظم از بازه $[a,b]$ باشد. بنابر آنچه قبلا اشاره کردیم، در این حالت $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = \Delta x = \frac{b-a}{n}$. همچنین به سادگی مشاهده می‌شود برای هر $i = 1, \dots, n$، $x_i = a + i\Delta x = a + i\frac{b-a}{n}$. اگر نقطه c_i در بازه $[x_{i-1}, x_i]$ را نیز برابر x_i انتخاب کنیم آنگاه

$$\begin{aligned} S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (a + i\frac{b-a}{n})^2 \frac{b-a}{n} \\ &= (\frac{b-a}{n}) \sum_{i=1}^{n} \Big(a^2 + 2a\frac{b-a}{n} i + (\frac{b-a}{n})^2 i^2\Big) \\ &= (\frac{b-a}{n}) \Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} a^2\Big) + \Big((2a\frac{b-a}{n}) \sum_{i=1}^{n} i\Big) + \Big((\frac{b-a}{n})^2 \sum_{i=1} n i^2\Big)\Big] \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از روابط

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

که به سادگی با استفاده از استقرای ریاضی قابل اثبات هستند، خواهیم داشت

$$S(f,P) = (\frac{b-a}{n})\Big(na^2 + 2a\frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2} + (\frac{b-a}{n})^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Big)$$

از طرف دیگر، برای افرازهای منظم، $\|P\| \to 0$ اگر و تنها اگر $n \to \infty$. در نتیجه

$$\int_a^b x^2\, dx = \lim_{\|P\|\to 0} S(f,P) = \lim_{n\to\infty} S(f,P) = a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

توجه می‌کنیم که روش فوق در محاسبه انتگرال معین، بسیار محدود بوده، قابل گسترش به حداکثر توابعی به فرم $f(x) = x^n$ است. همانگونه که مشاهده خواهیم کرد، محاسبه انتگرال معین، در حالت کلی، به کمک قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام می‌گیرد. ولی قبل از بیان این قضیه، نخست چند خاصیت مهم از انتگرال معین را مورد توجه قرار می‌دهیم.

خاصیت‌های انتگرال معین.

خاصیت اول. اگر f و g بر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند آنگاه توابع $f+g$ و λf (برای ثابت $\lambda \in \mathbb{R}$) نیز بر این بازه

انتگرال‌پذیر هستند و
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{و} \quad \int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$$

خاصیت دوم. اگر f و g بر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند و برای هر x در این بازه، $f(x) \leq g(x)$ آنگاه $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
دو خاصیت فوق به سادگی با استفاده از تعریف انتگرال معین قابل اثبات هستند.

مثال. مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_۱^۲ (x^۲ - ۲x)\,dx$.
بنابر آنچه در مثال‌های قبل مشاهده کردیم

$$\int_۱^۲ x\,dx = \frac{۲^۲ - ۱^۲}{۲} = \frac{۳}{۲} \qquad \text{و} \qquad \int_۱^۲ x^۲\,dx = \frac{۲^۳ - ۱^۳}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

در نتیجه بنابر خاصیت (الف)،

$$\int_۱^۲ (x^۲ - ۲x)\,dx = \int_۱^۲ x^۲\,dx - ۲\int_۱^۲ x\,dx = \frac{۷}{۳} - ۲\frac{۳}{۲} = -\frac{۲}{۳}$$

مثال. نشان دهید $۳ \leq \int_۱^۴ \sqrt{x}\,dx \leq ۶$.
به سادگی مشاهده می‌شود

$$\forall x \in [۱,۴] \qquad ۱ \leq \sqrt{x} \leq ۲$$

در نتیجه اگر $g,h : [۱,۴] \to \mathbb{R}$ توابع ثابت $g(x) = ۱$ و $h(x) = ۲$ باشند آنگاه

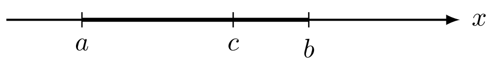
$$\forall x \in [۱,۴] \qquad g(x) \leq \sqrt{x} \leq h(x)$$

در نتیجه بنابر خاصیت (ب) در بالا، و با توجه به مقدار انتگرال معین تابع ثابت که قبلا مشاهده کرده‌ایم،

$$۳ = ۱(۴-۱) = \int_۱^۴ g(x)\,dx \leq \int_۱^۴ \sqrt{x}\,dx \leq \int_۱^۴ h(x)\,dx = ۲(۴-۱) = ۶$$

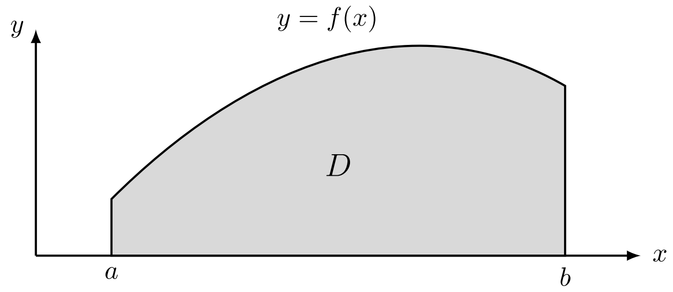
خاصیت مهم دیگر انتگرال معین به صورت زیر بیان می‌شود. اثبات دقیق این خاصیت نیازمند چند نکته ظریف است که در سطح این درس نبوده، از ارائه آن در اینجا صرف‌نظر می‌شود.

خاصیت سوم. اگر $c \in (a,b)$ آنگاه f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر بر هر یک از بازه‌های $[a,c]$ و $[c,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و در این صورت $\int_c^b f + \int_a^c f = \int_a^b f$.



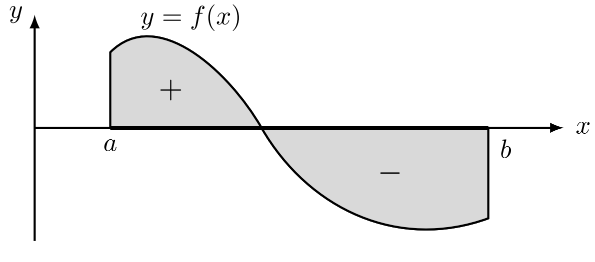
تعبیر هندسی انتگرال معین.

در ابتدای این فصل مشاهده کردیم اگر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نامنفی بر بازه $[a,b]$ باشد آنگاه مساحت ناحیه محصور بین منحنی نمایش f، محور x و خطوط $x=a$ و $x=b$ در صفحه قابل تقریب با عبارتی به فرم $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ خواهد بود که در آن مجموعه نقاط $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ افرازی از بازه $[a,b]$ بوده، برای هر $i = 1, \ldots, n$، c_i نقطه‌ای دلخواه در زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ است. همچنین اشاره کردیم مساحت ناحیه مزبور زمانی به طور دقیق حاصل می‌شود که نرم افراز فوق کوچک و کوچکتر شده به سمت صفر میل نماید. به این ترتیب، بر اساس تعریف انتگرال معین، در این حالت



$$\int_a^b f(x)\,dx = D \text{ مساحت ناحیه}$$

در حالتی که تابع f بر بازه $[a,b]$ در شرط $f(x) \leq 0$، برای هر $x \in [a,b]$ صدق نماید آنگاه بنابر خاصیت‌های انتگرال معین مقدار $\int_a^b f$ عددی منفی بوده به سادگی مشاهده می‌شود در این حالت مقدار آن برابر منفی مساحت ناحیه تشکیل شده بین نمودار تابع f (که در زیر محور x قرار دارد)، محور x و همان خطوط $x=a$ و $x=b$ است. نهایتا در حالتی که تابع f بر بازه $[a,b]$ تغییر علامت دهد، مقدار $\int_a^b f$ برابر مساحت نواحی بالای محور x منهای مساحت نواحی زیر محور x خواهد بود.

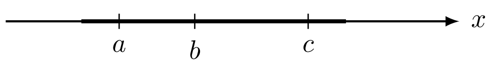


به این ترتیب در این حالت امکان دارد $\int_a^b f = 0$ که در آن صورت مقدار صفر بدین معنا است که نواحی بالای محور x و زیر این محور مساحت‌های مساوی داشته، تفاضل آنها برابر صفر شده است.

قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال.

در این بخش با روش اصولی محاسبه انتگرال معین توابع آشنا می‌شویم. همانطور که مشاهده خواهیم کرد، قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال روشی برای محاسبه مقدار انتگرال معین بر اساس تابع اولیه در اختیار ما می‌گذارند. اما قبل از آن، یک تذکر در مورد خاصیت سوم انتگرال معین که در بخش قبل مشاهده کردیم را مشاهده می‌کنیم.

تذکر. در تعریف انتگرال $\int_a^b f$ به طور طبیعی $a < b$. در حالتی که $a > b$ قرار می‌دهیم $\int_a^b f := -\int_b^a f$. همچنین در حالتی که $a = b$ مقدار انتگرال را برابر صفر تعریف می‌کنیم. با این قرار داد، اگر f بر بازه‌ای حاوی سه عدد a، b و c تابعی پیوسته (یا انتگرال‌پذیر) باشد آنگاه مستقل از ترتیب این سه عدد، رابطه $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ برقرار خواهد بود. به طور مثال فرض کنیم $a < b < c$. در این صورت بنابر خاصیت سوم انتگرال معین،



$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

از طرف دیگر، بنابر قرار داد فوق، $\int_c^b f = -\int_b^c f$. به این ترتیب

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

سایر حالت‌های نسبی سه عدد a، b و c به نحو مشابه تحقیق می‌شوند.

برای اثبات قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال نیازمند خاصیت زیر برای انتگرال توابع پیوسته هستیم.

قضیه مقدار میانگین برای انتگرال.

فرض کنیم f بر $[a,b]$ تابعی پیوسته باشد. در این صورن $c\in[a,b]$ وجود دارد که $\int_a^b f = f(c)(b-a)$.

اثبات. چون تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته است، بنابر قضیه اکسترممهای مطلق، نقاط $p,q\in[a,b]$ وجود دارند که

$$\forall x\in[a,b] \qquad f(p)\le f(x)\le f(q)$$

در نتیجه بنابر خاصیت دوم انتگرال معین

$$f(p)(b-a)=\int_a^b f(p)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(q)\,dx = f(q)(b-a)$$

با تقسیم طرفین این رابطه به عدد $b-a$، خواهیم داشت

$$f(p)\le k := \frac{۱}{b-a}\int_a^b f \le f(q)$$

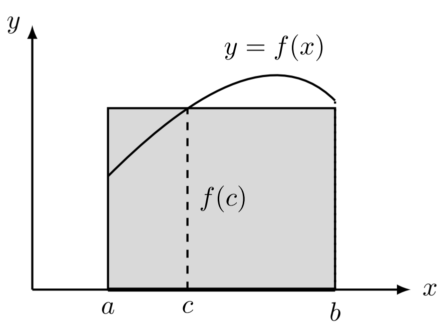
به این ترتیب، بنابر قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته که در فصل اول درس با آن آشنا شدیم، عدد c بین نقاط p و q وجود دارد که مقدار $f(c)$ برابر k باشد. پس

$$\exists c\in[a,b] \qquad f(c)=k=\frac{۱}{b-a}\int_a^b f$$

که همان رابطه خواسته شده است. ■

قضیه فوق از نظر هندسی تعبیری به صورت زیر دارد. اگر تابع پیوسته f بر بازه $[a,b]$ نامنفی باشد آنگاه نقطهای چون c در بازه $[a,b]$ وجود دارد به گونهای که مساحت زیر نمودار f بین خطوط $x=a$ و $x=b$ برابر مساحت مستطیل بنا شده بر پارهخط $[a,b]$ با ارتفاع $f(c)$ باشد

.



تذکر. همانطور که قبلا مشاهده کرده‌ایم $\int_a^b f(x)\,dx$ یک عدد حقیقی است. متغیر x در نماد فوق تاکید بر این امر است که f تابعی بر حسب متغیر x بوده، این متغیر در بازه $[a,b]$ تغییر می‌کند. در واقع x در این نماد یک متغیر زائد بوده، نقشی در مقدار انتگرال ندارد. بنابر این می‌توانیم آن را با هر نماد (یا متغیر) دیگر جایگزین کنیم. پس به طور مثال عبارات $\int_a^b f(x)\,dx$، $\int_a^b f(t)\,dt$ یا $\int_a^b f(u)\,du$ همه یک مقدار یعنی $\int_a^b f$ را مشخص می‌کنند.

به طور مثال، قبلا مشاهده کردیم برای هر دو عدد a و b با شرط $a<b$، $\int_a^b x^۲\,dx = \frac{۱}{۳}(a^۳ - b^۳)$. به همین ترتیب

$$\int_a^b t^۲\,dt = \frac{۱}{۳}(a^۳ - b^۳) \qquad \text{و} \qquad \int_a^b u^۲\,du = \frac{۱}{۳}(a^۳ - b^۳)$$

این تغییر نام در متغیر انتگرال معین زمانی ضروری است که متغیر x در نقش دیگری، مانند کران بالا یا پایین انتگرال، ظاهر شود. در این حالت با تغییر x کران انتگرال تغییر کرده مقدار انتگرال در حالت کلی تغییر می‌کند. به عبارت دیگر، در این حالت مقدار انتگرال تابعی بر حسب متغیر x خواهد بود. به طور مثال، اگر در مثال‌های فوق به جای ثابت b از متغیر x استفاده کنیم آنگاه

$$\int_a^x t^۲\,dt = \frac{۱}{۳}(x^۳ - a^۳)$$

همانطور که مشاهده می‌شود نتیجه انتگرال معین در این حالت تابعی بر حسب متغیر x می‌باشد.

قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنیم $I \subset \mathbb{R}$ یک بازه و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر این بازه باشد. برای نقطه‌ای چون $a \in I$، اگر $F : I \to \mathbb{R}$ با دستور $F(x) = \int_a^x f$ تعریف شده باشد آنگاه برای هر نقطه درونی $x \in I$، $F'(x) = f(x)$، یعنی F یک تابع اولیه برای f بر I است.

اثبات. فرض کنیم $x_۰ \in I$ نقطه‌ای درونی باشد. در این صورت برای هر $x \in I$ در یک همسایگی محذوف $x_۰$، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $x > x_۰$. در این حالت با استفاده از تذکر ابتدای این بخش،

$$F(x) - F(x_۰) = \int_a^x f - \int_a^{x_۰} f = \left(\int_a^{x_۰} f + \int_{x_۰}^x f\right) - \int_a^{x_۰} f = \int_{x_۰}^x f$$

بنابر قضیه مقدار میانگین برای انتگرال، عدد $c \in [x_۰, x]$ وجود دارد که $\int_{x_۰}^x f = f(c)(x - x_۰)$. در نتیجه

$$\frac{F(x) - F(x_۰)}{x - x_۰} = \frac{\int_{x_۰}^x f}{x - x_۰} = \frac{f(c)(x - x_۰)}{x - x_۰} = f(c)$$

اکنون وقتی $x \to x_\circ^+$، عدد c که بین x و $x_\circ$ است نیز به سمت $x_\circ$ میل کرده، در نتیجه بنابر پیوستگی f، $f(c) \to f(x_\circ)$. پس

$$\lim_{x \to x_\circ^+} \frac{F(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = \lim_{x \to x_\circ^+} f(c) = f(x_\circ)$$

ب) $x < x_\circ$. در این حالت نیز

$$F(x) - F(x_\circ) = \int_a^x f - \int_a^{x_\circ} f = \int_{x_\circ}^x f = -\int_x^{x_\circ} f = -f(c)(x_\circ - x) = f(c)(x - x_\circ)$$

که در آن این بار c عددی در بازه $[x, x_\circ]$ است. مجددا با همان استدلال قبلی

$$\lim_{x \to x_\circ^-} \frac{F(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = \lim_{x \to x_\circ^-} f(c) = f(x_\circ)$$

به این ترتیب تابع F در نقطه دلخواه $x_\circ \in I$ مشتق‌پذیر بوده، $F'(x_\circ) = f(x_\circ)$. ■

مثال. مشتق هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $F(x) = \int_\circ^x \sin(t^۲)\, dt$.

با توجه به پیوستگی تابع $f(t) = \sin(t^۲)$ بر سراسر $\mathbb{R}$، بنابر قضیه اساسی اول

$$F'(x) = \sin(x^۲)$$

ب) $F(x) = \int_۱^{x^۲} \sqrt{۱ + t^۴}\, dt$.

همانطور که مشاهده می‌شود، در اینجا کران بالای انتگرال تابعی بر حسب x است. در واقع اگر قرار دهیم $u(x) = x^۲$ آنگاه

$$F(x) = \int_۱^{u(x)} \sqrt{۱ + t^۴}\, dt$$

بر این اساس، اگر $G(x) := \int_۱^x \sqrt{۱ + t^۴}\, dt$ آنگاه

$$F(x) = \int_۱^{u(x)} \sqrt{۱ + t^۴}\, dt = G(u(x))$$

اکنون با استفاده از دستور مشتق تابع مرکب،

$$F'(x) = G'(u(x))u'(x)$$

با توجه به قضیه اساسی اول، $G'(x) = \sqrt{۱+x^۴}$. در نتیجه

$$F'(x) = \sqrt{۱+u(x)^۴}(۲x) = ۲x\sqrt{۱+x^۸}$$

ج) $F(x) = \int_x^{\frac{۱}{x}} \frac{dt}{۱+t^۶}$.

اگر قرار دهیم $f(t) := \frac{۱}{۱+t^۶}$ آنگاه f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. با انتخاب نقطه‌ای دلخواه، مثلا ۰، در $\mathbb{R}$، و با در نظر گرفتن سه نقطه x، ۰ و $\frac{۱}{x}$، با استفاده از تذکر ابتدای این بخش

$$\int_x^{\frac{۱}{x}} f(t)\,dt = \int_x^{۰} f(t)\,dt + \int_{۰}^{\frac{۱}{x}} f(t)\,dt = -\int_{۰}^{x} f(t)\,dt + \int_{۰}^{\frac{۱}{x}} f(t)\,dt$$

به این ترتیب، اگر $G(x) := \int_{۰}^{x} f(t)\,dt$ آنگاه با قرار دادن $u(x) = \frac{۱}{x}$ خواهیم داشت

$$F(x) = -G(x) + G(u(x))$$

در نتیجه

$$F'(x) = -G'(x) + G'(u(x))u'(x)$$

بنابر قضیه اساسی اول، $G'(x) = f(x) = \frac{۱}{۱+x^۶}$. در نتیجه

$$F'(x) = -\frac{۱}{۱+x^۶} + \frac{۱}{۱+u(x)^۶}u'(x) = -\frac{۱}{۱+x^۶} + \frac{۱}{۱+\frac{۱}{x^۶}}(-\frac{۶}{x^۷})$$

اکنون آماده‌ایم تا قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال که روشی برای محاسبه انتگرال معین در اختیارمان قرار می‌دهد، را بیان کنیم.

قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنیم f بر بازه I تابعی پیوسته بوده، F یک تابع اولیه برای f بر I باشد. در این صورت برای هر $a, b \in I$، $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

اثبات. برای نقطه $a \in I$، اگر $G : I \to \mathbb{R}$ با دستور $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ تعریف شده باشد آنگاه بنابر قضیه اساسی اول، G یک تابع اولیه برای

f بر I خواهد بود. از طرف دیگر بنابر فرض قضیه، F نیز تابع اولیه دیگری برای تابع پیوسته f بر همین بازه I است. بنابر قضیه‌ای که در فصل سوم بخش تابع اولیه ثابت کردیم، ثابتی چون $C \in \mathbb{R}$ وجود دارد که

$$\forall x \in I \qquad G(x) = F(x) + C$$

چون این رابطه برای هر $x \in I$ برقرار است، به خصوص برای $x = a$ نیز برقرار بوده، خواهیم داشت $F(a) + C = G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$. در نتیجه $C = -F(a)$. به این ترتیب

$$\forall x \in I \qquad G(x) = \int_a^x f = F(x) + C = F(x) - F(a)$$

اگر در رابطه فوق به جای x مقدار b را قرار دهیم آنگاه

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

■

بنابر قضیه فوق، برای محاسبه عبارتی چون $\int_a^b f$ کافی است تابع اولیه‌ای برای تابع f پیدا کنیم. در آن صورت محاسبه عبارت فوق، که معنی اولیه آن حد یک حاصل‌جمع ریمان است، به سادگی با استفاده از تابع اولیه نظیر f قابل انجام می‌باشد. قبل از مشاهده چند مثال، دو نکته جزئی زیر را متذکر می‌شویم.

نکته اول اینکه اگر F تابع اولیه‌ای برای f باشد آنگاه مشاهده کردیم که برای ثابت $C \in \mathbb{R}$، تابع $G = F + C$ نیز تابع اولیه‌ای برای f خواهد بود. حال بر اساس قضیه فوق، برای محاسبه انتگرال معین $\int_a^b f$ می‌توانیم از تابع G به جای F استفاده کنیم. در این صورت

$$\int_a^b f = G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

به عبارت دیگر درج مقدار ثابت در تابع اولیه اثری در محاسبه انتگرال معین ندارد. بر این اساس، در محاسبه انتگرال معین $\int_a^b f$ بر اساس قضیه فوق معمولا ساده‌ترین فرم تابع اولیه (بدون ثابت) را در نظر می‌گیریم.

نکته دوم در مورد نمایش عبارت $F(b) - F(a)$ به عنوان مقدار انتگرال معین $\int_a^b f$ است. در عمل عبارت فوق را به صورت $F(x)\Big|_a^b$ نیز نمایش می‌دهیم. پس در صورت داشتن تابع اولیه F برای f، قضیه اساسی دوم به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال. هر یک ار انتگرال‌های معین زیر را حساب کنید.

الف) $\int_{0}^{\pi} (x - \sin x)\, dx$.

اگر قرار دهیم $f(x) := x - \sin x$ در این صورت به سادگی تحقیق می‌شود تابع $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x$ یک تابع اولیه برای f بر $\mathbb{R}$ است. بنابر قضیه فوق،

$$\int_{0}^{\pi} (x - \sin x)\, dx = \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx = F(x)\Big|_{0}^{\pi} = F(\pi) - F(0) = (\frac{\pi^2}{2} + \cos \pi) - (\frac{0^2}{2} + \cos 0) = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

ب) $\int_{1}^{9} \frac{x-1}{\sqrt{x}}\, dx$.

اگر قرار دهیم $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ آنگاه $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$. در این صورت مشاهده می‌شود تابع

$$F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$$

یک تابع اولیه برای f بر بازه $(0, \infty)$ است. در نتیجه

$$\int_{1}^{9} \frac{x-1}{\sqrt{x}}\, dx = F(x)\Big|_{1}^{9} = F(9) - F(1) = (\frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}} - 2 \times 9^{\frac{1}{2}}) - (\frac{2}{3} - 2) = \frac{40}{3}$$

ج) $\int_{2}^{5} |x-3|\, dx$.

اگر $f(x) := |x-3|$ آنگاه f تابعی پیوسته و در نتیجه انتگرال‌پذیر است. بر اساس خاصیت سوم انتگرال معین،

$$\int_{2}^{5} f(x)\, dx = \int_{2}^{3} f(x)\, dx + \int_{3}^{5} f(x)\, dx$$

اکنون در محاسبه عبارات سمت راست رابطه فوق، توجه می‌کنیم در بازه $[2, 3]$، $f(x) = |x-3| = 3 - x$ و در بازه $[3, 5]$، $f(x) = |x-3| = x - 3$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_{2}^{5} |x-3|\, dx &= \int_{2}^{3} (3-x)\, dx + \int_{3}^{5} (x-3)\, dx \\ &= (3x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_{2}^{3} + (\frac{1}{2}x^2 - 3x)\Big|_{3}^{5} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

مثال. مطلوب است محاسبه $\int_{1}^{3} x[x]\, dx$.

توجه می‌کنیم تابع $f(x) = x[x]$ بر بازه $[۱,۳]$ همه جا پیوسته نیست. لذا شرایط قضیه اساسی برای محاسبه انتگرال معین مهیا نیست. ولی در عین حال می‌دانیم این تابع بر این بازه قطعه به قطعه پیوسته و در نتیجه انتگرال‌پذیر است. بر این مبنا، با استفاده از خاصیت سوم انتگرال معین

$$\int_۱^۳ x[x]\,dx = \int_۱^۲ x[x]\,dx + \int_۲^۳ x[x]\,dx$$

توجه می‌کنیم که

$$\forall x \in [۱,۲] \quad f(x) = x[x] = \begin{cases} x & x \in [۱,۲) \\ ۴ & x = ۲ \end{cases} \qquad \text{و} \qquad \forall x \in [۲,۳] \quad f(x) = \begin{cases} ۲x & x \in [۲,۳) \\ ۹ & x = ۳ \end{cases}$$

از آنجا که تغییر مقدار تابع در یک نقطه اثری در انتگرال‌پذیری تابع و مقدار انتگرال ندارد، می‌توانیم در محاسبه $\int_۱^۲ f(x)\,dx$ فرض کنیم همه جا در این بازه f از دستور $f(x) = x$ پیروی می‌کند. پس

$$\int_۱^۲ f(x)\,dx = \int_۱^۲ x\,dx = \frac{۱}{۲}x^۲\Big|_۱^۲ = \frac{۳}{۲}$$

به همین ترتیب

$$\int_۲^۳ f(x)\,dx = \int_۲^۳ ۲x\,dx = x^۲\Big|_۲^۳ = ۵$$

در نتیجه

$$\int_۱^۳ x[x]\,dx = \int_۱^۲ x[x]\,dx + \int_۲^۳ x[x]\,dx = \frac{۳}{۲} + ۵ = \frac{۱۳}{۲}$$

مثال. با تبدیل هر یک از حدود زیر به یک انتگرال معین مقدار آن‌ها را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\sum\limits_{i=۱}^{n}(\frac{i}{n})^۴$.

با توجه به صورت مسئله، سعی می‌کنیم عبارت فوق را با انتخاب تابعی مناسب چون f بر بازه‌ای چون $[a,b]$ به صورت $\lim\limits_{\|P\|\to ۰}\sum\limits_{i=۱}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ بیان کنیم. با توجه به ساختار عبارت $\frac{۱}{n}\sum\limits_{i=۱}^{n}(\frac{i}{n})^۴$، اگر تابع $f : [۰,۱] \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^۴$ و افراز منظم $P = \{x_۰, x_۱, \ldots, x_n\}$ از بازه $[۰,۱]$ را در نظر بگیریم آنگاه با انتخاب نقاط $c_i = x_i \in [x_{i-۱}, x_i]$، خواهیم داشت

$$\Delta x = \frac{۱-۰}{n} = \frac{۱}{n} \qquad \text{و} \qquad x_i = ۰ + i\Delta x = \frac{i}{n}$$

در نتیجه

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^4\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^4$$

با توجه به اینکه برای افراز منظم فوق، $\|P\|\to 0$ اگر و تنها اگر $n\to\infty$، داریم

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^4 &= \lim_{\|P\|\to 0} S(f,P)\\ &= \int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x^4\,dx\\ &= \frac{1}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+i}}$.

مانند مثال قبل، با انتخاب تابع مناسبی چون f بر بازه‌ای مانند $[a,b]$، عبارت فوق را در قالب $\lim\limits_{\|P\|\to 0} S(f,P)$ قرار می‌دهیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+i}}=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{n}}}\frac{1}{n}$$

اگر f تابع با دستور $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ بر بازه $[0,1]$ باشد آنگاه با انتخاب افراز منظم $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ از این بازه و انتخاب $c_i=x_i\in[x_{i-1},x_i]$، با محاسباتی مانند مثال قبل، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+i}} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\Delta x_i\\ &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i=\int_0^1 f(x)\,dx\\ &= \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx\end{aligned}$$

به سادگی (با مشتق‌گیری) مشاهده می‌شود $F(x)=2\sqrt{1+x}$ تابع اولیه‌ای برای $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ بر بازه $(-1,\infty)$ است. در نتیجه مقدار حد خواسته شده برابر خواهد بود با

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx=F(x)\Big|_0^1=F(1)-F(0)=2(\sqrt{2}-1)$$

انتگرال نامعین.
بنابر قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال، برای محاسبه عبارت $\int_a^b f$ کافی است تابعی چون F به عنوان یک تابع اولیه برای f تعیین کنیم. بر این اساس، ساختار کلی تابع اولیه f را با نماد $\int f(x)\,dx$ نمایش داده، در مقابل انتگرال معین، آن را انتگرال نامعین تابع f نیز می‌نامیم. پس اگر F یک تابع اولیه برای f باشد آنگاه

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، بر خلاف انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ که مقدار آن یک عدد است، انتگرال نامعین $\int f(x)\,dx$ تابعی بر حسب x را نشان می‌دهد و این تابع، همانطور که اشاره شد، فرم کلی تابع اولیه f است. پس

$$\frac{d}{dx}\Big(\int f(x)\,dx\Big) = f(x)$$

بر اساس آنچه تاکنون در فصل دوم در محاسبه مشتق توابع دیده‌ایم، انتگرال‌های نامعین زیر را خواهیم داشت. برای عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$،

$$\int x^n\,dx = \frac{۱}{n+۱}x^{n+۱} + C$$

در حالت کلی، اگر r عددی گویا غیر از -۱ باشد آنگاه به نحو مشابه

$$\int x^r\,dx = \frac{۱}{r+۱}x^{r+۱} + C$$

با توجه به روابط $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ و $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$، روابط زیر را خواهیم داشت

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \text{و} \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

می‌توانیم روابط فوق را کمی کلی‌تر نیز بیان کنیم. اگر $a \neq ۰$ عددی ثابت باشد آنگاه

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{۱}{a}\sin(ax) + C \qquad \text{و} \qquad \int \sin(ax)\,dx = -\frac{۱}{a}\cos(ax) + C$$

بدیهی است که اطلاعات فوق برای محاسبه دسته کوچکی از انتگرال‌های معین کارآیی دارد. بنابر این سعی خواهیم داشت حیطه اطلاعات‌مان در مورد انتگرال نامعین، یا همان تابع اولیه، را گسترش دهیم. یکی از روش‌های موثر در این راستا روشی موسوم

به تغییر متغر است. فرض کنیم F تابع اولیه‌ای برای f باشد. اگر g تابعی مشتق‌پذیر بوده، تابع مرکب $f(g(x))$ قابل تشکیل باشد آنگاه با توجه به رابطه $(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ خواهیم داشت

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

برای به خاطر سپردن این فرمول، با معرفی متغیر $u = g(x)$ و استفاده از نماد لایب‌نیتز، یعنی $\frac{du}{dx} = g'(x)$ و از آنجا استفاده از نماد دیفرانسیلی، رابطه فوق به صورت $du = g'(x)dx$ قابل بیان خواهد بود. در نتیجه با جایگذاری (صوری) این روابط در انتگرال نامعین، خواهیم داشت

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

فرمول فوق به تغییر متغیر در انتگرال نامعین معروف است.

مثال هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int x^۲ \cos(x^۳ + ۱)\,dx$.

اگر متغیر جدید u به صورت $u = x^۳ + ۱$ معرفی شود آنگاه $du = ۳x^۲\,dx$ و از آنجا $x^۲\,dx = \frac{۱}{۳}\,du$. در نتیجه با این تغییر متغیر

$$\int x^۲ \cos(x^۳ + ۱)\,dx = \int \frac{۱}{۳} \cos u\,du = \frac{۱}{۳} \sin u + C = \frac{۱}{۳} \sin(x^۳ + ۱) + C$$

ب) $\int \frac{x}{\sqrt{۱ - ۴x^۲}}\,dx$.

با معرفی متغیر جدید u به صورت $u = ۱ - ۴x^۲$ خواهیم داشت $du = -۸x\,dx$ و در نتیجه $x\,dx = -\frac{۱}{۸}\,du$. به این ترتیب

$$\int \frac{x}{\sqrt{۱ - ۴x^۲}}\,dx = \int \frac{۱}{\sqrt{۱ - ۴x^۲}} x\,dx = \int \frac{۱}{\sqrt{u}}(-\frac{۱}{۸}\,du) = -\frac{۱}{۴}\sqrt{u} + C = -\frac{۱}{۴}\sqrt{۱ - ۴x^۲} + C$$

ج) $\int_۰^۲ x^۳ \sqrt{۱ + x^۲}dx$.

ابتدا انتگرال نامعین $\int x^۳ \sqrt{۱ + x^۲}\,dx$ را حساب می‌کنیم. با تغییر متغیر $u = ۱ + x^۲$ خواهیم داشت $x^۲ = u - ۱$ و در نتیجه $۲x\,dx = du$. در نتیجه

$$\int x^۳ \sqrt{۱ + x^۲}\,dx \quad = \quad \int x^۲ \sqrt{۱ + x^۲} x\,dx = \int (u - ۱)\sqrt{u}\frac{۱}{۲}du$$

$$\begin{aligned} &= \frac{۱}{۲}\int (u^{\frac{۳}{۲}} - u^{\frac{۱}{۲}})\, du = \frac{۱}{۲}(\frac{۲}{۵}u^{\frac{۵}{۲}} - \frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}) + C \\ &= \frac{۱}{۵}(۱+x^{۲})^{\frac{۵}{۲}} - \frac{۱}{۳}(۱+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}} + C \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $F(x) := \frac{۱}{۵}(۱+x^{۲})^{\frac{۵}{۲}} - \frac{۱}{۳}(۱+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}$ آنگاه بنابر قضیه اساسی

$$\int_{۰}^{۲} x^{۳}\sqrt{۱+x^{۲}}\, dx = F(x)\Big|_{۰}^{۲} = F(۲) - F(۰)$$

محاسبه عبارت آخر به خواننده واگذار می‌شود.

روش تغییر متغیر را می‌توانیم مستقیما در انتگرال معین نیز استفاده کنیم. فرض کنیم g' تابعی پیوسته بر $[a,b]$ بوده، f بر بازه‌ای حاوی برد g پیوسته باشد. همچنین فرض کنیم F تابع اولیه‌ای برای f است. در این صورت

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$$

مثال. مطلوب است محاسبه انتگرال معین $\int_{۰}^{۱} \frac{x}{(۱+x^{۲})^{۲}}dx$.
اگر از تغییر متغیر $u = g(x) = ۱ + x^{۲}$ استفاده کنیم آنگاه $du = ۲x\, dx$ و از آنجا $x\, dx = \frac{۱}{۲}du$. همچنین توجه می‌کنیم در کران پایین انتگرال اصلی، وقتی $x = ۰$ مقدار u برابر $g(۰) = ۱$ و در کران بالا، وقتی $x = ۱$ آنگاه مقدار u برابر $g(۱) = ۲$ خواهد بود. در نتیجه، تحت این تغییر متغیر

$$\int_{۰}^{۱} \frac{x}{(۱+x^{۲})^{۲}}\, dx = \int_{۱}^{۲} \frac{۱}{u^{۲}}\frac{۱}{۲}\, du = \frac{۱}{۲}\int_{۱}^{۲} u^{-۲}\, du = -\frac{۱}{۲}u^{-۱}\Big|_{۱}^{۲} = \frac{۱}{۴}$$

مثال. فرض کنید f تابعی پیوسته بوده، $\int_{۰}^{۹} f(x)\ dx = ۴$. مطلوب است محاسبه $\int_{۰}^{۳} xf(x^{۲})\ dx$.
با استفاده از تغییر متغیر $u = x^{۲}$ داریم $x\, dx = \frac{۱}{۲}\, du$. همچنین تحت این تغییر متغیر، وقتی $x = ۰$ مقدار u برابر ۰، و وقتی $x = ۳$ مقدار u برابر ۹ خواهد بود. پس

$$\int_{۰}^{۳} xf(x^{۲})\, dx = \int_{۰}^{۹} f(u)\frac{۱}{۲}\, du = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۹} f(u)\, du$$

طبق فرض مسئله، $\int_{\circ}^{۹} f(x)\,dx = ۴$ ،$\int_{\circ}^{۹} f(u)\,du = \int_{\circ}^{۹} f(x)\,dx = ۴$. در نتیجه مقدار مطلوب برابر $\frac{۱}{۲} \times ۴ = ۲$ خواهد بود.

مثال. فرض کنید f تابعی پیوسته باشد. نشان دهید $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} f(\cos x)\,dx = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} f(\sin x)\,dx$.

با استفاده از تغییر متغیر $u = \frac{\pi}{۲} - x$ خواهیم داشت $dx = -du$. به این ترتیب، تحت این تغییر متغیر، با تغییر مناسب کران‌های انتگرال، خواهیم داشت

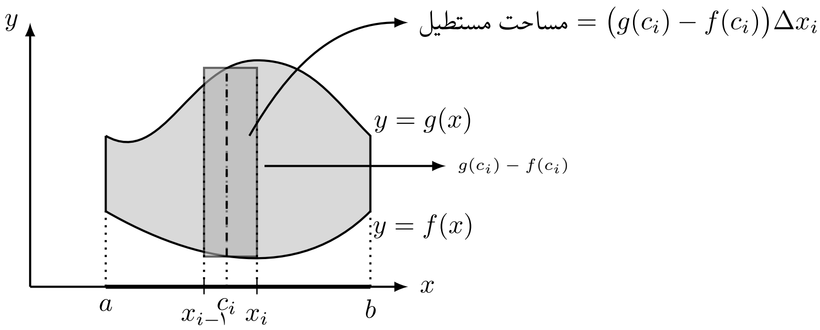
$$\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} f(\sin x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\circ} f(\,\sin(\frac{\pi}{۲} - u))(-du) = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} f(\,\sin(\frac{\pi}{۲} - u))\,du = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} f(\cos u)\,du$$

همانطور که قبلا اشاره گردید، در انتگرال معین نام متغیر انتگرال اثری در مقدار انتگرال نداشتته، می‌توانیم از هر متغیر دیگری به جای آن نیز استفاده کنیم. بر این مبنا، اگر در انتگرال آخر متغیر u را به x تبدیل کنیم نتیجه مطلوب مسئله حاصل می‌شود.

برخی کاربردهای هندسی انتگرال معین.

در این بخش دو کاربرد هندسی انتگرال معین را مشاهده می‌کنیم. اولین کاربرد، تعیین مساحت ناحیه بین نمودار دو تابع پیوسته در صفحه است.

فرض کنیم f و g دو تابع پیوسته بر $[a,b]$ بوده، برای هر x در این بازه، $f(x) \leq g(x)$. اگر A مساحت ناحیه بین منحنی‌های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در ناحیه $a \leq x \leq b$ باشد آنگاه برای افراز $P = \{x_{\circ}, x_{۱}, \ldots, x_n\}$ از بازه $[a,b]$ و نقاط اختیاری $c_i \in [x_{i-۱}, x_i]$، مقدار $\sum_{i=۱}^{n} (g(c_i) - f(c_i))\Delta x_i$ تقریبی از A است.



روشن است که این تقریب دقیق‌تر خواهد بود اگر $\|P\|$ کوچک و کوچکتر شود. به این ترتیب در حالت حدی

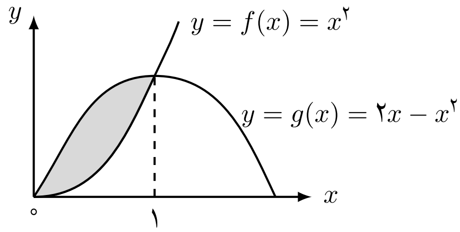
$$A = \lim_{\|P\| \to \circ} \sum_{i=۱}^{n} (g(c_i) - f(c_i))\Delta x_i = \lim_{\|P\| \to \circ} S(g - f, P) = \int_a^b (g - f)$$

در بالا فرض کردیم همه جا بر $[a,b]$ نمودار تابع g بالاتر از نمودار تابع f باشد. در حالت کلی، اگر توابع f و g بر بازه $[a,b]$

پیوسته باشند آنگاه مساحت ناحیه بین دو منحنی در این بازه برابر $\int_a^b |f-g|$ خواهد بود

. **مثال.** مساحت هر یک از نواحی زیر را به دست آورید.

الف) ناحیه محصور بین سهمی‌های $y=x^۲$ و $y=۲x-x^۲$.



ابتدا طول نقاط برخورد دو سهمی را تعیین می‌کنیم. در نقاط برخورد دو سهمی، مقادیر x و y در معادله‌های دو منحنی با یکدیگر برابر خواهند بود. در نتیجه

$$x^۲ = y = ۲x - x^۲$$

که از آن مقادیر $x=۰$ و $x=۱$ حاصل می‌شود. در عین حال توجه می‌کنیم

$$\forall x \in [۰,۱] \qquad f(x)=x^۲ \leq ۲x-x^۲ = g(x)$$

در نتیجه، مساحت مورد نظر برابر است با

$$\int_۰^۱ (g(x)-f(x))dx = \int_۰^۱ (۲x-۲x^۲)\, dx = x^۲ - \frac{۲}{۳}x^۳\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۳}$$

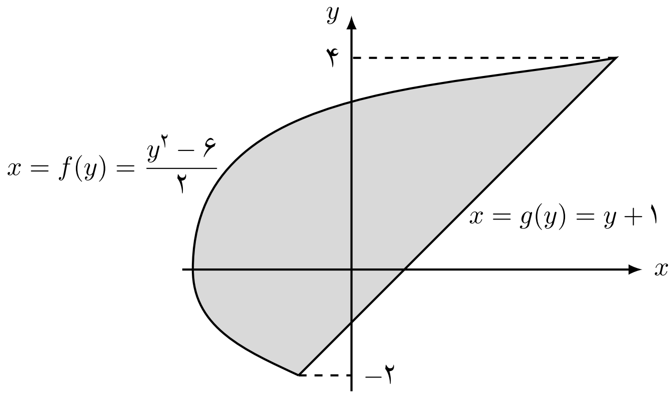
ب) ناحیه محصور بین سهمی $y^۲ = ۲x+۶$ و خط $y=x-۱$.

با توجه به معادله سهمی و خط راست داده شده، در این حالت راحت‌تر خواهیم بود اگر نمودار دو تابع را با معادلاتی به صورت $x=g(y)$ و $x=f(y)$ در نظر بگیریم. در واقع، در اینجا نقش متغیرهای x و y را عوض کرده‌ایم. پس ابتدا عرض نقاط برخورد را به دست می‌آوریم. در نقاط برخورد

$$y+۱ = x = \frac{y^۲-۶}{۲}$$

و از آنجا $y^۲-۲y-۸=۰$ که از آن دو جواب $y=-۲$ و $y=۴$ حاصل می‌شود. توجه می‌کنیم که

$$\forall y \in [-۲,۴] \qquad f(y) = \frac{y^۲-۶}{۲} \leq y+۱ = g(y)$$

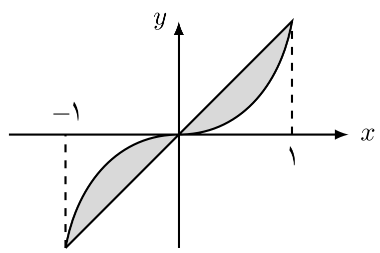


به این ترتیب مساحت مطلوب به صورت زیر به دست می‌آید.

$$A = \int_{-۲}^{۴} (g(y) - f(y))\, dy = \int_{-۲}^{۴} (y + ۱ - \frac{y^۲ - ۶}{۲})\, dy = (\frac{۱}{۲}y^۲ + ۴y - \frac{۱}{۶}y^۳)\Big|_{-۲}^{۴}$$

محاسبه مقدار آخر به عهده خواننده است.

ج) ناحیه محصور بین خط $y = x$ و منحنی $y = x^۳$.



به سادگی مشاهده می‌شود برخورد منحنی $y = x^۳$ با خط $y = x$ در سه نقطه نظیر $x = -۱$، $x = ۰$ و $x = ۱$ رخ می‌دهد. به این ترتیب، اگر $f(x) = x$ و $g(x) = x^۳$ خواهیم داشت

$$A = \int_{-۱}^{۱} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-۱}^{۱} |x - x^۳|\, dx = \int_{-۱}^{۱} |x|(۱ - x^۲)\, dx$$

توجه می‌کنیم چون در بازه $[-۱, ۱]$، $(۱ - x^۲) \geq ۰$،

$$|x - x^۳| = |x(۱ - x^۲)| = |x||۱ - x^۲| = |x|(۱ - x^۲)$$

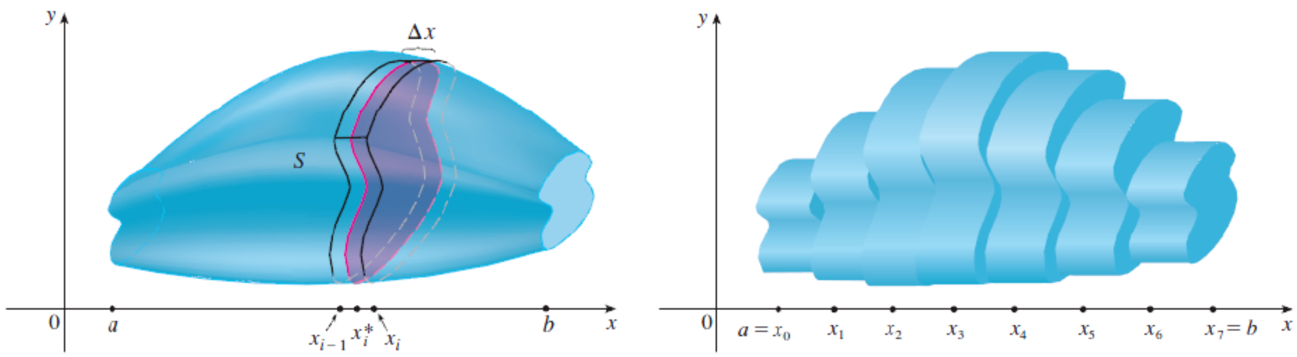
اکنون برای محاسبه انتگرال معین $\int_{-۱}^{۱} |x|(۱ - x^۲)\, dx$ با توجه به تغییر رفتار $|x|$ در $x = ۰$، می‌توانیم به صورت زیر عمل

کنیم.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|x|(1-x^2)\,dx &= \int_{-1}^{0}|x|(1-x^2)\,dx+\int_{0}^{1}|x|(1-x^2)\,dx\\ &= \int_{-1}^{0}(-x)(1-x^2)\,dx+\int_{0}^{1}x(1-x^2)\,dx\\ &= \int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)\,dx\\ &= (\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2)\Big|_{-1}^{0}+(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

کاربرد هندسی بعدی مربوط به تعیین حجم دسته‌ای از نواحی صلب (جامد) در فضا است.

فرض کنیم S ناحیه‌ای صلب (solid) در فضا بوده، برای هر $x \in [a,b]$، $A(x)$ مساحت ناحیه حاصل از برخورد S با صفحه عمود بر محور x در این نقطه باشد.

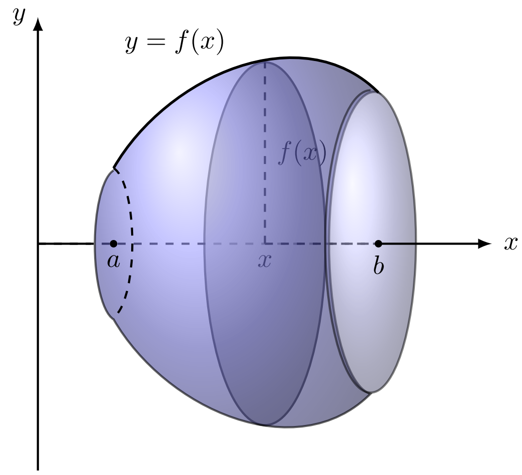


اگر V حجم ناحیه S در ناحیه $a \le x \le b$ از فضا را نشان دهد آنگاه برای افراز $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ از بازه $[a,b]$، و با انتخاب نقاط $x_i^* \in [x_{i-1},x_i]$ به طور دلخواه، عبارت $\sum_{i=1}^{n}A(x_i^*)\Delta x_i$ تقریب مناسبی از V است. می‌توان مشاهده کرد که این تقریب دقیق‌تر خواهد بود اگر $\|P\|$ کوچک و کوچکتر شده به صفر میل نماید. پس

$$V=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}A(x_i^*)\Delta x_i=\lim_{\|P\|\to 0}S(A,P)=\int_a^b A(x)\,dx$$

در حالت خاص، فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نامنفی بوده، S ناحیه محصور بین رویه حاصل از دوران منحنی نمایش f حول محور x، بین $x=a$ و $x=b$ باشد. در این صورت، برای هر $x\in[a,b]$، سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه عمود بر محور x در این نقطه با جسم فوق دایره‌ای به شعاع $f(x)$ بوده، مساحت این سطح مقطع، یعنی $A(x)$ برابر $\pi(f(x))^2$

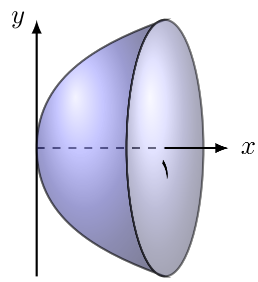
است.



در نتیجه، طبق فرمول فوق، در این حالت

$$V=\int_a^b \pi(f(x))^۲\,dx$$

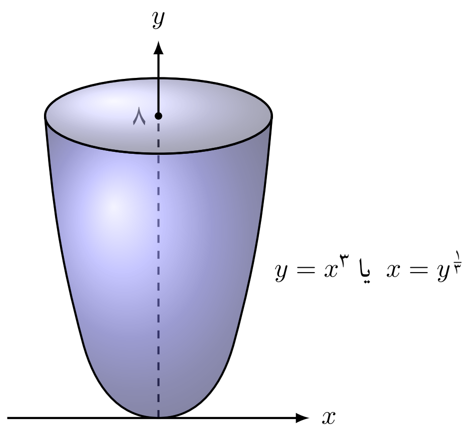
مثال. فرض کنید S ناحیه محصور توسط رویه حاصل از دوران منحنی $y=\sqrt{x}$ حول محور x در محدوده $۰\le x\le ۱$ باشد. مطلوب است محاسبه حجم S.



بنابر آنچه در بالا اشاره گردید، اگر $f(x)=\sqrt{x}$ آنگاه

$$V=\int_۰^۱ \pi(f(x))^۲\,dx=\pi\int_۰^۱ x\,dx=\pi(\frac{۱}{۲}x^۲)\Big|_۰^۱=\frac{\pi}{۲}$$

مثال. مطلوب است محاسبه حجم ناحیه محصور درون رویه حاصل از دوران منحنی $y=x^۳$ حول محور y محدود شده توسط $y=۰$ و $y=۸$.



با دقت در صورت این مثال، مشاهده می‌شود نقش محورهای x و y برای به کارگیری روش فوق عوض شده‌اند. پس اگر $f(y)$ را با دستور $f(y) = y^{\frac{۱}{۳}}$ در نظر بگیریم آنگاه منحنی $x = f(y)$ را به ازای $y \in [۰, ۸]$، حول محور y دوران داده‌ایم. بنابر بحث فوق، مقدار حجم به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$V = \int_{۰}^{۸} \pi (f(y))^{۲}\, dy = \pi \int_{۰}^{۸} y^{\frac{۲}{۳}}\, dy = \frac{\pi}{\frac{۵}{۳}} y^{\frac{۵}{۳}} \Big|_{۰}^{۸} = \frac{۳\pi}{۵} \times ۳۲ = \frac{۹۶\pi}{۵}$$

تمرین‌های فصل چهارم.

۱. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -x - ۱ & -۳ \leq x \leq ۰ \\ -\sqrt{۱ - x^{۲}} & ۰ \leq x \leq ۱ \end{cases}$. با محاسبه‌ی مساحت، حاصل $\int_{-۳}^{۱} f(x)dx$ را بیابید.

۲. فرض کنید که تابع f بر $[a, b]$ پیوسته باشد. نشان دهید که

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

۳. معادله‌ی خط مماس بر منحنی نمایش تابع $F(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{\cos t}{t} dt$ را در $x = \pi$ بیابید.

۴. فرض کنید که f یک تابع پیوسته باشد و $x \sin(\pi x) = \int_{۰}^{x^{۲}} f(t)dt$. در این صورت $f(۴)$ را پیدا کنید.

۵. نشان دهید که برای هر $۰ \leq x \leq ۱$ داریم $\cos(x^{۲}) \geq \cos(x)$ و از آن نتیجه بگیرید که

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۶}} \cos(x^{۲})dx \geq \frac{۱}{۲}.$$

۶. نشان دهید

الف) $1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx \leq 1/25$

ب) $0 \leq \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx \leq 0/1$

۷. فرض کنید که f یک تابع مشتق‌پذیر باشد به طوری که $f(x)$ هیچگاه صفر نشود. همچنین فرض کنید که برای هر x داشته باشیم $\int_0^x f(t)dt = (f(x))^2$. در این صورت ضابطه‌ی تابع f را بیابید.

۸. حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \Big(\int_1^{\sin t} \sqrt{1+u^4}du\Big)dt.$$

۹. فرض کنید که f' در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد. نشان دهید که

$$2\int_a^b f(x)f'(x)dx = (f(b))^2 - (f(a))^2.$$

۱۰. تابع f و ثابت a را به گونه‌ای بیابید که

$$2\int_a^x f(t)dt = 2\sin(x) - 1.$$

۱۱. فرض کنید که تابع f پیوسته و به گونه‌ای باشد که برای هر x داشته باشیم

$$\int_0^x f(t)dt = x\sin(x) + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt$$

در این صورت ضابطه‌ی $f(x)$ را بیابید.

۱۲. حاصل هر یک از حدود زیر را با استفاده از انتگرال‌های معین محاسبه کنید.

الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big((\frac{1}{n})^9+(\frac{2}{n})^9+\ldots+(\frac{n}{n})^9\Big)$

ب) $\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}}\Big)$

۱۳. فرض کنید که تابع f در $[0,1]$ پیوسته باشد. نشان دهید که

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(1-x)dx.$$

۱۴. حاصل هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{2}^{2+h} \sqrt{1+t^3}dt$ 　　 ب) $\lim\limits_{x\to 3} (\frac{x}{x-3}\int_{3}^{x} \frac{\sin t}{t}dt)$

۱۵. فرض کنید که f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. نشان دهید که

$$\int_{a}^{b} f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx.$$

فرمول بالا را از نظر هندسی تحلیل کنید.

۱۶. الف) اگر f یک تابع پیوسته باشد، نشان دهید که $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(x))dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos(x))dx$.

ب) با استفاده از فرمول بالا حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$ و $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx$ را محاسبه کنید.

۱۷. الف) اگر f بر $[0,\pi]$ پیوسته باشد نشان دهید که $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$ (از جایگذاریِ $u = \pi - x$ کمک بگیرید).

ب) با استفاده از عبارت بالا انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

۱۸. فرض کنید f یک تابع پیوسته باشد و $\int_{0}^{2} f(x)dx = 6$. حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin(\theta))\cos\theta d\theta$ را محاسبه کنید.

۱۹. تابع f و عدد a را به گونه‌ای بیابید که برای هر $x > 0$ داشته باشیم $6 + \int_{a}^{x} \frac{f(t)}{t^2} = 2\sqrt{x}$.

۲۰. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$ و $g(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$.

الف) ضابطه‌ای برای تابع g (مشابه تابع f) به دست بیاورید.

ب) هر دو تابع f, g را رسم کنید.

ج) تعیین کنید که هر یک از توابع f, g در چه نقاطی مشتق‌پذیرند.

۲۱. مشتق تابع زیر را محاسبه کنید:

$$g(x) = \int_{۲x}^{۳x} \frac{u^۲ - ۱}{u^۲ + ۱} du$$

۲۲. تابع $Si(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، در مهندسی برق کاربرد فراوان دارد:

$$Si(x) = \int_{۰}^{x} \frac{\sin t}{t} dt$$

دقت کنید که مقدار تابع $\frac{\sin t}{t}$ را در نقطه‌ی ۰ برابر با یک تعریف می‌کنیم تا انتگرال بالا معنی داشته باشد.

الف) نقاط ماکزیمم و مینیمم موضعی این تابع را بیابید.

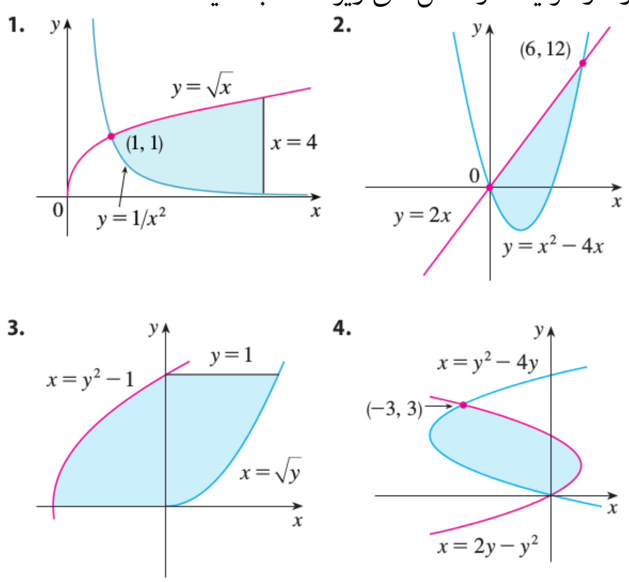
ب) آیا این تابع دارای مجانب افقی است؟

۲۳. اگر $f(x) = \int_{۰}^{\sin x} \sqrt{۱ + t^۲} dt$ و $g(y) = \int_{۳}^{y} f(x)dx$، آنگاه حاصل $g''(\frac{\pi}{۶})$ را بیابید.

۲۴. فرض کنید که تابع f پیوسته و توابع g, h مشتق‌پذیر باشند. یک فرمولی کلی برای محاسبه‌ی مشتق تابع زیر ارائه کنید:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt.$$

۲۵. مساحت قسمت رنگی را در هر یک از شکل‌های زیر محاسبه کنید:

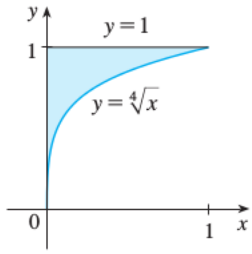


۲۶. در هر یک از حالت‌های زیر، مساحت ناحیه‌ی بین دو منحنی زیر را بیابید:

الف) $y = \frac{x}{۱ + x^۲}$ و $y = \frac{x}{۹ - x^۲}$ برای $x \geq ۰$.

ب) $y = \cos^{۲}(x)\sin(x)$ و $y = \sin(x)$ برای $۰ \leq x \leq \pi$.

۲۷. مساحت مشخص شده در زیر را محاسبه کنید:



۲۸. در هر مورد حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی مشخص شده، حول محور مشخص شده را بیابید.

الف) ناحیه محصور بین خط $y = x + ۱$، $x = ۰$، $x = ۵$ و $y = ۰$، حول محور x.

ب) ناحیه محصور بین خم $y = \frac{۱}{x}$ و خطوط $x = ۱$، $x = ۴$ و $y = ۰$، حول محور x.

ج) ناحیه محصور بین خم $y = \sqrt{x - ۱}$ و خطوط $x = ۱$، $x = ۵$ و $y = ۰$، حول محور x.

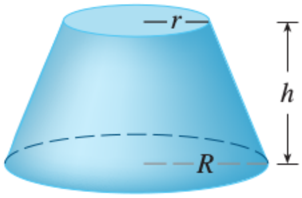
د) ناحیه محصور بین خم $x^{۲} = ۴y$ و خطوط $y = ۰$، $y = ۹$ و $x = ۰$، حول محور y.

ه) ناحیه محصور بین دو خم $x = y^{۲}$ و $x = ۲y$، حول محور y.

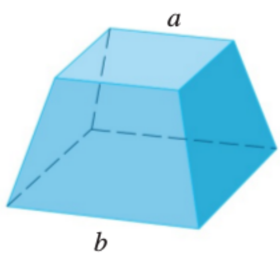
و) ناحیه محصور بین دو خم $y = x^{۲}$ و $x = y^{۲}$، حول خط $y = ۱$.

تمرین‌های تکمیلی.

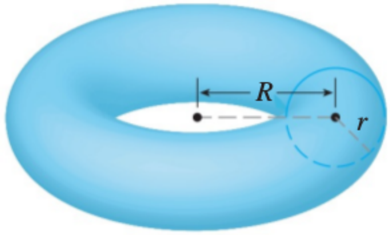
۱. حجم شکل زیر را بیابید



۲. شکل زیر بخشی از یک هرم به ارتفاع h است. حجم آن را محاسبه کنید. در صورتی که $a = ۰$، حجم مورد نظر چقدر است؟



۳. حجم چنبره‌ی زیر را بیابید.

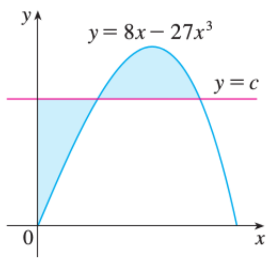


۴. تمام توابع پیوسته‌ی مثبت f را بیابید که مساحت زیر گراف f از ۰ تا $t > 0$ برابر با $A(t) = t^3$ است.

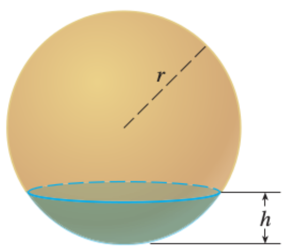
۵. یک جسم از دوران تابع مثبت $y = f(x)$ حول محور x (برای $x \geq 0$) ایجاد شده است. حجم این جسم از $x = 0$ تا $x = b$ برابر با b^2 است (برای هر $b > 0$). تابع f را پیدا کنید.

۶. یک خط گذرنده از مبدأ مختصات وجود دارد که ناحیه‌ی احاطه‌شده توسط سهمی $y = x - x^2$ و محور x را به دو قسمت با مساحتهای مساوی تقسیم می‌کند. شیب این خط را بیابید.

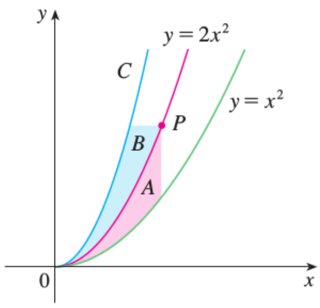
۷. در شکل زیر، عدد c را به گونه‌ای بیابید که مساحتهای رنگ‌شده با هم برابر باشند.



۸. با استفاده از انتگرالگیری نشان دهید که حجم نشان داده شده در شکل با فرمول $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ محاسبه می‌شود.



۹. معادله‌ی منحنی C را به گونه‌ای بیابید که در زیر برای هر نقطه‌ی P مساحتهای A, B برابر باشند.



۱۰. فرض کنید $f(x) = \int_{۰}^{g(x)} \frac{۱}{\sqrt{۱+t^{۳}}}dt$ و $g(x) = \int_{۰}^{\cos(x)} (۱+\sin(t^{۲}))dt$. در این صورت $f'(\frac{\pi}{۲})$ را محاسبه کنید.

۱۱. اگر $f(x) = \int_{۰}^{x} x^{۲}\sin(t^{۲})dt$ آنگاه $f'(x)$ را محاسبه کنید (دقت کنید که داخل انتگرال یک تابع بر حسب x و دیگری بر حسب t است).

۱۲. الف) حاصل $\int_{۰}^{n} [x]dx$ را برای عدد طبیعی n محاسبه کنید.

ب) حاصل $\int_{a}^{b} [x]dx$ را بیابید که در آن a, b اعدادی حقیقی هستند و $۰ \leq a < b$.

۱۳. نشان دهید که تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ ۰ & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ بر $[۰, ۱]$ انتگرال‌پذیر نیست.

۱۴. حداقل مساحت ناحیه‌ی زیر منحنیِ $y = ۴x - x^{۳}$ از $x = a$ تا $x = a + ۱$ در میان تمام a های مثبت چقدر است؟

۱۵. الف) نشان دهید که اگر f یک تابع پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_{۰}^{a} f(x)dx = \int_{۰}^{a} f(a-x)dx$$

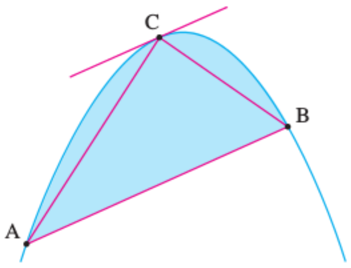
ب) با استفاده از قسمت (الف)، نشان دهید که برای هر عدد طبیعیِ n داریم

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^{n} x}{\sin^{n}(x) + \cos^{n} x} = \frac{\pi}{۴}.$$

۱۶. نشان دهید که اگر f یک تابع پیوسته باشد آنگاه

$$\int_{۰}^{x} f(u)(x-u)du = \int_{۰}^{x} (\int_{۰}^{u} f(t)dt)du.$$

۱۷. در شکل زیر نقاط A, B, C روی یک سهمی قرار دارند و خط مماس بر سهمی در نقطه‌ی C موازی با پاره‌خط AB است. ارشمیدس نشان داده است که در این صورت، مساحت قطاع سهموی $\frac{۴}{۳}$ برابرِ مساحت مثلثِ ABC است. این گفته را برای سهمیِ $y = ۴ - x^۲$ و خط $y = x + ۲$ تحقیق کنید.



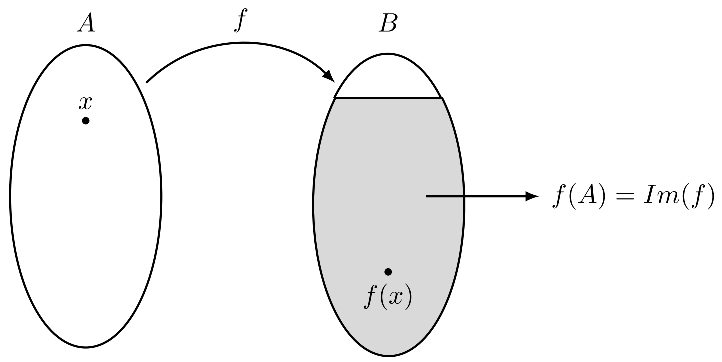
۱۸. نقطه‌ی (a, b) را در نظر بگیرید که در آن $a, b > ۰$. سهمی‌ای را پیدا کنید که دهانه‌اش به سمت پایین است و از نقطه‌ی (a, b) و از مرکز مختصات می‌گذرد و مساحت زیر آن حداقل است.

۱۹. فرض کنید برای هر عدد c مقدار تابع $f_c(x)$ مینیمم دو مقدارِ $(x - c)^۲$ و $(x - c - ۲)^۲$ باشد. اگر تابع g با دستور $g(c) = \int_۰^۱ f_c(x)dx$ تعریف شده باشد مینیمم و ماکزیمم تابع g را بر بازه $[-۲, ۲]$ محاسبه کنید.

فصل پنجم
توابع لگاریتمی و نمایی

هدف اصلی ما در این فصل آشنایی با رده مهمی از توابع تحت نام توابع غیرجبری است. ولی از آنجا که در حین بحث نیاز به مفهوم تابع وارون و خاصیت‌های آن خواهیم داشت، در ابتدای این فصل تابع وارون را یادآوری کرده، برخی خاصیت‌های آن را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.

تابع وارون.
برای بیان مفهوم تابع وارون، به دو مفهوم تابع یک به یک و مجموعه تصویر یک تابع نیاز داریم.
فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. تابع $f : A \to B$ را تابعی یک به یک نامیم هرگاه برای دو نقطه متمایز $x_1, x_2 \in A$، نقاط $f(x_1)$ و $f(x_2)$ در B متمایز باشند. به عبارت معادل، f یک به یک است هرگاه برای $x_1, x_2 \in A$ اگر $f(x_1) = f(x_2)$ آنگاه $x_1 = x_2$. به طور مثال تابع $f(x) = 2x^3$ بر $\mathbb{R}$ تابعی یک به یک است. در مقابل، تابع $f(x) = x^4$ بر $\mathbb{R}$ یک به یک نیست زیرا برای $x_1 = -1$ و $x_2 = 1$ داریم $f(x_1) = f(x_2)$. در حالتی که $A, B \subset \mathbb{R}$، اگر $f : A \to B$ تابعی اکیدا یکنوا باشد آنگاه f یک به یک است. فرض کنیم $f : A \to B$ تابعی مفروض باشد. مجموعه متشکل از تمام مقادیر $f(x)$ که با تغییر x در دامنه تعریف این تابع، یعنی A، به دست می‌آید را مجموعه تصویر f نامیده، آن را با $Im(f)$ یا $f(A)$ نشان می‌دهیم. پس



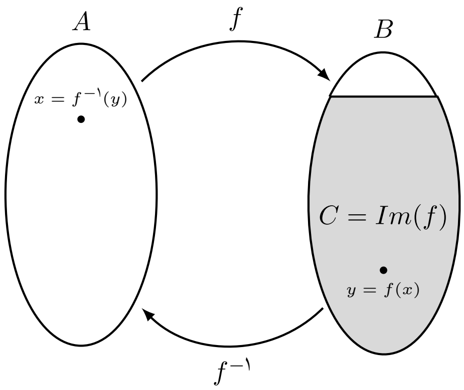
$$Im(f) = f(A) = \{f(x) \in B \mid x \in A\} \subseteq B$$

به طور مثال، اگر $f(x) = x^3 + 1$ و آن را به عنوان تابعی بر $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم در این صورت به سادگی مشاهده می‌شود $Im(f) = \mathbb{R}$. اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع با دستور $f(x) = x^4 + 1$ باشد آنگاه $f(\mathbb{R})$، یا همان $Im(f)$، برابر بازه $[1, \infty)$

خواهد بود. اکنون فرض کنیم $f: A \to B$ تابعی یک به یک بوده، C برابر مجموعه تصویر تابع f باشد. یعنی

$$C = Im(f) = \{f(x); x \in A\}$$

در این صورت با توجه به یک به یک بودن f، برای هر $y \in C$ عضو منحصر به فرد $x \in A$ وجود خواهد داشت که $y = f(x)$. به این ترتیب رابطه $y = f(x)$ ایجاد بستگی بین متغیرهای y و x می‌کند به گونه‌ای که با تغییر y در C، x نیز در A به گونه‌ای تغییر می‌کند که رابطه $y = f(x)$ برقرار بماند. بر این اساس، تغییر x در A تابعی از انتخاب y در C خواهد بود. پس تابع جدیدی از C در A قابل تعریف است. این تابع را تابع وارون f نامیده آن را با نماد f^{-1} نشان می‌دهیم.



در این حالت f را وارون‌پذیر می‌نامیم. پس $f^{-1}: C \to A$ تابعی است با این خاصیت که برای $y \in C$، $x = f^{-1}(y)$ اگر و تنها اگر $y = f(x)$. در نتیجه

$$\forall x \in A, \quad f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{و} \qquad \forall y \in C, \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

خلاصه بحث‌هایی که انجام دادیم در گزاره زیر بیان شده است.

گزاره

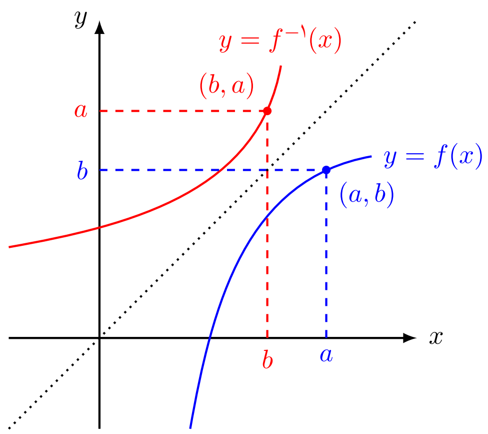
اگر $f: A \to B$ تابعی یک به یک باشد آنگاه این تابع وارون‌پذیر است. در این حالت، دامنه تعریف تابع وارون برابر مجموعه تصویر f خواهد بود، یعنی $D_{f^{-1}} = Im(f)$. به همین ترتیب $Im(f^{-1}) = D_f = A$.

مثال. تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^3 + 2$ تابعی اکیدا صعودی و در نتیجه یک به یک و از آنجا وارون‌پذیر است. با توجه به پیوستگی f و این که $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$، مجموعه تصویر تابع برابر $\mathbb{R}$ است. در نتیجه تابع وارون تابعی با دامنه $Im(f) = \mathbb{R}$ خواهد بود. برای به دست آوردن ضابطه $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کافی

است از معادله $y = f(x) = x^۳ + ۲$ متغیر x را بر حسب y به دست آوریم. به این ترتیب، $x = \sqrt[۳]{y-۲}$ و در نتیجه $f^{-۱}(y) = \sqrt[۳]{y-۲}$. در این حالت، اگر مجددا از x به عنوان متغیر مستقل تابع $f^{-۱}$ استفاده کنیم، آنگاه $f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x-۲}$.

باید توجه کنیم که بر خلاف مثال فوق، در حالت کلی تعیین ضابطه وارون تابعی وارون‌پذیر می‌تواند بسیار دشوار یا حتی غیرعملی باشد. به این ترتیب این سئوال مطرح می‌شود که در صورت وارون‌پذیری یک تابع، چگونه خاصیت‌های تابع وارون را، بدون تعیین ضابطه آن، می‌توانیم بررسی کنیم. قبل از پاسخ به این سئوال، ابتدا دو تذکر زیر را مورد توجه قرار می‌دهیم.

تذکر ۱. فرض کنیم $A, B \subset \mathbb{R}$ و $f : A \to B$ تابعی وارون‌پذیر با وارون $f^{-۱} : B \to A$ باشد (در اینجا فرض کرده‌ایم $Im(f) = B$). اگر $(a,b) \in \mathbb{R}^۲$ نقطه‌ای واقع بر نمودار تابع f باشد آنگاه $b = f(a)$. در نتیجه $a = f^{-۱}(b)$. پس (b,a) نقطه‌ای واقع بر نمودار تابع $f^{-۱}$ است. به این ترتیب اگر نمودار دو تابع در یک دستگاه مختصات ترسیم شوند آنگاه این دو نمودار نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگر خواهند بود.



تذکر ۲. فرض کنیم $I \subset \mathbb{R}$ یک بازه و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته تعریف شده بر این بازه باشد. در این صورت با استفاده از قضیه مقدار میانی می‌توان ثابت کرد مجموعه تصویر f نیز یک بازه در $\mathbb{R}$ خواهد بود.

اکنون آماده‌ایم تا ارتباط بین برخی خاصیت‌های تابع f و تابع وراون آن را بیان کنیم. با اینکه اثبات قضیه زیر در حد دانشجویان این درس است ولی جهت صرفه‌جویی در زمان از ارائه اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم.

قضیه

فرض کنیم $I \subset \mathbb{R}$ یک بازه و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی یک به یک با وارون f^{-1} باشد.

الف) اگر f بر I تابعی اکیدا صعودی (اکیدا نزولی) باشد آنگاه f^{-1} نیز بر دامنه تعریف خود اکیدا صعودی (اکیدا نزولی) است.

ب) اگر f بر I پیوسته باشد و قرار دهیم $J := Im(f)$ آنگاه تابع f^{-1} بر بازه J پیوسته است.

ج) اگر f بر I پیوسته و در نقطه درونی $x_\circ \in I$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(x_\circ) \neq \circ$ آنگاه تابع f^{-1} در نقطه $y_\circ = f(x_\circ) \in J$ (که نقطه‌ای درونی خواهد بود) نیز مشتق‌پذیر بوده،

$$(f^{-1})'(y_\circ) = \frac{۱}{f'(x_\circ)}$$

مثال. نشان دهید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با دستور $f(x) = ۲x + \cos x$ بر $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر بوده، تابع وارون تابعی مشتق‌پذیر است. مطلوب است تعیین $(f^{-1})'(۱)$.

بنابر آنچه در ابتدای این بخش اشاره کردیم، برای اثبات وارون‌پذیری f باید نشان دهیم این تابع بر دامنه تعریف خود یک به یک است. برای این منظور، مشتق f را مورد توجه قرار می‌دهیم.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = ۲ - \sin x$$

با توجه به اینکه مقادیر $\sin x$ همواره بین -۱ و ۱ قرار دارند، عبارت $۲ - \sin x$ مقداری مثبت است. پس f بر $\mathbb{R}$ اکیدا صعودی و در نتیجه یک به یک است. همانطور که اشاره کردیم، برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f'(x) > \circ$ و در نتیجه غیر صفر است. بنابر قضیه فوق، f^{-1} بر دامنه تعریف خود همه جا تابعی مشتق‌پذیر است. نهایتا برای تعیین $(f^{-1})'(۱)$ ابتدا باید تحقیق کنیم مقدار f در چه نقطه‌ای برابر ۱ است. با یک تحقیق ساده مشاهده می‌شود

$$f(\circ) = ۲ \times \circ + \cos(\circ) = ۱$$

به این ترتیب با قرار دادن $x_\circ = \circ$ و $y_\circ = f(x_\circ) = ۱$ در قضیه قبل خواهیم داشت

$$(f^{-1})'(۱) = (f^{-1})'(y_\circ) = \frac{۱}{f'(x_\circ)} = \frac{۱}{f'(\circ)} = \frac{۱}{۲}$$

مثال. نشان دهید تابع f با دستور $f(x) = \int_{۳}^{x} \sqrt{۱+t^{۲}}\, dt$ وارون‌پذیر بوده، تابع وارون مشتق‌پذیر است. مطلوب است تعیین $(f^{-۱})'(۰)$.

مانند مثال قبل، با بررسی تابع مشتق نشان می‌دهیم تابع مورد نظر بر دامنه تعریف تابعی اکیدا یکنوا، در نتیجه یک به یک و از آنجا وارون‌پذیر است. بنابر قضیه اساسی اول

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \sqrt{۱+x^{۲}} > ۰$$

به این ترتیب وارون‌پذیری f ثابت می‌شود. در عین حال مشاهده می‌شود برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f'(x) \neq ۰$. پس $f^{-۱}$ بر دامنه تعریف خود همه جا مشتق‌پذیر است. برای تعیین $(f^{-۱})'(۰)$ ابتدا باید تعیین کنیم چه نقطه‌ای تحت تابع f به ۰ نظیر می‌شود. با توجه به خاصیت‌های انتگرال معین

$$f(۳) = \int_{۳}^{۳} \sqrt{۱+t^{۲}}\, dt = ۰$$

پس اگر قرار دهیم $x_۰ = ۳$ آنگاه $y_۰ = f(x_۰) = ۰$. به این ترتیب، بنابر قضیه قبل

$$(f^{۱})'(۰) = (f^{-۱})'(y_۰) = \frac{۱}{f'(x_۰)} = \frac{۱}{f'(۳)} = \frac{۱}{\sqrt{۱+۳^{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

تابع لگاریتم طبیعی.

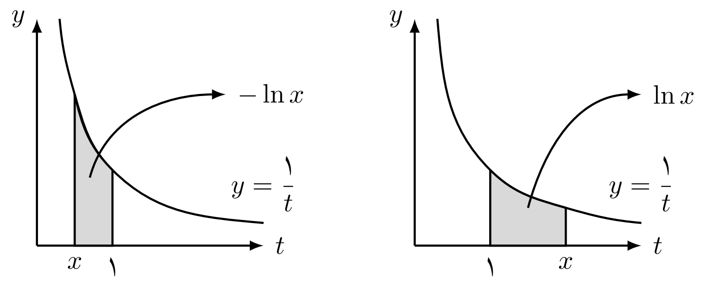
در این بخش با یکی از توابع بسیار مهم ریاضی فیزیک آشنا می‌شویم. قبلا طی مثالی مشاهده کردیم اگر $f : (۰, \infty) \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با $f'(x) = \frac{۱}{x}$ باشد و $f(۱) = ۰$ آنگاه برای هر $a, b \in (۰, \infty)$، $f(ab) = f(a) + f(b)$. با توجه به اهمیت این ویژگی، طبیعی است که سئوال کنیم آیا چنین تابعی می‌تواند وجود داشته باشد. با توجه به آنچه در فصل قبل، در بحث انتگرال معین مشاهده کرده‌ایم، اکنون ساختن چنین تابعی کاری بسیار ساده است. در واقع تابع با دستور $x \mapsto \int_{۱}^{x} \frac{۱}{t}\, dt$ هر دو خاصیت فوق را دارد. یعنی مقدار آن در نقطه ۱ برابر صفر بوده، مشتق آن نیز برای هر $x > ۰$ برابر $\frac{۱}{x}$ است. این تابع را لگاریتم طبیعی نامیده آن را با نماد $\ln$ نشان می‌دهیم. پس $\ln : (۰, \infty) \to \mathbb{R}$ تابعی با دستور زیر تعریف می‌شود.

$$\ln x = \int_{۱}^{x} \frac{۱}{t}\, dt$$

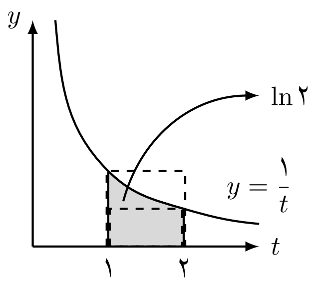
همانطور که در بالا اشاره کردیم، بنابر قضیه اساسی اول، تابع $\ln$ بر $(۰, \infty)$ مشتق‌پذیر است و

$$\forall x \in (۰, \infty) \qquad \ln'(x) = \frac{۱}{x}$$

همچنین $\ln(۱) = \int_{۱}^{۱} \frac{۱}{t}\, dt = ۰$. به این ترتیب، تابع فوق در خاصیت $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$، برای هر دو عدد $a, b \in (۰, \infty)$ صدق می‌کند. با توجه به تعبیر هندسی انتگرال معین، می‌توانیم مقدار این تابع را در هر نقطه از بازه $(۰, \infty)$ با استفاده از تقریب به دست آوریم. در واقع، در حالتی که $x > ۱$ آنگاه مقدار $\ln x$ برابر مساحت زیر منحنی نمایش $y = \frac{۱}{t}$ در بازه $[۱, x]$ است. در حالتی که $۰ < x < ۱$ آنگاه با توجه به ویژگی‌های انتگرال معین، $\ln x = \int_{۱}^{x} \frac{۱}{t}\, dt = -\int_{x}^{۱} \frac{۱}{t}\, dt$ و از آنجا، مقدار $\ln x$ برابر منهای مساحت زیر نمودار $y = \frac{۱}{t}$ بر بازه $[x, ۱]$ خواهد بود.



پس به طور مثال، با توجه به شکل زیر



$$\frac{۱}{۲} < \ln ۲ < ۱$$

سایر خاصیت‌های این تابع با استفاده از خاصیت اصلی آن قابل حصول هستند. به طور مثال، برای هر $x > ۰$،

$$۰ = \ln ۱ = \ln(x \times \frac{۱}{x}) = \ln x + \ln \frac{۱}{x}$$

در نتیجه $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$. اگر $n \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی باشد آنگاه

$$\ln(x^n) = \ln(x \times x^{n-1}) = \ln x + \ln x^{n-1} = \ln x + \ln x + \ln x^{n-2} = \cdots = n\ln x$$

در حالتی که $n \in \mathbb{Z}$ عددی منفی باشد آنگاه $m := -n \in \mathbb{N}$ و $n = -m$. در نتیجه

$$\ln x^n = \ln(x^{-m}) = \ln(\frac{1}{x^m}) = -\ln(x^m) = -m\ln x = n\ln x$$

به همین ترتیب، برای $n \in \mathbb{N}$ و برای $x \in (0, \infty)$،

$$\ln(x) = \ln((x^{\frac{1}{n}})^n) = n\ln(x^{\frac{1}{n}})$$

در نتیجه $\ln(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\ln(x)$. اکنون می‌توانیم این خاصیت را برای هر عدد گویای دلخواه ثابت کنیم. در واقع برای هر عدد گویای r می‌توانیم اعداد صحیح $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ پیدا کنیم که $r = \frac{m}{n}$. اکنون با استفاده از قسمت‌های قبل به سادگی مشاهده می‌شود برای $x \in (0, \infty)$، $\ln(x^r) = r\ln(x)$.

مشاهده کردیم $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$. بنابر این $\ln$ تابعی اکیدا صعودی است. نشان می‌دهیم $\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$ و $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$. برای اثبات خاصت اول از طریق تعریف، نشان می‌دهیم برای هر عدد حقیقی $M > 0$ عدد حقیقی $N > 0$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$\forall x \in (0, \infty) \qquad x > N \ \Rightarrow\ \ln x > M$$

برای عدد حقیقی $M > 0$، اگر عدد طبیعی n_0 را با خاصیت $n_0 > 2M$ انتخاب کرده، قرار دهیم $N := 2^{n_0}$ آنگاه برای هر $x > N$، با توجه به صعودی اکید بودن $\ln$، خواهیم داشت

$$\ln x > \ln N = \ln 2^{n_0} = n_0 \ln 2 > \frac{n_0}{2} > M$$

در رابطه فوق از خاصیت $\ln 2 > \frac{1}{2}$ استفاده کردیم که قبلا اثبات آن را مشاهده کرده‌ایم. پس با استفاده از تعریف ثابت کردیم $\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$. برای اثبات رابطه دوم، اگر از تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ یا $t = \frac{1}{x}$ استفاده کنیم آنگاه $x \to 0^+$ اگر و تنها اگر $t \to \infty$. در نتیجه

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x = \lim_{t\to\infty}\ln(\frac{1}{t}) = -\lim_{t\to\infty}\ln t = -\infty$$

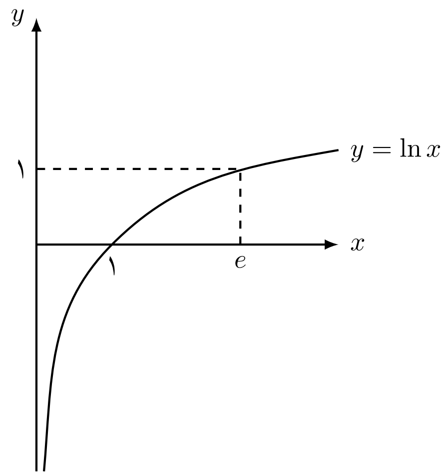
برای درک بهتر رفتار تابع $\ln$ در کران‌های دامنه تعریف، رفتار آن را در این کران‌ها با توان‌های مختلف x مقایسه می‌کنیم. به خصوص در ∞ رفتار آن را با تابع f با دستور $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ مقایسه می‌کنیم. به سادگی مشاهده می‌شود اگر عدد طبیعی n را بزرگ انتخاب کنیم آنگاه مقادیر $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ با سرعت بسیار کم رشد می‌کنند. (به طور مثال، برای $n = 1000$ مقدار این تابع در نقطه 2^{1000} برابر ۲ خواهد بود.) اکنون با استفاده از قاعده هوپیتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{n}{x^{\frac{1}{n}}} = 0$$

به این ترتیب سرعت افزایش مقایر تابع $\ln$ از این دسته توابع نیز کمتر است. به همین ترتیب، وقتی $x \to 0^+$، مقادیر $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ با سرعت کمی به 0 میل می‌کنند. اکنون در بررسی رفتار حد $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{n}} \ln x$ اگر مجددا از تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ استفاده کنیم خواهیم داشت

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{n}} \ln x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{n}}} \ln(\frac{1}{t}) = -\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t^{\frac{1}{n}}} = 0$$

بر اساس رفتارهای فوق، نمودار تقریبی زیر را برای این تابع خواهیم داشت.



با توجه به پیوستگی $\ln$، برد این تابع برابر تمام $\mathbb{R}$ خواهد بود. به خصوص عدد منحصر به فردی با نماد e (نماد اویلر) وجود دارد که $\ln e = 1$. این عدد را عدد نپر می‌نامیم. بعدا مشاهده خواهیم کرد که $e \approx 2/7182$.

برای اینکه با تابع لگاریتم طبیعی بیشتر آشنا شویم چند مثال در مورد این تابع مشاهده می‌کنیم.

مثال. مشتق هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$.

اگر $u(x)$ تابعی مشتق‌پذیر بوده، مقادیر آن در بازه $(0, \infty)$ قرار داشته باشند آنگاه بنابر آنچه در فصل دوم درس مشاهده کردیم،

تابع مرکب $\ln(u(x))$ نیز مشتق‌پذیر بوده، داریم

$$\frac{d}{dx}\ln(u(x)) = \ln'(u(x))u'(x) = \frac{1}{u(x)}u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

به این ترتیب، در نقاط دامنه تعریف تابع $f(x) = \ln(x^2+2x)$ (یعنی نقاطی که $x^2+2x > 0$) خواهیم داشت

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+2x}\frac{d}{dx}(x^2+2x) = \frac{2x+2}{x^2+2x}$$

ب) $f(x) = \ln(\frac{x}{\sqrt{x+2}})$.
قبل از محاسبه مشتق، توجه می‌کنیم که بنابر خواص تابع لگاریتم

$$f(x) = \ln(\frac{x}{\sqrt{x+2}}) = \ln x - \ln(\sqrt{x+2}) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x+2)$$

به این ترتیب

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+2}$$

ج) $f(x) = \ln|x|$.
ابتدا توجه می‌کنیم که دامنه تعریف این تابع برابر $\mathbb{R}-\{0\}$ است و بر تمام نقاط دامنه تعریف، f مشتق‌پذیر است. در فصل دوم مشاهده کردیم تابع $u(x) = |x|$ همه جا بر $\mathbb{R}-\{0\}$ مشتق‌پذیر بوده، داریم $u'(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$. در نتیجه

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}\ln(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{|x|}{x}}{|x|} = \frac{1}{x}$$

بنابر این مثال، فرمول مهم زیر برای تابع اولیه را خواهیم داشت. برای $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$،

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

مثال. هر یک از انتگرال‌های زیر را به دست آورید.
الف) $\int \frac{1}{x-2}\,dx$.
اگر از تغییر متغیر $u = x-2$ استفاده کنیم آنگاه $du = dx$. در نتیجه

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|x-2| + C$$

ب) $\int \tan x\, dx$.

با توجه به اینکه $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$، از تغییر متغیر $u = \cos x$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $du = -\sin x\, dx$ و در نتیجه $\sin x\, dx = -du$ و از آنجا

$$\begin{aligned}\int \tan x\, dx &= \int \frac{1}{\cos x}\sin x\, dx = \int \frac{1}{u}(-du) = -\ln|u| + C\\ &= -\ln|\cos x| + C = \ln|\frac{1}{\cos x}| + C = \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

ج) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$.

با استفاده از تغییر متغیر $u = \ln x$ خواهیم داشت $du = \frac{1}{x}\, dx$. بنابر این با توجه به نحوه تغییر متغیر در انتگرال معین

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \int_0^1 u\, du = \frac{1}{2}u^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

مثال. نشان دهید برای هر $x \geq 0$، $\frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1)$.

برای اثبات نامساوی فوق، می‌توانیم نشان دهیم برای هر $x \geq 0$، مقدار تابع f با دستور $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{1+x}$ نامنفی است. تابع اخیر بر بازه $[0, \infty)$ پیوسته و بر بازه $(0, \infty)$ مشتق‌پذیر است. داریم

$$\forall x > 0 \qquad f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

با توجه به اینکه $1 + x > 1$، $1 + x < (1 + x)^2$ و در نتیجه $\frac{1}{(1+x)^2} > \frac{1}{x+1}$. در نتیجه برای هر $x > 0$، $f'(x) > 0$. بنابر آنجه در فصل سوم درس، در مورد رفتار هندسی توابع مشتق‌پذیر مشاهده کردیم، f بر $[0, \infty)$ تابعی صعودی اکید است. در نتیجه برای هر $x \geq 0$،

$$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{1+x} \geq f(0) = \ln(1) = 0$$

که همان خواسته مسئله است.

مثال. نشان دهید معادله $x + \ln x = 2$ در بازه $(0, \infty)$ دقیقا یک جواب دارد.

فرض کنیم $f(x) := x + \ln x - 2$. در این صورت f بر بازه $(0, \infty)$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است. ابتدا با استفاده از قضیه

بولتسانو، نشان می‌دهیم معادله $f(x) = ۰$ دارای حداقل یک ریشه است. با انتخاب نقاط $a = ۱$ و $b = ۲$، خواهیم داشت

$$f(۱) = ۱ + \ln ۱ - ۲ = -۱ < ۰ \qquad \text{و} \qquad f(۲) = ۲ + \ln ۲ - ۲ = \ln ۲ > ۰$$

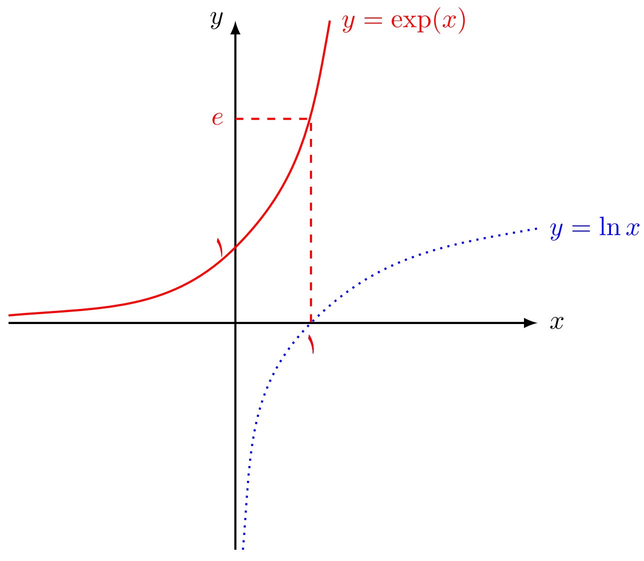
با توجه به پیوستگی f بر بازه $[۱, ۲]$، و بنابر قضیه بولتسانو، عدد $c \in [a, b]$ وجود دارد که $f(c) = ۰$، یا $c + \ln c = ۲$. اکنون نشان می‌دهیم c تنها ریشه معدله $f(x) = ۰$ است. برای هر $x > ۰$،

$$f'(x) = ۱ + \frac{۱}{x} > ۰$$

بنابر این f بر دامنه تعریف خود تابعی اکیدا صعودی و در نتیجه یک به یک است. پس اگر برای $d > ۰$، $f(d) = ۰$ آنگاه $f(d) = f(c)$ و از آنجا بنابر یک به یک بودن f، $d = c$. پس فقط یک مقدار $c > ۰$ وجود دارد که $c + \ln c = ۲$.

تابع نمایی.
در بخش قبل مشاهده کردیم تابع $\ln$ بر دامنه تعریف خود، یعنی $(۰, \infty)$ تابعی اکیدا صعودی و در نتیجه یک به یک و از آنجا وارون‌پذیر است. همچنین با توجه به پیوستگی این تابع بر $(۰, \infty)$ و اینکه $\lim\limits_{x \to ۰^+} \ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$، با استفاده از قضیه مقدار میانی، به سادگی مشاهده می‌شود مجموعه تصویر این تابع برابر $\mathbb{R}$ است. در نتیجه تابع وارون لگاریتم طبیعی تابعی تعریف شده بر تمام $\mathbb{R}$ خواهد بود. این تابع را با نماد $\exp$ نمایش داده آن را تابع نمایی می‌نامیم. پس تابع $\exp : \mathbb{R} \to (۰, \infty)$ به عنوان وارون تابع $\ln$ در خاصیت زیر صدق می‌کند.

$$\forall x \in D_{\ln} = (۰, \infty) \quad \exp(\ln x) = x \qquad \text{و} \qquad \forall x \in D_{\exp} = \mathbb{R} \quad \ln(\exp x) = x$$



با توجه به این روابط و خاصیت‌های تابع ln، خاصیت‌های زیر را برای تابع نمایی به دست می‌آوریم.

الف) با توجه به اینکه $\ln 1 = 0$ و $\ln e = 1$، داریم $\exp(0) = 1$ و $\exp(1) = e$.

ب) برای هر $a, b \in \mathbb{R}$، اگر قرار دهیم $A := \exp(a)$ و $B := \exp(b)$ آنگاه $a = \ln A$ و $b = \ln B$. در نتیجه

$$a + b = \ln(A) + \ln B = \ln(AB)$$

و از آنجا

$$\exp(a + b) = AB = \exp(a)\exp(b)$$

به عبارت دیگر، خاصیت اصلی تابع نمایی، به عنوان وارون تابع لگاریتم، تبدیل جمع اعداد به ضرب است. دقیقا به نحو مشابه دیده می‌شود برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ و هر $r \in \mathbb{Q}$،

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \quad ، \quad \exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \quad ، \quad \exp(ra) = (\exp(a))^r$$

ج) با توجه به اینکه تابع $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ تابعی اکیدا صعودی، پیوسته و مشتق‌پذیر بوده، برای هر $x \in (0, \infty)$، $\ln'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$، تابع $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ تابعی اکیدا صعودی، پیوسته و مشتق‌پذیر است. با توجه به رابطه $\ln(\exp(x)) = x$ و با استفاده از مشتق تابع مرکب خواهیم داشت

$$\ln'(\exp(x))\exp'(x) = 1$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\exp(x)}\exp'(x) = 1$$

و از آنجا برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\exp'(x) = \exp(x)$. به عبارت دیگر مشتق تابع نمایی در هر نقطه برابر مقدار تابع نمایی در همان نقطه است. بعدا در یک مثال مشاهده می‌کنیم این خاصیت تابع نمایی را به نحوی منحصر به فرد نسبت به سایر توابع متمایز می‌کند.

د) برای بررسی رفتار تابع حدی در کران‌های دامنه تعریف از تغییر متغیر $x = \ln t$ استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \exp(x) &= \lim_{t \to 0^+} \exp(\ln t) = \lim_{t \to 0^+} t = 0 \\
\lim_{x \to \infty} \exp(x) &= \lim_{t \to \infty} \exp(\ln t) = \lim_{t \to \infty} t = \infty
\end{aligned}$$

به همین ترتیب، با استفاده از رفتارهای حدی $\lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$ و $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ که برای هر عدد گویا و مثبت r برقرار هستند، رفتارهای زیر برای تابع نمایی را خواهیم داشت. برای هر عدد گویا و مثبت r،

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^r}{\exp(x)} = 0 \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^r \exp(x) = 0$$

خاصیت دوم به طور خاص بیان می‌کند که سرعت رشد تابع نمایی در بی‌نهایت از هر توانی از x بیشتر است.

تذکر. در خاصیت‌های فوق مشاهده کردیم برای هر $a \in \mathbb{R}$ و هر $r \in \mathbb{Q}$، $\exp(ra) = \exp(a)^r$ و از آنجا

$$\exp(r) = \exp(r \times 1) = (\exp(1))^r = e^r$$

با توجه به این رابطه و این که $\exp(x)$ برای هر عدد حقیقی x (اعم از گویا و گنگ) تعریف شده است، e^x را زمانی که x عددی گنگ باشد برابر $\exp(x)$ تعریف می‌کنیم. پس به طور مثال $e^{\sqrt{2}}$، که تا این زمان معنی خاصی نداشت، برابر $\exp(\sqrt{2})$ تعریف می‌شود. به همین ترتیب $e^\pi := \exp(\pi)$. به این ترتیب، بر مبنای این تعریف و مشاهده فوق،

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x = \exp(x)$$

از این به بعد نیز به جای استفاده از نماد $\exp(x)$ به طور ساده از نماد e^x استفاده می‌کنیم. در این نمایش جدید خاصیت‌های تابع نمایی به نحوی طبیعی و دقیقا منطبق بر قوانین توان بیان می‌شوند. به طور مثال برای هر دو عدد حقیقی a و b، رابطه $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ به صورت $e^{(a+b)} = e^a e^b$ بیان می‌شود که یادآور قانون متعارف برای توان است.

مثال. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر بوده، برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f'(x) = f(x)$. اگر $f(0) = 1$ نشان دهید $f(x) = e^x$.

با توجه به خاصیتهای تابع نمایی، برای هر $x \in \mathbb{R}$، e^x یا همان $\exp(x)$ مقداری مثبت و در نتیجه غیر صفر است. به این ترتیب، اگر $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با دستور $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ تعریف شده باشد آنگاه g تابعی مشتق‌پذیر بر $\mathbb{R}$ است و برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = 0$$

در نتیجه g بر $\mathbb{R}$ تابع ثابت است. یعنی ثابت $C \in \mathbb{R}$ وجود دارد که

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = C \qquad \text{یا} \qquad \frac{f(x)}{e^x} = C$$

در نتیجه $f(x) = Ce^x$. اکنون برای تعیین ثابت C کافی است از شرط $f(۰) = ۱$ استفاده کنیم. با توجه به اینکه $\exp(۰) = ۱$، یا $e^۰ = ۱$، با جایگذاری $x = ۰$ در رابطه اخیر خواهیم داشت

$$f(۰) = Ce^۰ \qquad \text{یا} \qquad ۱ \times C = ۱$$

در نتیجه $C = ۱$ و از آنجا $f(x) = e^x$.

مثال. اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = xe^{-x}$ را بر بازه $[۰, ۲]$ تعیین کنید.
ابتدا توجه می‌کنیم تابع f بر $\mathbb{R}$ و از آنجا بر بازه بسته و کراندار $[۰, ۲]$ پیوسته است. پس بنابر قضیه اکسترمم‌های مطلق، که در فصل سوم درس مشاهده کردیم، f اکسترمم‌های مطلق خود را بر این بازه اتخاذ می‌کند. بنابر دستورالعملی که در آن فصل مشاهده کردیم، برای تعیین این اکسترمم‌های مطلق، نخست نقاط بحرانی f را بر بازه باز $(۰, ۲)$ تعیین می‌کنیم. از آنجا که f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، نقاط بحرانی این تابع بر $\mathbb{R}$ جواب‌های معادله $f'(x) = ۰$ است. بر این مبنا

$$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (۱ - x)e^{-x} = ۰$$

از آنجا که e^{-x} همواره مثبت و در نتیجه غیر صفر است، تنها جواب معادله فوق $x = ۱$ است. پس این تابع بر $\mathbb{R}$ فقط یک نقطه بحرانی دارد که آن نیز متعلق به بازه $(۰, ۲)$ است. اکنون مقدار تابع f را در نقطه بحرانی درون با مقادیر آن در ابتدا و انتهای بازه با هم مقایسه می‌کنیم.

x	۰	۱	۲
$f(x)$	$f(۰) = ۰$	$f(۱) = \frac{۱}{e}$	$f(۲) = \frac{۲}{e^۲}$

با توجه به اینکه عدد e بزرگتر از ۲ است، $\frac{۲}{e} < ۱$ و از آنجا $\frac{۱}{e} < \frac{۲}{e^۲}$. در نتیجه با مقایسه مقادیر فوق مشاهده می‌شود $\min\limits_{[۰,۲]} f = f(۰) = ۰$ و $\max\limits_{[۰,۲]} f = f(۱) = \frac{۱}{e}$.

سایر توابع نمایی و لگاریتمی.

فرض کنیم $a > ۰$. در این صورت برای هر عدد گویای r، با توجه به رابطه $\ln(a^r) = r\ln(a)$ خواهیم داشت

$$a^r = \exp(r\ln a)$$

توجه می‌کنیم عبارت $\exp(r\ln a)$ برای همه مقادیر حقیقی r (اعم از گویا و گنگ) تعریف شده است. بر این مبنا، مقدار a^r را برای زمانی که r عددی غیرگویا باشد برابر $\exp(r\ln a)$، یا همان $e^{r\ln a}$، تعریف می‌کنیم. پس به طور مثال، مقدار عبارت $۲^{\sqrt{۲}}$ که تا پیش از این معنی خاصی نداشت اکنون برابر $e^{\sqrt{۲}\ln ۲}$، یا در واقع $\exp(\sqrt{۲}\ln ۲)$ تعریف می‌شود. به این ترتیب، بر اساس تعریف فوق،

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad a^x = e^{x\ln a}$$

بر اساس تعریف فوق، خاصیت‌های زیر به سادگی برای این عبارت نمایی قابل تحقیق هستند. برای هر دو عدد حقیقی x و y،

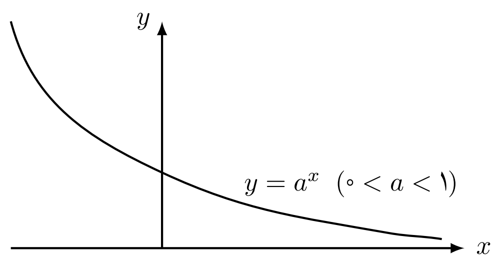
$$a^{(x+y)} = a^x a^y \quad ، \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad ، \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

فرض کنیم $a > ۰$. اگر f تابع با دستور $f(x) = a^x$باشد آنگاه بنابر تعریف فوق، دامنه تعریف f برابر $\mathbb{R}$ بوده، برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = a^x = e^{x\ln a} > ۰$. همچنین f تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است و

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = (\ln a)e^{x\ln a}$$

بنابر این بسته به اینکه عدد مثبت a بزرگتر، کوچکتر یا مساوی یک باشد رفتار تابع متفاوت خواهد بود.
اگر $a \in (۰,۱)$ آنگاه $\ln a < ۰$. در نتیجه در این حالت برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f'(x) < ۰$. یعنی در این حالت f تابعی اکیدا نزولی بر $\mathbb{R}$ خواهد بود. در همین حالت

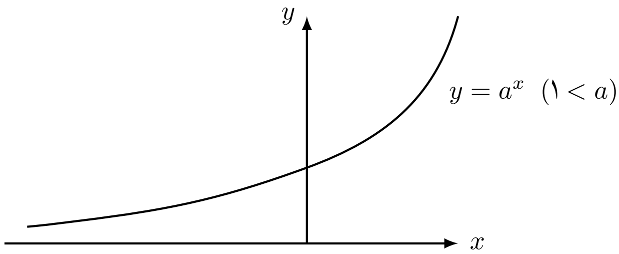
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = \infty \quad و \quad \lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln a} = ۰$$



در حالتی که $a > ۱$، $\ln a$ عددی مثبت بوده، در نتیجه برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f'(x) > ۰$. یعنی در این حالت f بر $\mathbb{R}$ اکیدا صعودی

است. همچنین

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = ۰ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln a} = \infty$$



نهایتا اگر $a = ۱$ آنگاه f تابع ثابت ۱ خواهد بود.

پس به طور مثال، تابع f با دستور $f(x) = ۲^x$ تابعی اکیدا صعودی و تابع g با دستور $g(x) = (۰/۳)^x$ تابعی اکیدا نزولی بر $\mathbb{R}$ هستند.

یک فرمول برای تابع اولیه نیز به صورت زیر خواهیم داشت. با توجه به فرمول مشتق‌گیری $\frac{d}{dx}a^x = (\ln a)a^x$، در حالتی که $a \neq ۱$، خواهیم داشت

$$\int a^x\,dx = \frac{۱}{\ln a}a^x + C$$

تذکر. با توجه به نحوه تعریف عبارت a^x می‌توانیم رده وسیعتری از توابع نمایی را به صورت زیر مورد بررسی قرار دهیم. فرض کنیم $I \subset \mathbb{R}$ یک بازه و $u, v : I \to \mathbb{R}$ دو تابع با شرط $u(x) > ۰$، برای هر $x \in I$، باشند. در این صورت برای هر $x \in I$ عبارت $u(x)^{v(x)}$ عبارتی تعریف شده و برابر $e^{v(x)\ln u(x)}$ خواهد بود. به این ترتیب تابع جدیدی به صورت u^v قابل بررسی است. در حالتی که u و v هر دو مشتق‌پذیر باشند تابع $u^v = e^{v\ln u}$ نیز مشتق‌پذیر بوده، داریم

$$(u(x)^{v(x)})' = (v(x)\frac{u'(x)}{u(x)} + v'(x)\ln u(x))u(x)^{v(x)}$$

مثال. اکسترمم‌های تابع f با دستور $f(x) = x^{\frac{۱}{x}}$ را بر $(۰, \infty)$ تعیین کنید.

ابتدا نقاط بحرانی f را بر $(۰, \infty)$ تعیین می‌کنیم. برای هر $x > ۰$،

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{۱}{x}}) = \frac{d}{dx}(e^{\frac{\ln x}{x}}) = \frac{۱ - \ln x}{x^۲}e^{\frac{\ln x}{x}}$$

به این ترتیب $f'(x) = ۰$ اگر و تنها اگر $\ln x = ۱$ که از آن $x = e$ به عنوان تنها نقطه بحرانی f به دست می‌آید. اکنون جدول تغییرات تابع را مورد توجه قرار می‌دهیم

x	0		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(e)$	$\searrow$	

بنابر این f دارای یک ماکزیمم مطلق در نقطه $x = e$ و برابر $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ است. برای تکمیل بررسی خود، رفتار تابع f در کران‌های دامنه تعریف را نیز مورد توجه قرار می‌دهیم. وقتی $x \to 0^+$، عبارت $\dfrac{\ln x}{x}$ به $-\infty$ میل کرده، در نتیجه $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \to 0$. در کران دیگر، وقتی $x \to \infty$، همانطور که قبلا مشاهده کرده‌ایم $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ و در نتیجه $e^{\frac{\ln x}{x}} \to 1$.

مثال. هر یک از حدود زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

با توجه به تعریف توابع نمایی

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

بر این اساس، ابتدا رفتار حدی عبارت $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ را وقتی $x \to 0$ بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه شرایط استفاده از قاعده هوپیتال برقرار است، خواهیم داشت

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$$

اکنون با توجه به پیوستگی تابع $\exp$ بر سراسر $\mathbb{R}$، و به خصوص در نقطه ۱، وقتی $\dfrac{\ln(x+1)}{x} \to 1$، مقدار $e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$ به e^1 میل می‌کند. به عبارت دیگر

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e$$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(1+\sin 2x)^{\tan x}$.

ابتدا از تعریف توابع نمایی استفاده می‌کنیم.

$$(1+\sin 2x)^{\tan x} = e^{\tan x \ln(1+\sin 2x)}$$

اکنون رفتار حدی عبارت $\tan x \ln(1+\sin 2x)$ را وقتی $x \to \dfrac{\pi}{2}^-$ بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه در این حالت $\ln(1+\sin 2x) \to \ln 1 = 0$ و $\tan x \to -\infty$، عبارت فوق رفتار مبهم $0\times -\infty$ دارد. با استفاده از اتحاد $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$،

خواهیم داشت

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x \ln(1+\sin 2x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{\cot x}$$

اکنون شرایط استفاده از قاعده هوپیتال مهیا است. با استفاده از این قاعده،

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{\cot x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}}{-(1+\cot^2 x)} = -2$$

در نتیجه، مجددا با استفاده از پیوستگی تابع نمایی،

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (1+\sin 2x)^{\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\tan x \ln(1+\sin 2x)} = e^{-2}$$

تذکر. مشاهده کردیم تابع $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ با دستور $f(x)=a^x$ برای $a>0$ و $a\neq 1$ تابعی اکیدا یکنوا و در نتیجه وارون‌پذیر است. با توجه به اینکه مجموعه تصویر تابع f برابر $(0,\infty)$ است تابع وارون بر این بازه تعریف شده است. تابع وارون f را تابع لگاریتم بر مبنای a نامیده آن را با نماد $\log_a$ نشان می‌دهیم. پس $\log_a:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی با خاصیت زیر است.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \log_a(a^x)=x \qquad \text{و} \qquad \forall x\in(0,\infty),\quad a^{\log_a x}=x$$

برای $x\in(0,\infty)$ اگر قرار دهیم $y:=\log_a x$ آنگاه $a^y=x$. در نتیجه $y\ln a=\ln x$ و از آنجا $y=\frac{\ln x}{\ln a}$. پس برای هر $x\in(0,\infty)$، $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$. خاصیت‌های تابع $\log_a$ را با توجه به رابطه اخیر می‌توانیم به دست آوریم.

توابع هذلولوی.

بنابر آنچه در بخش‌های قبل مشاهده کردیم، دو تابع e^x و $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر هستند. در نتیجه دو تابع $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ و $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ نیز بر $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر خواهند بود. این دو تابع را به ترتیب کسینوس و سینوس هذلولوی می‌نامیم و آنها را نمادهای $\cosh$ و $\sinh$ نشان می‌دهیم. پس

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \cosh(x):=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{و} \quad \sinh(x):=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \tag{2}$$

با مشتق‌گیری از طرفین روابط فوق، خواهیم داشت

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \cosh'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh(x) \quad \text{و} \quad \sinh'(x)=\frac{e^x-(-e^{-x})}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh(x)$$

باید توجه نماییم که این دو تابع با توابع سینوس و کسینوس که قبلا آشنا شده‌اید تفاوت‌های زیادی دارند. به طور مثال بعدا مشاهده می‌کنیم که این هر دو تابع بیکران هستند. در حالی که توابع سینوس و کسینوس توابعی کراندار هستند. با وجود این، برخی روابط حاکم بین این دو تابع بسیار شبیه به روابط حاکم بین توابع مثلثاتی است. در ادامه با برخی از این روابط آشنا می‌شویم. اگر طرفین روابط (۲) را یکبار با هم جمع و یکبار تفریق کنیم، خواهیم داشت

$$\cosh(x)+\sinh(x)=e^x \qquad \text{و} \qquad \cosh(x)-\sinh(x)=e^{-x}$$

اکنون با ضرب طرفین دو رابطه فوق در یکدیگر، رابطه بین سینوس و کسینوس هذلولوی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \cosh^{۲}(x)-\sinh^{۲}(x)=۱$$

برای $x,y\in\mathbb{R}$،

$$\begin{aligned}\sinh(x)\cosh(y)+\sinh(y)\cosh(x) &= \frac{(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})}{۴}+\frac{(e^y-e^{-y})(e^x+e^{-x})}{۴}\\ &= \frac{۲e^{x+y}-۲e^{-x-y}}{۴}=\frac{e^{(x+y)}-e^{-(x+y)}}{۲}\\ &= \sinh(x+y)\end{aligned}$$

به خصوص با قرار دادن $y=x$ در این رابطه، رابطه‌ای به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \sinh(۲x)=۲\sinh(x)\cosh(x)$$

مشابه محاسبات فوق، به سادگی دیده می‌شود برای هر $x,y\in\mathbb{R}$،

$$\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)=\cosh(x+y)$$

و از آنجا با قرار دان $y=x$،

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \cosh(۲x)=\cosh^{۲}(x)+\sinh^{۲}(x)$$

بررسی سایر روابط بین این دو تابع را به عهده دانشجویان علاقه‌مند می‌گذاریم.

اکنون به بررسی برخی از خواص این دو تابع می‌پردازیم که کاملا با خواص نظیر برای توابع مثلثاتی متفاوت است. با توجه به نامساوی زیر

$$\forall a > ۰ \qquad a + \frac{۱}{a} \geq ۲$$

داریم

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} = \frac{۱}{۲}(e^x + \frac{۱}{e^x}) \geq ۱$$

به عبارت دیگر مقدار تابع cosh همواره بزرگتر و مساوی ۱ است. در نتیجه

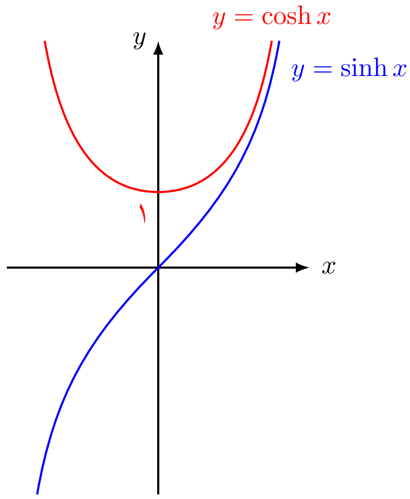
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sinh'(x) = \cosh(x) \geq ۱ > ۰$$

یعنی تابع sinh تابعی اکیدا صعودی است. بنابر این

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x > ۰ \Rightarrow \sinh(x) > \sinh(۰) = ۰ \quad \text{و} \quad x < ۰ \Rightarrow \sinh(x) < \sinh(۰) = ۰$$

بر این اساس، با توجه به اینکه $\cosh'(x) = \sinh(x)$، تابع cosh بر $(-\infty, ۰]$ تابعی اکیدا نزولی و بر $[۰, \infty)$ تابعی اکیدا صعودی است. رفتارهای حدی این دو تابع در کران‌های دامنه تعریف و نمودار این دو تابع را در زیر مشاهده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{۲} = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} \sinh x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{۲} = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{۲} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \cosh x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{۲} = \infty$$



با توجه به مشتق‌پذیری دو تابع sinh و cosh بر $\mathbb{R}$ و اینکه برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\cosh x \neq ۰$، تابع $\frac{\sinh}{\cosh}$ بر $\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و

مشتق‌پذیر است. این تابع را تانژانت هذلولوی نامیده آن را با نماد $\tanh$ نشان می‌دهیم. پس

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

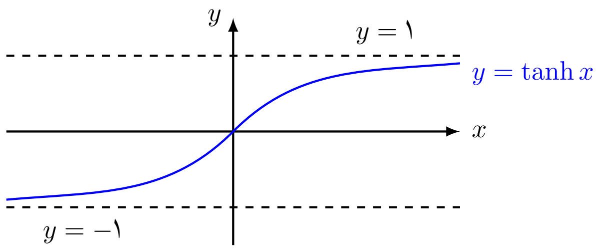
داریم

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \tanh'(x) = \frac{\cosh^{۲} x - \sinh^{۲} x}{\cosh^{۲} x} = \frac{۱}{\cosh^{۲} x}$$

در نتیجه $\tanh$ بر $\mathbb{R}$ تابعی اکیدا صعودی است. نهایتا رفتارهای حدی این تابع در کران‌های دامنه تعریف نیز به صورت زیر هستند.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -۱\\ \lim_{x\to\infty} \tanh(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = ۱\end{aligned}$$

نمودار این تابع را در زیر مشاهده می‌کنیم.



همان طور که مشاهده می‌شود مقادیر تابع $\tanh$ همواره بین ۱ و ۱− قرار دارند.

مثال. نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $|\tanh x| \le |x| \le |\sinh x|$.

نشان می‌دهیم برای همه مقادیر x، $|x| \le |\sinh(x)|$. اگر $x = ۰$ آنگاه دو طرف نامساوی برابر صفر شده، تساوی برقرار است. پس فرض کنیم $x \neq ۰$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $x < ۰$. در این حالت با در نظر گرفتن تابع $\sinh$ بر بازه $[x, ۰]$، روشن است که این تابع بر این بازه پیوسته و بر بازه باز $(x, ۰)$ مشتق‌پذیر است. بنابر قضیه مقدار میانگین، عدد c در بازه $(x, ۰)$ وجود دارد که

$$\frac{\sinh(۰) - \sinh(x)}{۰ - x} = \sinh'(c) = \cosh(c) \quad \text{یا} \quad \frac{\sinh(x)}{x} = \cosh(c)$$

در نتیجه

$$\left|\frac{\sinh(x)}{x}\right| = \frac{|\sinh(x)|}{|x|} = |\cosh(c)| = \cosh(c) \geq ۱$$

به این ترتیب در این حالت نامساوی $|\sinh(x)| \geq |x|$ به دست می‌آید.

ب) $x > ۰$. مانند حالت قبل، در این حالت تابع $\sinh$ بر بازه $[۰, x]$ پیوسته و بر بازه $(۰, x)$ مشتق‌پذیر است. پس مجددا بنابر قضیه مقدار میانگین، عدد $c \in (۰, x)$ وجود دارد که

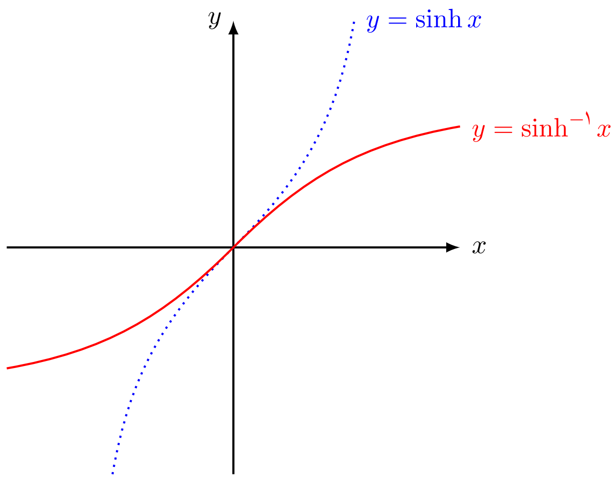
$$\frac{\sinh(x) - \sinh(۰)}{x - ۰} = \frac{\sinh(x)}{x} = \cosh(c)$$

و از آنجا مانند قبل خواهیم داشت $\left|\frac{\sinh(x)}{x}\right| = \cosh(c) \geq ۱$ که مجددا نامساوی $|\sinh(x)| \geq |x|$ را نتیجه می‌دهد.
اثبات نامساوی $|\tanh(x)| \leq |x|$ دقیقا به نحو مشابه بوده، به عهده دانشجویان است.

توابع هذلولوی وارون.
همانگونه که در بالا مشاهده کردیم، تابع $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی اکیدا صعودی، در نتیجه یک به یک و از آنجا وارون‌پذیر است. مشاهده کردیم

$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$$

به این ترتیب، با توجه به پیوستگی این تابع بر $\mathbb{R}$، با استفاده از قضیه مقادیر میانی مشاهده می‌شود مجموعه تصویر این تابع برابر $\mathbb{R}$ است. پس تابع وارون بر مجموعه تصویر تابع $\sinh$، یعنی $\mathbb{R}$، تعریف شده است. تابع وارون سینوس هذلولوی را با نماد $\sinh^{-۱}$ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب، بنابر خواص تابع $\sinh$، تابع $\sinh^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و اکیدا صعودی است.



به علاوه از آنجا که

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sinh'(x) = \cosh(x) \neq ۰$$

تابع $\sinh^{-1}$ بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. برای تعیین مشتق این تابع، با توجه به رابطه

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sinh\left(\sinh^{-1} x\right) = x$$

و اینکه هر دو تابع در ترکیب فوق مشتق‌پذیر هستند، خواهیم داشت

$$\sinh'\left(\sinh^{-1} x\right) \frac{d}{dx} \sinh^{-1}(x) = 1 \tag{۳}$$

در عین حال، برای هر t، با توجه به رابطه $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$، خواهیم داشت

$$\sinh'(t) = \cosh(t) = \sqrt{1 + \sinh^2 t}$$

در نتیجه

$$\sinh'\left(\sinh^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 + \sinh^2\left(\sinh^{-1}(x)\right)} = \sqrt{1 + x^2}$$

با جایگذاری عبارت فوق در رابطه (۳)،

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

و از اینجا یک فرمول مهم برای تابع اولیه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx = \sinh^{-1} x + C$$

اکنون مشابه بحث فوق را برای تابع $\cosh$ انجام می‌دهیم. ابتدا توجه می‌کنیم تابع $\cosh$ بر سراسر $\mathbb{R}$ یک به یک نیست. در واقع مشاهده کردیم این تابع بر $(-\infty, 0]$ تابعی اکیدا نزولی و بر $[0, \infty)$ تابعی اکیدا صعودی است. پس برای بحث در مورد تابع وارون $\cosh$، لازم است ابتدا دامنه تعریف این تابع را به نحو مناسب محدود نماییم. اگر دامنه تعریف این تابع را به بازه $[0, \infty)$ محدود کنیم، آنگاه $\cosh : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ بر این بازه تابعی اکیدا صعودی و در نتیجه وارون‌پذیر است. توجه می‌کنیم در این حالت مجموعه تصویر $\cosh$ برابر است با

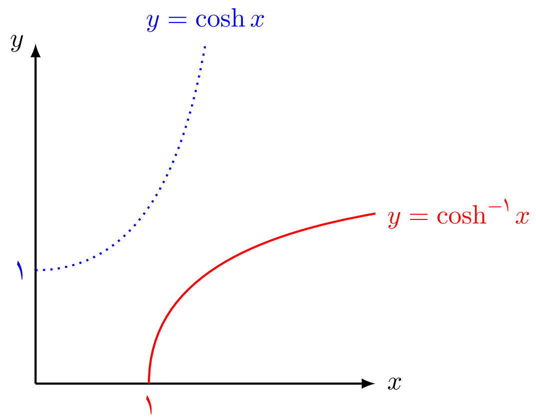
$$\{\cosh(x); x \geq 0\} = [\cosh(0), \infty) = [1, \infty)$$

پس تابع وارون کسینوس هذلولوی بر بازه $[1, \infty)$ تعریف شده است. این تابع وارون را با نماد $\cosh^{-1}$ نشان می‌دهیم. با توجه

به خاصیت‌های تابع $\cosh$ بر بازه $[0,\infty)$، تابع $\cosh^{-1} : [1,\infty) \to [0,\infty)$ تابعی پیوسته و اکیدا صعودی است. به علاوه

$$\forall x \in (0,\infty) \qquad \cosh'(x) = \sinh(x) \neq 0$$

پس $\cosh^{-1}$ بر بازه $(1,\infty)$ تابعی مشتق‌پذیر است.



با استدلالی مشابه تابع $\sinh^{-1}$، مشاهده می‌کنیم که

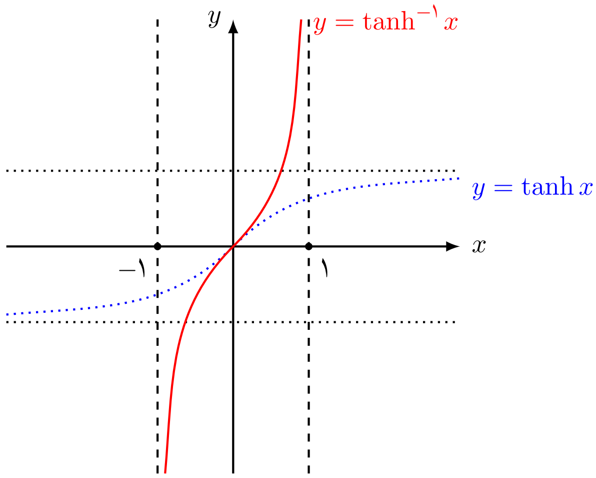
$$\forall x \in (1,\infty) \qquad \frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

و از آنجا فرمول مهم دیگری برای تابع اولیه به دست می‌آوریم.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \cosh^{-1}(x) + C$$

نهایتا با بحثی مشابه دو قسمت فوق، مشاهده می‌کنیم تابع $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ تابعی وارون‌پذیر بوده، تابع وارون، که آن را با نماد $\tanh^{-1}$ نشان می‌دهیم، بر $(-1,1)$ تابعی اکیدا صعودی، پیوسته و مشتق‌پذیر است و

$$\forall x \in (-1,1) \qquad \frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$$



در نتیجه

$$\int \frac{۱}{۱-x^۲}\,dx = \tanh^{-۱} x + C$$

البته توجه می‌کنیم، با توجه به دامنه تعریف تابع $\tanh^{-۱}$ که برابر بازه $(-۱,۱)$ است، دستور تابع اولیه فوق فقط برای این بازه برقرار است. بعدا در فصل روش‌های انتگرال‌گیری، تابع اولیه جامع‌تری برای عبارت $\frac{۱}{۱-x^۲}$ بر بازه‌های $(-\infty,-۱)$، $(-۱,۱)$ و $(۱,\infty)$ به دست می‌آوریم.

در ادامه برای آشنای بیشتر با توابع هذلولوی و وارون آنها، مثال‌هایی در مورد این دسته از توابع را بررسی می‌کنیم.

مثال. نشان دهید الف) برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\sinh^{-۱} x = \ln(x+\sqrt{x^۲+۱})$.

ب) برای هر $x \geq ۱$، $\cosh^{-۱} x = \ln(x+\sqrt{x^۲-۱})$.

ج) برای هر $x \in (-۱,۱)$، $\tanh^{-۱} x = \frac{۱}{۲}\ln(\frac{۱+x}{۱-x})$.

هر یک از بندهای فوق را به دو روش می‌توان حل نمود. از آنجا که ایده هر سه بند مشابه یکدیگر است، فقط قسمت (ب) را در اینجا حل کرده، حل (الف) و (ج) را به عهده دانشجویان می‌گذاریم.

ب) روش اول. برای اثبات تساوی فوق قرار می‌دهیم $y := \cosh^{-۱} x$. در این صورت

$$x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{۲} = \frac{e^{۲y}+۱}{۲e^y}$$

اگر قرار دهیم $t := e^y$ آنگاه معادله فوق به صورت $x = \frac{t^۲+۱}{۲t}$ یا $t^۲ - ۲xt + ۱ = ۰$ تبدیل می‌شود. با حل این معادله درجه ۲ برای t، خواهیم داشت

$$t = x \pm \sqrt{x^۲-۱}$$

با توجه به اینکه $x \geq ۱$، داریم

$$x - \sqrt{x^{۲} - ۱} = \frac{۱}{x + \sqrt{x^{۲} - ۱}} \leq ۱$$

از طرف دیگر، چون $y = \cosh^{-۱} x$ مقداری مثبت است داریم $t = e^{y} \geq ۱$. پس از دو جواب به دست آمده برای t جواب $t = x + \sqrt{x^{۲} - ۱}$ قابل قبول است. به این ترتیب

$$e^{y} = t = x + \sqrt{x^{۲} - ۱}$$

و از آنجا

$$\cosh^{-۱} x = y = \ln(e^{y}) = \ln(x + \sqrt{x^{۲} - ۱})$$

روش دوم. تابع $f : [۱, \infty) \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \cosh^{-۱} x - \ln(x + \sqrt{x^{۲} - ۱})$ بر این بازه تابعی پیوسته و بر $(۱, \infty)$ تابعی مشتق‌پذیر است. داریم

$$\begin{aligned} \forall x \in (۱, \infty) \qquad f'(x) &= \frac{۱}{\sqrt{x^{۲} - ۱}} - \frac{۱ + \frac{x}{\sqrt{x^{۲}-۱}}}{x + \sqrt{x^{۲} - ۱}} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{x^{۲} - ۱}} - \frac{\sqrt{x^{۲} - ۱} + x}{\sqrt{x^{۲} - ۱}(x + \sqrt{x^{۲} - ۱})} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{x^{۲} - ۱}} - \frac{۱}{\sqrt{x^{۲} - ۱}} = ۰ \end{aligned}$$

به این ترتیب f بر $[۱, \infty)$ تابع ثابت است. یعنی $C \in \mathbb{R}$ وجود دارد که

$$\forall x \in [۱, \infty) \qquad f(x) = \cosh^{-۱} x - \ln(x + \sqrt{x^{۲} - ۱}) = C$$

با توجه به اینکه $f(۱) = ۰$، مقدار ثابت C نیز برابر صفر بوده، از آنجا رابطه مورد نظر اثبات می‌شود.

مثال. نشان دهید برای هر $x \geq ۰$، $\sinh^{-۱} x \leq x$.
فرض کنیم f تابع با ضابطه $f(x) = x - \sinh^{-۱} x$ بر بازه $[۰, \infty)$ باشد. در این صورت f بر این بازه پیوسته و بر $(۰, \infty)$ مشتق‌پذیر است. با محاسبه مشتق f بر $(۰, \infty)$،

$$\forall x \in (۰, \infty) \qquad f'(x) = ۱ - \frac{۱}{\sqrt{x^{۲} + ۱}} > ۰$$

در نتیجه f بر $[0,\infty)$ تابعی اکیدا صعودی است و از آنجا اگر $x \geq 0$ آنگاه $f(x) \geq f(0) = 0 - \sinh^{-1}(0) = 0$. پس

$$\forall x \geq 0 \qquad f(x) = x - \sinh^{-1} x \geq 0 \quad \text{یا} \quad x \geq \sinh^{-1} x$$

مثال. مقدار هر یک از انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\int \sinh x \cosh^2 x \, dx$.

اگر از تغییر متغیر $u = \cosh x$ استفاده کنیم آنگاه $du = \sinh x \, dx$. در نتیجه

$$\int \sinh x \cosh^2 x \, dx = \int u^2 \, du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \cosh^3 x + C$$

ب) $\int_3^9 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} \, dx$.

اگر از تغییر متغیر $x = 3u$ استفاده کنیم خواهیم داشت $dx = 3 \, du$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_3^9 \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} \, dx &= 3 \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{9u^2 - 9}} \, du = \int_1^3 \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} \\ &= \cosh^{-1} u \Big|_1^3 = \cosh^{-1}(3) - \cosh^{-1}(1) \end{aligned}$$

ج) $\int \tanh x \, dx$.

با توجه به اینکه $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$، از تغییر متغیر $x = \cosh x$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $dx = \sinh x \, dx$ و در نتیجه

$$\int \tanh x \, dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\cosh x| + C = \ln(\cosh x) + C$$

در تساوی آخر از مثبت بودن کسینوس هذلولوی استفاده کرده‌ایم.

مثال. هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{x}$.

اگر قرار دهیم $f(x) = \cosh x - 1$ و $g(x) = x$ آنگاه هر دو تابع در همسایگی 0 پیوسته و مشتق‌پذیر بوده، $f(0) = g(0) = 0$.

بنابر این حد فوق به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ خواهد بود. با استفاده از قاعده هوپیتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{1}=0$$

ب) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sinh x}{x^3}$.

مانند قسمت قبل، با استفاده پیاپی از قاعده هوپیتال

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sinh x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sinh x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\cosh x}{1}=-6\end{aligned}$$

ج) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh^{-1}x}{x}$.

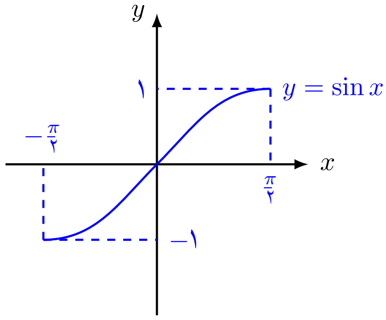
مانند دو قسمت قبل، با استفاده از قاعده هوپیتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh^{-1}x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

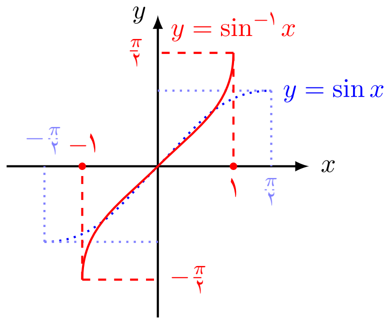
توابع وارون مثلثاتی.

در انتهای این فصل، دسته دیگری از توابع غیرجبری، تحت عنوان توابع وارون مثلثاتی، را مورد توجه قرار می‌دهیم. همانگونه که از نام این توابع آشکار است، این دسته از توابع وارون توابع مثلثاتی است. اهمیت اصلی توابع وارون مثلثاتی در فرمول‌های تابع اولیه (یا انتگرال نامعین) است که بر اساس این توابع بیان می‌شوند. بحث خود را با وارون تابع سینوس آغاز می‌کنیم.

همانطور که می‌دانیم، تابع $\sin$ تابعی متناوب بوده، در نتیجه به هیچ وجه بر $\mathbb{R}$ یک به یک نیست. ولی با محدود کردن مناسب دامنه تعریف، می‌توانیم آن را به تابعی یک به یک و از آنجا وارون‌پذیر تبدیل کنیم. بر این اساس تابع سینوس را بر دامنه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ در نظر می‌گیریم.



سینوس بر این دامنه تابعی اکیدا صعودی و در نتیجه وارون‌پذیر خواهد بود. با توجه به اینکه با تغییر x در بازه فوق، مقادیر سینوس کلیه مقادیر بین -۱ و ۱ را اتخاذ می‌کند، مجموعه تصویر $\sin$ برابر $[-۱,۱]$ خواهد بود. پس اگر وارون سینوس را با نماد $\sin^{-۱}$ نمایش دهیم آنگاه $\sin^{-۱} : [-۱,۱] \to [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ تابعی اکیدا صعودی و پیوسته است.



به علاوه با توجه به اینکه

$$\forall x \in (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \qquad \sin'(x) = \cos x \neq ۰$$

تابع $\sin^{-۱}$ بر $(-۱,۱)$ مشتق‌پذیر است. برای محاسبه مشتق این تابع بر بازه $(-۱,۱)$، توجه می‌کنیم که

$$\forall x \in (-۱,۱) \qquad \sin(\sin^{-۱} x) = x$$

در نتیجه با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه، خواهیم داشت

$$\cos(\sin^{-۱} x)\frac{d}{dx}\sin^{-۱} x = ۱$$

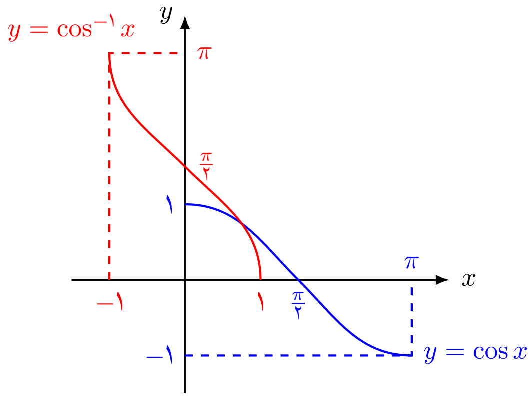
اما به سادگی مشاهده می‌شود که برای هر x در بازه $(-۱,۱)$، $\cos(\sin^{-۱} x) = \sqrt{۱ - x^۲}$. در نتیجه

$$\forall x \in (-۱,۱) \qquad \frac{d}{dx}\sin^{-۱} x = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

و از آنجا فرمول مهم زیر برای انتگرال نامعین به دست می‌آید.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}\, dx = \sin^{-۱} x + C$$

دقیقا مانند حالت قبل، با محدود کردن دامنه تعریف تابع کسینوس به بازه $[۰,\pi]$، تابع $\cos : [۰,\pi] \to [-۱,۱]$ تابعی وارون‌پذیر بوده، تابع وارون با نماد $\cos^{-۱}$ بر بازه $[-۱,۱]$ تعریف شده است. با توجه به ویژگی‌های تابع $\cos$ بر $[۰,\pi]$، تابع $\cos^{-۱} : [-۱,۱] \to [۰,\pi]$ تابعی اکیدا نزولی و پیوسته بر $[-۱,۱]$ بوده، بر $(-۱,۱)$ مشتق‌پذیر است.



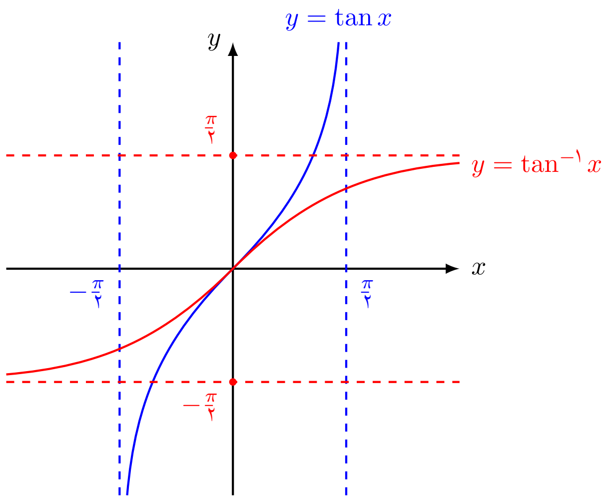
با روشی مشابه آنچه برای به دست آوردن مشتق تابع $\sin^{-۱}$ انجام دادیم، مشاهده می‌شود که

$$\forall x \in (-۱,۱) \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-۱} x = -\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

و از آنجا فرمول تابع اولیه زیر را خواهیم داشت.

$$\int \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}\,dx = -\cos^{-۱} x + C$$

تابع دیگری که وارون آن از اهمیت برخوردار است تابع تانژانت است. تابع $\tan : (-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}) \to \mathbb{R}$ تابعی اکیدا صعودی و در نتیجه یک به یک و از آنجا، وارون‌پذیر است. با توجه به رفتار حدی تابع تانژانت درکران‌های این دامنه تعریف و پیوستگی آن بر این بازه، مجموعه تصویر آن برابر تمام $\mathbb{R}$ خواهد بود. بنابر این تابع وارون آن، که با نماد $\tan^{-۱}$ نمایش داده می‌شود، تابعی تعریف شده بر $\mathbb{R}$ با مقادیر در بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ است. بر اساس خاصیت‌های تابع تانژانت بر $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$، تابع $\tan^{-۱} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ تابعی اکیدا صعودی، پیوسته و مشتق‌پذیر است.



همچنین

$$\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x=-\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}$$

با توجه به رابطه

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \tan(\tan^{-1}x)=x$$

و مشتق‌گیری از طرفین آن، خواهیم داشت

$$\tan'(\tan^{-1}x)\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=1 \quad \text{یا} \quad (1+\tan^2(\tan^{-1}x))\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=1$$

در نتیجه

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}$$

و به این ترتیب فرمول مهم زیر برای تابع اولیه به دست می‌آید.

$$\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\tan^{-1}x+C$$

تمرین. برای $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ تابع $\frac{1}{\cos x}$ را سکانت نامیده آن را با نماد $\sec x$ نشان می‌دهیم. نشان دهید تابع

$$\sec:[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]\to\{x\in\mathbb{R};|x|\geq 1\}$$

تابعی وارون‌پذیر است. اگر تابع وارون را با نماد $\sec^{-1}$ نشان دهیم نشان دهید برای هر x با $|x|>1$،

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

مثال. نشان دهید برای هر $x\neq 0$، $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & x>0\\ -\frac{\pi}{2} & x<0\end{cases}$.

فرض کنیم f تابع با دستور $f(x)=\tan^{-1}x+\tan^{-1}(\frac{1}{x})$ باشد. در این صورت f بر بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,\infty)$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است. داریم

$$\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty) \qquad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}(-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}=0$$

در نتیجه f بر هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,\infty)$ تابع ثابت است. یعنی ثوابت C_1 و C_2 وجود دارند که

$$\forall x \in (-\infty,0) \quad f(x) = C_1 \qquad \text{و} \qquad \forall x \in (0,\infty) \quad f(x) = C_2$$

به این ترتیب با انتخاب $x = -1$، خواهیم داشت $C_1 = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$. به همین ترتیب $C_2 = f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

مثال. برای $a,b \in \mathbb{R}$ با شرط $0 < a < b$ نشان دهید $\frac{b-a}{1+b^2} \leq \tan^{-1} b - \tan^{-1} a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$.

همانطورکه اشاره کردیم، تابع $\tan^{-1}$ بر $\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس این تابع بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر است. بنابر قضیه مقدار میانگین، عدد $c \in (a,b)$ وجود دارد که

$$\frac{\tan^{-1} b - \tan^{-1} a}{b-a} = (\tan^{-1})'(c) = \frac{1}{1+c^2} \tag{4}$$

اما از آنجا که $0 < a < c < b$، $1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2$ و در نتیجه

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$$

با جایگذاری عبارت $\frac{1}{1+c^2}$ از رابطه (۴) در نامساوی‌های فوق

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{\tan^{-1} b - \tan^{-1} a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

نهایتا با ضرب طرفین رابطه فوق در $b-a$ که مقداری مثبت است نامساوی خواسته شده به دست می‌آید.

مثال مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

الف) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$.

اگر از تغییر متغیر $u = x^2$ استفاده کنیم آنگاه $du = 2x\,dx$ و یا $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$. در نتیجه

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\tan^{-1} u + C = \frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2) + C$$

ب) $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$.

توجه می‌کنیم که $2-x^2=2(1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2)$. به این ترتیب با استفاده از تغییر متغیر $u=\frac{x}{\sqrt{2}}$ خواهیم داشت $du=\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx$. در نتیجه

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}\,dx=\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\sin^{-1}u+C=\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{2}})+C$$

تمرین‌های فصل پنجم.

۱. فرض کنید $f(x)=\int_{3}^{x}\sqrt{1+t^4}\,dt$. ثابت کنید وارون f موجود و مشتق‌پذیر است. مقدار $(f^{-1})'(0)$ را بدست آورید.

۲. فرض کنید f تابع یک به یک و مشتق‌پذیر باشد بطوریکه $f(3)=2$ و $f'(3)=\frac{1}{9}$. اگر $g(x)=\frac{1}{f^{-1}(x)}$، مقدار $g'(2)$ را بدست آورید.

۳. فرض کنید f یک تابع یک به یک و دوبار مشتق‌پذیر باشد به‌طوریکه $f'(x)\neq 0$. ثابت کنید

$$(f^{-1})''(x)=-\frac{f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^3}.$$

ثابت کنید اگر تقعر f رو به بالا باشد، آنگاه تقعر f^{-1} رو به پایین است.

۴. دامنه و برد توابع $f(x)=\ln\ln x$ و $g(x)=\sqrt{1-\ln x}$ را بدست آورید.

۵. فرض کنید $f(x)=2x+\ln x$. مقدار $(f^{-1})'(2)$ را بدست آورید.

۶. ثابت کنید برای هر n طبیعی

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}.$$

۷. نشان دهید برای هر $x\geq 0$، $\frac{x}{x+1}\leq \ln(1+x)$.

۸. به ازای چه مقادیری از c معادله $\ln x=cx^2$ دقیقاً یک جواب دارد؟

۹. انتگرال‌های معین و نامعین زیر را بدست آورید.

الف) $\int_{e}^{6}\frac{dx}{x\ln x}$ ب) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$ ج) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$ د) $\int_{4}^{9}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

ه) $\int_{1}^{2} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ و) $\int \frac{\sqrt{1+e^{-x}}}{e^x}\,dx$ ز) $\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$ ح) $\int \frac{2^x}{2^x+1}\,dx$

۱۰. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر بوده، برای هر x، $f'(x)=f(x)$. اگر $f(0)=1$ نشان دهید $f(x)=e^x$.

۱۱. نشان دهید برای هر $x>0$، $\ln(1+x) > \frac{\tan^{-1}x}{x+1}$.

۱۲. نشان دهید معادله $e^x+x=0$ تنها یک ریشه دارد.

۱۳. مقدار حدود زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}\cos x$ ب) $\lim_{x\to(\pi/2)^+} e^{\tan x}$ ج) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{3x}}$ د) $\lim_{x\to 0^+} x^{-\ln x}$

۱۴. مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع $y=e^{ax}$ در معادله $y+y'=y''$ صدق کند.

۱۵. مقدار a را طوری تعیین کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e.$$

۱۶. اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^2e^{-x/2}$ را روی بازه $[-1,6]$ بدست آورید.

۱۷. حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به منحنی‌های $y=e^x$، $y=0$، $x=0$ و $x=1$ حول محور xها را بدست آورید.

۱۸. کلیه اکسترمم‌های تابع $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ با دستور $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ را تعیین کنید. نمودار این تابع را رسم کنید.

۱۹. ثابت کنید $\sin^{-1}(x)+\cos^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$.

۲۰. انتگرال‌های معین و نامعین زیر را بدست آورید.

الف) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ ب) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ ج) $\int \frac{\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ د) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

ه) $\int \tanh x\,dx$ و) $\int \sinh(1+4x)\,dx$ ز) $\int \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx$ ح) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{16t^2+1}}\,dx$

۲۱. پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع f در $x=0$ را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x\tan^{-1}(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

۲۲. نشان دهید برای هر $x\in\mathbb{R}$، $|\tanh x|\le|x|$.

۲۳. با استفاده از قاعده هوپیتال حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ب) $\lim_{x\to ۰} \frac{\tanh x}{\tan x}$ ج) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sinh x - x}{x^۳}$ د) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin^{-۱} x}{x}$

ه) $\lim_{x\to ۰} \cot x - \frac{۱}{x}$ و) $\lim_{x\to ۱^+} x^{۱/(۱-x)}$ ز) $\lim_{x\to+\infty} (e^x + x)^{\frac{۱}{x}}$ ح) $\lim_{x\to ۰^+} (\cos x)^{۱/x^۲}$

۲۴. فرض کنید f یک تابع مثبت باشد. اگر $\lim_{x\to a} f(x) = ۰$ و $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$، نشان دهید که $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = ۰$.

۲۵. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$ نشان دهید f در صفر پیوسته است اما مشتق‌پذیر نیست.

تمرین‌های تکمیلی.

۱. معادله خط مماس بر منحنی به معادله $xe^y + ye^x = ۱$ در نقطه $(۰,۱)$ را بدست آورید.

۲. الف) ثابت کنید برای هر $x \geq ۰$ داریم $e^x \geq ۱ + x$.

ب) با کمک الف، ثابت کنید برای هر $x \geq ۰$ داریم $e^x \geq ۱ + x + \frac{x^۲}{۲}$.

ج) ثابت کنید برای هر $x \geq ۰$ و هر عدد طبیعی n، داریم $e^x \geq ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

د) با کمک (ج) برای هر n طبیعی ثابت کنید $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

۳. روابط زیر را ثابت کنید.

الف) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

ب) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

ج) $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{۱ + \tanh x \tanh y}$.

۴. ثابت کنید برای $xy \neq ۱$ داریم

$$\tan^{-۱}(x) + \tan^{-۱}(y) = \tan^{-۱} \frac{x+y}{۱-xy}.$$

فصل ششم
روش‌های انتگرال‌گیری

همانطور که در فصل چهارم مشاهده کردیم، بنابر قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال برای محاسبه انتگرال معین توابع نیازمند محاسبه تابع اولیه آنها هستیم. در این فصل با چند روش شاخص در محاسبه تابع اولیه، یعنی روش جز به جز، روش تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولوی و روش کسرهای جزئی، آشنا می‌شویم. در بخش پایانی این فصل نیز با کاستن محدودیت‌ها در تعریف انتگرال معین، با مفهومی به نام انتگرال ناسره آشنا خواهیم شد.

روش جز به جز.
روش جز به جز در محاسبه انتگرال نامعین مبتنی بر فرمول مشتق حاصل‌ضرب دو تابع است. فرض کنیم $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند. در این صورت با توجه به رابطه

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

دستور انتگرال نامعین زیر را خواهیم داشت

$$\int \Big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\Big)\, dx = \int \Big(u(x)v(x)\Big)'\, dx = u(x)v(x) + C \qquad (۵)$$

از طرف دیگر روشن است که برای محاسبه تابع اولیه مجموع دو تابع، می‌توانیم توابع اولیه هر یک از دو تابع را ابتدا محاسبه کرده، سپس دو تابع اولیه را با یکدیگر جمع کنیم. بر این مبنا

$$\int \Big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\Big)\, dx = \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx$$

با جایگذاری عبارت اخیر در فرمول (۵) و انتقال یکی از انتگرال‌ها به طرف دیگر، فرمول زیر حاصل می‌شود.

$$\int u'(x)v(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\, dx$$

توجه می‌کنیم که با ظاهر شدن انتگرال نامعین در دو طرف تساوی فوق دیگر نیازی به قرار دادن ثابت C در این فرمول نیست. فرمول فوق به نام روش جز به جز در محاسبه انتگرال نامعین نامیده می‌شود و همانگونه که مشاهده خواهیم کرد روشی موثر در محاسبه برخی انتگرال‌ها است. برای اینکه رابطه فوق را ساده‌تر به ذهن بسپاریم می‌توانیم از قابلیت نمادهای ظاهر شده در انتگرال

نامعین استفاده کنیم. در واقع اگر از نماد لایب‌نیتز برای مشتق دو تابع $u(x)$ و $v(x)$ استفاده کنیم آنگاه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \qquad \text{و} \qquad v'(x) = \frac{dv}{dx}$$

به این ترتیب، با ضرب طرفین دو رابطه فوق در دیفرانسیل dx خواهیم داشت

$$du = u'(x)\,dx \qquad \text{و} \qquad dv = v'(x)\,dx$$

نهایتا با قرار دادن دو دیفرانسیل du و dv در فرمول انتگرال‌گیری جز به جز و نادیده گرفتن متغیر x در آن، فرمول ساده‌تر زیر برای روش جز به جز حاصل می‌شود.

$$\int v\,du = uv - \int u\,dv$$

اکنون با چند مثال نحوه استفاده از فرمول اخیر در محاسبه انتگرال را مشاهده می‌کنیم.

مثال. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

الف) $\int x \sin x\, dx$.

برای مجاسبه این انتگرال اگر قرار دهیم $v = x$ و $du = \sin x\, dx$ (یا به طور معادل، اگر $u'(x) = \sin x$) آنگاه

$$dv = v'(x)\,dx = dx \qquad \text{و} \qquad u(x) = -\cos x$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int x\sin x\,dx &= \int v\,du \\
&= uv - \int u\,dv \\
&= -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx \\
&= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C
\end{aligned}$$

ب) $\int xe^{2x}\,dx$.

با انتخاب $v = x$ و $du = e^{۲x}\,dx$، خواهیم داشت $dv = dx$ و $u = \frac{۱}{۲}e^{۲x}$. در نتیجه

$$\int xe^{۲x}dx = \int v\,du = uv - \int u\,dv = \frac{۱}{۲}xe^{۲x} - \frac{۱}{۲}\int e^{۲x}\,dx = \frac{۱}{۲}xe^{۲x} - \frac{۱}{۴}e^{۲x} + C$$

ج) $\int \cos(\sqrt[۳]{x})\,dx$.

برای محاسبه این انتگرال ابتدا از تغییر متغیر $t = \sqrt[۳]{x}$ یا $x = t^۳$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $dx = ۳t^۲\,dt$ و از آنجا

$$\int \cos(\sqrt[۳]{x})\,dx = ۳\int t^۲\cos t\,dt$$

اکنون برای محاسبه انتگرال اخیر، با قرار دادن $v = t^۲$ و $du = \cos t\,dt$ خواهیم داشت $dv = ۲t\,dt$ و $u = \sin t$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int t^۲\cos t\,dt &= \int v\,du\\ &= uv - \int u\,dv\\ &= t^۲\sin t - ۲\int t\sin t\,dt\end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال آخر نیز یکبار دیگر از روش جز به جز استفاده می‌کنیم، یا در اینجا از مثال (الف) استفاده می‌کنیم. به این ترتیب

$$\int t^۲\cos t\,dt = t^۲\sin t + ۲t\cos t - ۲\sin t + C$$

نهایتا برای تکمیل بحث و محاسبه انتگرالی که کار را با آن آغاز کرده بودیم، به جای متغیر t از $\sqrt[۳]{x}$ استفاده می‌کنیم. پس

$$\int \cos(\sqrt[۳]{x})\,dx = ۳\Big((\sqrt[۳]{x})^۲\sin(\sqrt[۳]{x}) + ۲\sqrt[۳]{x}\cos(\sqrt[۳]{x}) - ۲\sin(\sqrt[۳]{x})\Big) + C$$

د) $\int \ln x\,dx$.

برای حل این انتگرال به روش جز به جز تنها امکانی که می‌توان از آن استفاده کرد عبارت است از $v = \ln x$ و $du = dx$. در نتیجه $u = x$ و $dv = \frac{۱}{x}\,dx$. به این ترتیب

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int v\,du\\ &= uv - \int u\,dv\end{aligned}$$

$$= \quad x\ln x - \int x\frac{۱}{x}\,dx = x\ln x - x + C$$

ه) $\int e^{-x}\sin x\,dx$.

برای حل این انتگرل، قرار می‌دهیم $v = e^{-x}$ و $du = \sin x\,dx$. در نتیجه $dv = -e^{-x}\,dx$ و $u = -\cos x$. به این ترتیب

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\sin x\,dx &= \int v\,du \\
&= uv - \int u\,dv \\
&= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx
\end{aligned} \tag{۶}$$

برای محاسبه انتگرال آخری مجددا از روش جز به جز استفاده می‌کنیم. مانند قسمت قبل، قرار می‌دهیم $v = e^{-x}$ و $du = \cos x\,dx$ و از آنجا $dv = -e^{-x}\,dx$ و $u = \sin x$. در نتیجه

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x\,dx$$

با جایگذاری عبارت اخیر در رابطه (۶)،

$$\int e^{-x}\sin x = -e^{-x}\cos x - \left(e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x\,dx\right)$$

به این ترتیب با جابجا کردن انتگرال مورد نظر و قرار دادن آن در یک طرف تساوی فوق، حاصل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = \frac{۱}{۲}(-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x) + C$$

و) $\int \cos(\ln x)\,dx$.

برای حل این مسئله نخست از تغییر متغیر $t = \ln x$ یا $x = e^t$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه $dx = e^t\,dt$. با جایگذاری متغیر جدید

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \int e^t\cos t\,dt$$

حل انتگرال اخیر دقیقا مانند مثال قبل بوده، تکمیل حل به عهده دانشجویان است.

ز) $\int \sec^{۳}\theta\,d\theta$.

با بازنویسی انتگرال فوق به صورت $\int \sec\theta \sec^۲\theta\, d\theta$ ، قرار می‌دهیم $v = \sec\theta$ و $du = \sec^۲\theta\, d\theta$. در نتیجه

$$u = \tan\theta \qquad \text{و} \qquad dv = \sec'\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned}\int \sec^۳\theta\, d\theta &= \int \sec\theta\sec^۲\theta\, d\theta\\ &= \sec\theta\tan\theta - \int \tan\theta(\sec\theta\tan\theta\, d\theta)\\ &= \sec\theta\tan\theta - \int \tan^۲\theta\sec\theta\, d\theta\end{aligned}$$

اما $\tan^۲\theta = \sec^۲\theta - ۱$. در نتیجه

$$\int \sec^۳\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int(\sec^۲\theta - ۱)\sec\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int\sec^۳\theta\, d\theta + \int\sec\theta\, d\theta$$

با جابجا کردن انتگرال $\int \sec^۳\theta\, d\theta$ و قرار دادن آن در طرف اول تساوی فوق، حاصل شود

$$\int \sec^۳\theta\, d\theta = \frac{۱}{۲}(\sec\theta\tan\theta + \int\sec\theta\, d\theta) \tag{۷}$$

بنابر این کافی است انتگرال آخر ظاهر شده در رابطه فوق را محاسبه کنیم. محاسبه عبارت $\int \sec\theta\, d\theta$ به چند روش امکان‌پذیر است.

$$\int \sec\theta\, d\theta = \int \frac{۱}{\cos\theta}\, d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\cos^۲\theta}\, d\theta = \int \frac{\cos\theta}{۱ - \sin^۲\theta}\, d\theta$$

اکنون با تغییر متغیر $t = \sin\theta$ خواهیم داشت $dt = \cos\theta\, d\theta$. در نتیجه

$$\int \sec\theta\, d\theta = \int \frac{dt}{۱ - t^۲} = \tanh^{-۱}(t) + C = \tanh^{-۱}(\sin\theta) + C$$

روش دیگر در محاسبه $\int \sec\theta\, d\theta$ ، ضرب کردن عبارت $\sec\theta$ در $\dfrac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$ است. در این صورت

$$\int \sec\theta\, d\theta = \int \frac{\sec^۲\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\, d\theta$$

اکنون با تغییر متغیر $t = \sec\theta + \tan\theta$ خواهیم داشت $dt = (\sec\theta\tan\theta + \sec^۲\theta)\,d\theta$. در نتیجه

$$\int \sec\theta\,d\theta = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|sec\theta + \tan\theta| + C$$

نهایتا با جایگذاری مقدار محاسبه شده برای $\int \sec\theta\,d\theta$ در رابطه (۷)، نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

روش جز به جز را می‌توانیم مستقیما برای محاسبه انتگرال معین نیز استفاده کنیم. در واقع برای دو تابع مشتق‌پذیر $u(x)$ و $v(x)$ با مشتقات پیوسته بر بازه‌ای چون $[a,b]$، با استفاده از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b \Big(u(x)v(x)\Big)'\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

و از آنجا

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

که همان فرمول جز به جز ولی این بار برای انتگرال معین است.

مثال. مقدار انتگرال معین $\int_۰^۱ \tan^{-۱} x\,dx$ را حساب کنید.

با قرار دادن $du = dx$ و $v = \tan^{-۱} x$، خواهیم داشت $u = x$ و $dv = \frac{۱}{۱+x^۲}\,dx$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_۰^۱ \tan^{-۱} x\,dx &= x\tan^{-۱} x\Big|_۰^۱ - \int_۰^۱ \frac{x}{۱+x^۲}\,dx \\ &= ۱\times\tan^{-۱}(۱) - \frac{۱}{۲}\int_۱^۲ \frac{dt}{t} \\ &= \frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}\ln ۲ \end{aligned}$$

در محاسبه انتگرال $\int_۰^۱ \frac{x}{۱+x^۲}\,dx$ از تغییر متغیر $t = ۱ + x^۲$ استفاده کرده‌ایم.

تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولوی

مبحث تغییر متغیر در محاسبه انتگرال را قبلا در فصل چهارم درس مشاهده کرده‌ایم. در اینجا دسته خاصی از تغییر متغیرها را که مبتنی بر برقراری اتحادهای خاصی بین توابع مثلثاتی و توابع هذلولوی است بررسی می‌کنیم. ابتدا اتحادهای مثلثاتی و اتحادهای

هذلولوی که در این دسته از تغییر متغیرها مورد استفاده هستند را مشاهده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&1-\sin^2\theta=\cos^2\theta\\
&1+\tan^2\theta=\sec^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\\
&\sec^2\theta-1=\tan^2\theta
\end{aligned}$$

به همین ترتیب،

$$\begin{aligned}
&\cosh^2 t-1=\sinh^2 t\\
&1+\sinh^2 t=\cosh^2 t\\
&1-\tanh^2 t=\frac{1}{\cosh^2 t}
\end{aligned}$$

بر اساس اتحادهای فوق، این دسته از تغییر متغیرها در ساده‌سازی توابعی شامل عباراتی به فرم $\sqrt{x^2+a^2}$، $\sqrt{x^2-a^2}$ و $\sqrt{a^2-x^2}$ می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. در زیر با چند مثال نحوه استفاده از این تغییر متغیرها را مشاهده می‌کنیم.

مثال. هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$.

در اینجا می‌توان از هر یک از تغییر متغیرهای $x=\sin\theta$ یا $x=\tanh t$ استفاده نمود. ما مسئله را با تغییر متغیر اول حل می‌کنیم ولی انتظار داریم دانشجویان تغییر متغیر دیگر را نیز اعمال کرده، نتایج حاصل را با هم مقایسه کنند. تحت تغییر متغیر $x=\sin\theta$ خواهیم داشت $dx=\cos\theta\,d\theta$. همچنین توجه می‌کنیم در عبارت $\sqrt{1-x^2}$ تغییرات x در بازه $[-1,1]$ محدود است. تحت تغییر متغیر فوق، برای داشتن این محدوده تغییرات برای x، کافی است θ در بازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ تغییر کند. به این ترتیب

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta=\int\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta=\int|\cos\theta|\cos\theta\,d\theta$$

اما با تغییر θ در بازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$، مقدار $\cos\theta$ نامنفی بوده، در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int\cos^2\theta\,d\theta\\
&= \int\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1)\,d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta) + C \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\theta + C \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x + C \end{aligned}$$

در روابط فوق از اتحادهای مثلثاتی $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ و $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ استفاده کرده‌ایم.

ب) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$.

برای حل این انتگرال نیز می‌توانیم از هر یک از تغییر متغیرهای $x = 2\sin\theta$ (با $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$) یا $x = 2\tanh t$ (با محدوده تغییرات t در مجموعه $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$) استفاده کنیم. ما برای این مثال مجددا از تغییر متغیر اول استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} = \frac{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta} = \frac{|\cos\theta|}{\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

همچنین $dx = 2\cos\theta\,d\theta$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx &= \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta} 2\cos\theta\,d\theta \\ &= 2\int \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta = 2\int \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta \\ &= 2\int (\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta)\,d\theta = 2(\int \frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta) + 2\cos\theta \\ &= 2\int \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta + 2\cos\theta \\ &= -2\tanh^{-1}(\cos\theta) + 2\cos\theta + C \\ &= -2\tanh^{-1}(\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}) + 2\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2} + C \end{aligned}$$

در محاسبه عبارت $\int \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta$ از تغییر متغیر $t = \cos\theta$ استفاده شده است.

ج) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+2}}\,dx$.

برای محاسبه این انتگرال، هر یک از تغییر متغیرهای $x = \sqrt{2}\tan\theta$ یا $x = \sqrt{2}\sinh t$ می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. ما از تغییر متغیر دوم استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\frac{1}{x^2\sqrt{2+x^2}} = \frac{1}{2\sinh^2 t\sqrt{2+2\sinh^2 t}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sinh^2 t\sqrt{1+\sinh^2 t}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sinh^2 t\cosh t}$$

همچنین $dx = \sqrt{۲}\cosh t\, dt$. در نتیجه

$$\int \frac{۱}{x^۲\sqrt{۲+x^۲}}\, dx = \int \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \frac{۱}{\sinh^۲ t \cosh t} \sqrt{۲}\cosh t\, dt = \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{\sinh^۲ t}\, dt$$

از طرف دیگر اگر عبارت $\dfrac{\cosh t}{\sinh t}$ را با نماد $\coth t$ نمایش دهیم (کتانژانت هذلولوی) آنگاه

$$\coth'(t) = \frac{\sinh^۲ t - \cosh^۲ t}{\sinh^۲ t} = \frac{-۱}{\sinh^۲ t}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \int \frac{۱}{x^۲\sqrt{۲+x^۲}}\, dx &= \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{\sinh^۲ t}\, dt = -\frac{۱}{۲}\coth t + C \\ &= -\frac{۱}{۲}\frac{\cosh t}{\sinh t} = -\frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{۱+\sinh^۲ t}}{\sinh t} + C \\ &= -\frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{۱+(\frac{x}{\sqrt{۲}})^۲}}{\frac{x}{\sqrt{۲}}} + C \end{aligned}$$

در روابط فوق از تساوی $\sinh t = \dfrac{x}{\sqrt{۲}}$ استفاده شده است.

د) $\displaystyle\int \frac{۱}{(x^۲-۱)^{\frac{۳}{۲}}}\, dx$.

اگر $f(x) := \dfrac{۱}{(x^۲-۱)^{\frac{۳}{۲}}}$ آنگاه f بر دامنه $(-\infty, -۱) \cup (۱, \infty)$ تعریف شده است. به این ترتیب در این مسئله هدف یافتن تابع اولیه f بر دو بازه مجزای $(-\infty, -۱)$ و $(۱, \infty)$ است. توجه می‌کنیم که تابع‌های اولیه f بر بازه‌های فوق لزوما برابر نیستند. برای سهولت در بحث، ابتدا فرض کنیم $x > ۱$ (به عبارت دیگر، ابتدا تابع اولیه f بر بازه $(۱, \infty)$ را به دست می‌آوریم). برای حل انتگرال فوق، می‌توانیم از هر یک از تغییر متغیرهای $x = \sec\theta$، $\theta \in (۰, \frac{\pi}{۲})$ یا $x = \cosh t$، $t \in (۰, \infty)$، استفاده کنیم. ما در اینجا از تغییر متغیر هذلولی استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\frac{۱}{(x^۲-۱)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{(\cosh^۲ t - ۱)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{\sinh^۳ t} \qquad \text{و} \qquad dx = \sinh t\, dt$$

در نتیجه

$$\int \frac{۱}{(x^۲-۱)^{\frac{۳}{۲}}}\, dx = \int \frac{۱}{\sinh^۳ t}\sinh t\, dt = \int \frac{۱}{\sinh^۲ t}\, dt$$

$$\begin{aligned} &= -\coth t + C = -\frac{\cosh t}{\sinh t} + C = -\frac{\cosh t}{\sqrt{\cosh^۲ t - ۱}} + C \\ &= -\frac{x}{\sqrt{x^۲ - ۱}} + C \end{aligned}$$

در روابط فوق، با توجه به فرض $t > ۰$، یا $\sinh t > ۰$، از تساوی $\sinh t = \sqrt{\cosh^۲ t - ۱}$ استفاده کرده‌ایم. به این ترتیب، یک تابع اولیه f بر بازه $(۱, \infty)$ برابر $-\frac{x}{\sqrt{x^۲ - ۱}}$ است. اکنون اگر $x < -۱$ (یا به عبارت دیگر، بخواهیم تابع اولیه f بر بازه $(-\infty, -۱)$ را تعیین کنیم) آنگاه با استفاده از تغییر متغیر $x = -t$، خواهیم داشت

$$\int \frac{۱}{(x^۲ - ۱)^{\frac{۳}{۲}}}\, dx = \int \frac{۱}{(t^۲ - ۱)^{\frac{۳}{۲}}}\, (-dt)$$

که در آن $t > ۱$. در نتیجه با استفاده از بحث قسمت قبل،

$$\int \frac{۱}{(x^۲ - ۱)^{\frac{۳}{۲}}}\, dx = -\int \frac{۱}{(t^۲ - ۱)^{\frac{۳}{۲}}}\, dt = -\Big(-\frac{t}{\sqrt{t^۲ - ۱}}\Big) + C = \frac{-x}{\sqrt{x^۲ - ۱}} + C$$

پس در این مثال، شکل تابع اولیه f بر هر دو بازه $(-\infty, -۱)$ و $(۱, \infty)$ یکسان می‌باشد.

ه) $\int \frac{۱}{x\sqrt{۲ - x^۲}}\, dx$.

در این مثال از تغییر متغیر $x = \sqrt{۲}\sin\theta$، $\theta \in (-\frac{\pi}{۲}, ۰) \cup (۰, \frac{\pi}{۲})$، استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$\frac{۱}{x\sqrt{۲ - x^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}\sin\theta\sqrt{۲ - ۲\sin^۲\theta}} = \frac{۱}{۲\sin\theta|\cos\theta|} = \frac{۱}{۲\sin\theta\cos\theta}$$

و $dx = \sqrt{۲}\cos\theta$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \int \frac{۱}{x\sqrt{۲ - x^۲}}\, dx &= \int \frac{۱}{۲\sin\theta\cos\theta} \sqrt{۲}\cos\theta\, d\theta \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲}} \int \frac{۱}{\sin\theta}\, d\theta = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \int \frac{\sin\theta}{\sin^۲\theta}\, d\theta \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲}} \int \frac{\sin\theta}{۱ - \cos^۲\theta}\, d\theta \end{aligned}$$

برای انتگرال اخیر، اگر از تغییر متغیر $u = \cos\theta$ استفاده کنیم آنگاه، با توجه به فرض $\theta \in (-\frac{\pi}{۲}, ۰) \cup (۰, \frac{\pi}{۲})$، خواهیم داشت

$0 < |u| < 1$. در نتیجه

$$\int \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta = -\int \frac{1}{1-u^2}\,du = -\tanh^{-1} u + C = -\tanh^{-1}(\cos\theta) + C$$

و از آنجا

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}(\cos\theta) + C\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}(\sqrt{1-\sin^2\theta}) + C\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh^{-1}(\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}) + C\end{aligned}$$

و $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

با بازنویسی عبارت $\frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ به صورت $\frac{(x+1)-1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}$ یکی از دو تغییر متغیر $x+1 = 2\sin\theta$، $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$، یا $x+1 = 2\tanh t$، $t \in (-\infty, \infty)$، می‌تواند مفید باشد. ما در اینجا از تغییر متغیر دوم استفاده می‌کنیم. تحت این تغییر متغیر،

$$\frac{(x+1)-1}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \frac{2\tanh t - 1}{\sqrt{4-4\tanh^2 t}} = \frac{2\tanh t - 1}{\frac{2}{\cosh t}} \quad \text{و} \quad dx = \frac{2}{\cosh^2 t}\,dt$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx &= \int \frac{2\tanh t - 1}{\frac{2}{\cosh t}}\frac{2}{\cosh^2 t}\,dt = \int \frac{2\tanh t - 1}{\cosh t}\,dt\\ &= \int (\frac{2\sinh t}{\cosh^2 t} - \frac{1}{\cosh t})\,dt\\ &= \frac{-2}{\cosh t} - \int \frac{1}{\cosh t}\,dt \qquad (8)\end{aligned}$$

برای تعیین دو عبارت آخر بر حسب متغیر x، ابتدا با توجه به اینکه $\frac{1}{\cosh^2 t} = 1 - \tanh^2 t$، خواهیم داشت

$$\frac{-2}{\cosh t} = -2\sqrt{1-\tanh^2 t} = -2\sqrt{1-(\frac{x+1}{2})^2}$$

برای انتگرال آخر نیز با جایگذاری $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ در این انتگرال و ساده‌سازی خواهیم داشت

$$\int \frac{1}{\cosh t}\,dt = \int \frac{2}{e^t + e^{-t}}\,dt = \int \frac{2e^t}{e^{2t}+1}\,dt = 2\tan^{-1}(e^t) + C$$

قبلا در فصل پنجم، در بخش توابع وارون هذلولی، اشاره کرده‌ایم که برای هر متغیر چون $z \in (-1,1)$،

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+z}{1-z})$$

بر این اساس، با توجه به اینکه تحت تغییر متغیر $x + 1 = 2\tanh t$ داریم

$$t = \tanh^{-1}(\frac{x+1}{2}) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+\frac{x+1}{2}}{1-\frac{1+x}{2}}\Big) = \frac{1}{2}\ln(\frac{3+x}{1-x}) = \ln\sqrt{\frac{3+x}{1-x}}$$

خواهیم داشت $e^t = \sqrt{\frac{3+x}{1-x}}$ و در نتیجه

$$\int \frac{1}{\cosh t}\,dt = 2\tan^{-1}(e^t) + C = 2\tan^{-1}(\sqrt{\frac{3+x}{1-x}}) + C$$

به این ترتیب با جایگذاری این عبارت و مقدار $\frac{-2}{\cosh t}$ بر حسب x در رابطه (۸) نتیجه نهایی به دست می‌آید.

روش کسرهای جزئی.
این روش در محاسبه انتگرال توابع گویا بر حسب چندجمله‌ای‌ها، یعنی توابعی به فرم $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن توابع $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرد. ابتدا فرض کنیم درجه چندجمله‌ای صورت اکیدا کوچکتر از درجه چندجمله‌ای مخرج باشد. بنابر خاصیتی در جبر، هر چندجمله با ضرایب حقیقی مانند $Q(x)$ را می‌توانیم به حاصل‌ضرب عوامل درجه ۱ و درجه ۲ تحویل ناپذیر به صورت زیر تجزیه کنیم.

$$Q(x) = A(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}\cdots(x^2+b_\ell x+c_\ell)^{m_\ell}$$

تحت تجزیه فوق و با فرض $deg(P) < deg(Q)$، می‌توان نشان داد عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ به صورت مجموعی از کسرهای ساده‌تر مطابق قانون زیر قابل تجزیه است.

نظیر جمله $(x-a)^n$ در تجزیه Q، عبارتی به صورت

$$\frac{A_1}{x-a}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$$

و نظیر عبارت $(x^2+bx+c)^m$ در تجزیه Q، عبارتی به صورت

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

در تجزیه $\frac{P(x)}{Q(x)}$ به مجموعی از کسرهای ساده‌تر ظاهر می‌گردد.
با چند مثال نحوه استفاده از روش فوق را بررسی می‌کنیم.

مثال. هر یک از انتگرال‌های زیر را به دست آورید.
الف) $\int \frac{x+3}{x^2-1}\,dx$.
ابتدا عبارت گویای $\frac{x+3}{x^2-1}$ را که در آن درجه صورت (۱) اکیدا کمتر از درجه مخرج (۲) است به صورت مجموعی از کسرهای ساده‌تر تجزیه می‌کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که عبارت مخرج به صورت $x^2-1=(x-1)(x+1)$ تجزیه می‌شود. در نتیجه بنابر روش کلی فوق، ثوابت A و B وجود دارند که

$$\frac{x+3}{x^2-1}=\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

برای تعیین دو ثابت A و B، می‌توانیم دو کسر طرف دوم را مجددا با مخرج مشترک جمع نموده، عبارات صورت دو کسر را با یکدیگر مساوی قرار دهیم.

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

به این ترتیب برای اینکه تساوی دو عبارت صورت برای همه مقادیر x برقرار باشد ثوابت A و B باید در دستگاه معادلات زیر صدق نمایند.

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=3 \end{cases}$$

در نتیجه $A=2$ و $B=-1$ و از آنجا

$$\frac{x+3}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}+\frac{-1}{x+1}$$

بنابراین

$$\int \frac{x+3}{x^2-1}\,dx = \int (\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1})\,dx = 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \ln(\frac{(x-1)^2}{|x+1|}) + C$$

ب) $\int \frac{x}{x^2+x-2}\,dx$.

با توجه به اینکه $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$ و اینکه درجه صورت اکیدا کمتر از درجه مخرج است، دو ثابت A و B وجود دارند که

$$\frac{x}{x^2+x-2} = \frac{x}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

در این مثال با روش دیگری برای تعیین دو ثابت A و B آشنا می‌شویم. با ضرب طرفین رابطه فوق در عبارت $(x+2)(x-1)$ خواهیم داشت

$$x = A(x-1) + B(x+2)$$

با توجه به اینکه این تساوی به ازای همه مقادیر x بجز $x=-2$ و $x=1$، یعنی ریشه‌های مخرج، برقرار است، می‌توانیم حد طرفین را وقتی $x\to -2$ و $x\to 1$ حساب کنیم. طبیعی است که نتیجه حاصل همانند جایگذاری مقادیر $x=1$ و $x=-2$ در تساوی فوق خواهد بود. به این ترتیب، ثوابت A و B در معادلات زیر صدق می‌کنند.

$$1 = A(1-1) + B(1+2) \qquad \text{و} \qquad -2 = A(-2-1) + B(-2+2)$$

و از آنجا $A=\frac{2}{3}$ و $B=\frac{1}{3}$. در نتیجه

$$\frac{x}{x^2+x-2} = \frac{x}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{3}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{3}\frac{1}{x-1}$$

و نهایتا

$$\int \frac{x}{x^2+x-2}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx = \frac{2}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C$$

ج) $\int \frac{4x}{x^3+x^2+x+1}\,dx$.

با توجه به اینکه درجه چندجمله‌ای صورت اکیدا کمتر از درجه چندجمله‌ای مخرج است، با استفاده از قاعده فوق و با توجه به اینکه

$(x+۱)(x^۲+۱) = x^۳+x^۲+x+۱ = x^۲(x+۱)+x+۱$، ثابت‌های A، B و C وجود دارند به گونه‌ای که

$$\frac{۴x}{x^۳+x^۲+x+۱} = \frac{۴x}{(x+۱)(x^۲+۱)} = \frac{A}{x+۱} + \frac{Bx+c}{x^۲+۱}$$

برای تعیین ثابت‌های فوق، طرفین رابطه فوق را ابتدا در عبارت $(x+۱)(x^۲+۱)$ ضرب می‌کنیم. در نتیجه

$$۴x = A(x^۲+۱) + (Bx+C)(x+۱)$$

به این ترتیب اگر در رابطه اخیر مقدار x را برابر -۱ اختیار کنیم (یا در واقع اگر حد طرفین را به دست آوریم وقتی $x \to -۱$) خواهیم داشت $A = -۲$. مقدار به دست آمده برای A را در این عبارت قرار داده، جملات را جابجا می‌کنیم. در نتیجه

$$۴x + ۲(x^۲+۱) = (Bx+C)(x+۱) \qquad \text{یا} \qquad ۲(x+۱)^۲ = (Bx+C)(x+۱)$$

و از آنجا $Bx + C = ۲x + ۲$. پس

$$\frac{۴x}{x^۳+x^۲+x+۱} = \frac{-۲}{x+۱} + \frac{۲x+۲}{x^۲+۱}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned}\int \frac{۴x}{x^۳+x^۲+x+۱}\,dx &= \int \frac{-۲}{x+۱}\,dx + \int \frac{۲x}{x^۲+۱}\,dx + \int \frac{۲}{x^۲+۱}\,dx \\ &= -۲\ln|x+۱| + \ln(x^۲+۱) + ۲\tan^{-۱}x + C\end{aligned}$$

د) $\displaystyle\int \frac{x^۳-۸}{x^۲(x^۲+۴)}\,dx$.

مانند سه مثال قبل، در اینجا نیز ابتدا عبارت $\dfrac{x^۳-۸}{x^۲(x^۲+۴)}$ را به مجموعی از کسرهای جزئی تجزیه می‌کنیم. توجه کنیم که جمله $x^۲$ در عبارت مخرج در واقع چندجمله‌ای $(x-۰)^۲$ است. بنابر روش فوق، ثابت‌های $A_۱$، $A_۲$، B و C وجود دارند که

$$\frac{x^۳-۸}{x^۲(x^۲+۴)} = \frac{A_۱}{x} + \frac{A_۲}{x^۲} + \frac{Bx+C}{x^۲+۴}$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در جمله $x^۲(x^۲+۴)$،

$$x^۳ - ۸ = A_۱x(x^۲+۴) + A_۲(x^۲+۴) + (Bx+C)x^۲$$

و در نتیجه با قرار دادن $x = \circ$ در این رابطه خواهیم داشت $A_{۲} = -۲$. اکنون با جابجا کردن جملات

$$\begin{aligned} x^{۳} - ۸ + ۲(x^{۲} + ۴) = x^{۳} + ۲x^{۲} &= A_{۱}x(x^{۲} + ۴) + (Bx + C)x^{۲} \\ &= (A_{۱} + B)x^{۳} + Cx^{۲} + ۴A_{۱}x \end{aligned}$$

با برابر قرار دادن ضرایب توان‌های یکسان x در طرفین رابطه فوق، معادلات زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{cases} A_{۱} + B = ۱ \\ C = ۲ \\ A_{۱} = \circ \end{cases}$$

که جواب آن به صورت $A_{۱} = \circ$، $B = ۱$ و $C = ۲$ است. در نتیجه

$$\frac{x^{۳} - ۸}{x^{۲}(x^{۲} + ۴)} = \frac{-۲}{x^{۲}} + \frac{x + ۲}{x^{۲} + ۴}$$

و از آنجا

$$\int \frac{x^{۳} - ۸}{x^{۲}(x^{۲} + ۴)} = -۲ \ln |x| + \frac{۱}{۲} \ln(x^{۲} + ۴) + \tan^{-۱}(\frac{x}{۲}) + C$$

(لطفا جزئیات محاسبات فوق را انجام دهید.)

همانطور که در ابتدای این بخش اشاره کردیم، شرط کوچکتر بودن درجه چندجمله‌ای صورت از مخرج در روش تجزیه به کسرهای جزئی شرطی مهم است. در صورتی که درجه چندجمله‌ای صورت بزرگتر یا مساوی درجه چندجمله‌ای مخرج باشد آنگاه ابتدا با تقسیم چندجمله‌ای صورت به مخرج، تابع گویای مورد نظر را به صورت مجموع یک چندجمله‌ای و تابعی گویا بر حسب چندجمله‌ای‌ها که در آن درجه صورت اکیدا کمتر از درجه مخرج باشد می‌نویسیم. سپس روش فوق را در محاسبه انتگرال به کار می‌گیریم.

مثال. مطلوب است محاسبه انتگرال $\int \frac{x^{۵} + x - ۱}{x^{۳} - ۱} \, dx$.

همانگونه که مشاهده می‌کنیم در اینجا درجه چندجمله‌ای صورت برابر ۵ و بزرگتر از درجه چندجمله‌ای مخرج (یعنی ۳) است. پس ابتدا با استفاده از الگوریتم تقسیم چندجمله‌ای‌ها، عبارت $x^{۵} + x - ۱$ را بر $x^{۳} - ۱$ تقسیم می‌کنیم. در نتیجه این تقسیم

$$\frac{x^{۵} + x - ۱}{x^{۳} - ۱} = x^{۲} + \frac{x^{۲} + x - ۱}{x^{۳} - ۱} = x^{۲} + \frac{x^{۲} + x - ۱}{(x - ۱)(x^{۲} + x + ۱)}$$

بنابر این
$$\int \frac{x^5+x-1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \int \frac{x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

برای تکمیل بحث، اکنون به محاسبه انتگرال $\displaystyle\int \frac{x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx$ می‌پردازیم. توجه می‌کنیم که جمله x^2+x+1 در عبارت مخرج، یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر است. بنابر روشی که در ابتدای این بخش اشاره شده است، ثابت‌های A، B و C وجود دارند که
$$\frac{x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

با حلی مشابه مثال‌های قبل، ثابت‌های فوق به صورت $A=\frac{1}{3}$، $B=\frac{2}{3}$ و $C=\frac{4}{3}$ به دست می‌آیند. در نتیجه

$$\int \frac{x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx = \int \Big(\frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}}{x^2+x+1}\Big)\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx$$

برای محاسبه انتگرال آخر نیز توجه می‌کنیم که $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$. در این حالت استفاده از تغییر متغیر $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u$ باعث ساده شدن محاسبات می‌شود. انجام محاسبات و تکمیل بحث را به عهده دانشجویان می‌گذاریم.

چند مثال.

در این بخش، با چند مثال، تغییر متغیرهای مختلفی که برخی موارد منجر به حل یک انتگرال می‌شود را مشاهده می‌کنیم.

مثال. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

الف) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$.

برای حل این انتگرل، اگر از تغییر متغیر $u=\sqrt{x+1}$ استفاده کنیم آنگاه $x=u^2-1$ و $dx=2u\,du$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx &= \int \frac{u}{u^2-1}2u\,du = \int \frac{2u^2}{u^2-1}\,du\\
&= \int \Big(2+\frac{2}{u^2-1}\Big)\,du = \int \Big(2+\frac{1}{u-1}+\frac{-1}{u+1}\Big)\,du\\
&= 2u + \ln|u-1| + \ln|u+1| + C\\
&= 2\sqrt{x+1} + \ln|\sqrt{x+1}-1| + \ln(\sqrt{x+1}+1) + C
\end{aligned}$$

در حصول نتیجه فوق از تجزیه $\frac{2}{u^2-1} = \frac{1}{u-1} + \frac{-1}{u+1}$، مطابق آنچه در بخش قبل مشاهده کردیم، استفاده شده است.

ب) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

در اینجا با استفاده از تغییر متغیر $u=\sqrt[3]{x}$ خواهیم داشت $x=u^3$ و $dx=3u^2\,du$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int\frac{1}{1+u}3u^2\,du=3\int\frac{u^2-1+1}{u+1}\,du\\ &= 3\int\Big(u-1+\frac{1}{u+1}\Big)\,du\\ &= 3\Big(\frac{1}{2}u^2-u+\ln|u+1|\Big)+C\\ &= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x})^3-3\sqrt[3]{x}+3\ln|\sqrt[3]{x}+1|+C\end{aligned}$$

ج) $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

برای این انتگرال از تغییر متغیر $x=u^6$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $dx=6u^5\,du$ و

$$\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{u^3}{1+u^2}$$

در نتیجه

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\frac{u^3}{1+u^2}6u^5\,du=6\int\frac{u^8}{1+u^2}\,du$$

برای حل انتگرال اخیر، با استفاده از روش بخش قبل، ابتدا چندجمله‌ای صورت را به مخرج تقسیم کرده، عبارت $\frac{u^8}{1+u^2}$ را به صورت مجموع یک چندجمله‌ای (بر حسب u) و عبارتی گویا که مخرج آن جمله $1+u^2$ است می‌نویسیم. در این صورت محاسبه انتگرال به سادگی امکان‌پذیر می‌گردد. انجام این جزئیات را به عهده دانشجویان می‌گذاریم.

د) $\int\frac{1}{e^x+1}\,dx$.

اگر از تغییر متغیر $u=e^x$ استفاده کنیم آنگاه $x=\ln u$ و در نتیجه $dx=\frac{du}{u}$. به این ترتیب

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{e^x+1}\,dx &= \int\frac{1}{u+1}\frac{1}{u}\,du=\int\frac{1}{u(u+1)}\,du\\ &= \int\Big(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\Big)\,du\\ &= \ln|u|-\ln|u+1|+C\\ &= \ln(e^x)-\ln(e^x+1)+C=x-\ln(e^x+1)+C\end{aligned}$$

در اینجا نیز از تجزیه $\frac{1}{u(u+1)}=\frac{1}{u}+\frac{-1}{u+1}$ استفاده کرده‌ایم.

و) $\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\, dx$.

در حل این انتگرال، نخست از اتحادهای مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \text{و} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\, dx &= \int \frac{1}{\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + 1}\, dx \\
&= \int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2} + 1 - \tan^2\frac{x}{2} + 1 + \tan^2\frac{x}{2}}\, dx \\
&= \int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2} + 2}\, dx
\end{aligned}$$

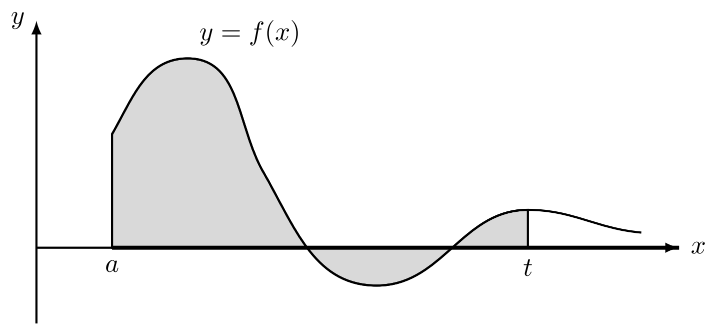
اکنون از تغییر متغیر $u = \tan\frac{x}{2}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $du = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})\, dx$ و یا $2\, du = (1+\tan^2\frac{x}{2})\, dx$. در نتیجه

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\, dx = \int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}+2}\, dx = \int \frac{du}{u+1} = \ln|u+1| + C = \ln|(\tan\frac{x}{2}) + 1| + C$$

انتگرال‌های ناسره.

در فصل چهارم درس با مفهوم انتگرال معین آشنا شدیم. در ارائه این مفهوم، فرض کردیم f تابعی کراندار تعریف شده بر بازه‌ای بسته و کراندار چون $[a,b]$ باشد. در واقع دو شرط کراندار بودن تابع و بسته و کراندار بودن بازه‌ای که تابع بر آن تعریف شده است شرایطی هستند که ارائه تعریف انتگرال معین را از نظر ریاضی ممکن می‌سازند. در مقابل در برخی کاربردهای انتگرال، لازم است یکی از این دو شرط، یا گاهی هر دو شرط، تقلیل داده شود و مفهوم انتگرال را بر بازه‌ای بیکران، یا برای تابعی بیکران گسترش دهیم. در این بخش به این مسئله مبادرت کرده، مفهومی تحت نام انتگرال ناسره را معرفی می‌کنیم. ابتدا دو حالت انتگرال تابعی کراندار بر بازه‌ای بیکران و انتگرال تابعی بیکران بر بازه‌ای کراندار را جداگانه در نظر می‌گیریم.

انتگرال ناسره نوع اول (تابعی کراندار بر بازه‌ای بیکران). فرض کنیم f تابعی کراندار تعریف شده بر بازه‌ای بیکران چون $[a,\infty)$ باشد. اگر برای هر عدد $t > a$، انتگرال $\int_a^t f(x)\, dx$ وجود داشته، $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\, dx$ وجود داشته باشد آنگاه f را بر بازه بیکران $[a,\infty)$ انتگرال‌پذیر نامیده، حد فوق را با نماد $\int_a^\infty f(x)\, dx$ نشان می‌دهیم.



پس

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

در این حالت اصطلاحا انتگرال $\int_a^\infty f$ را که از این به بعد به آن انتگرال ناسره گوییم، همگرا می‌نامیم. در غیر این صورت، این انتگرال ناسره را واگرا می‌نامیم.

به همین ترتیب، فرض کنیم f بر بازه‌ای چون $(-\infty, a]$ تعریف شده بر این بازه کراندار باشد و برای هر $t < a$، انتگرال $\int_t^a f(x)\,dx$ وجود داشته باشد. اگر حد این انتگرال وقتی $t \to -\infty$ وجود داشته باشد آنگاه انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ را همگرا نامیده، مقدار آن را برابر $\lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx$ تعریف می‌کنیم.

نهایتا، اگر f تابعی کراندار تعریف شده بر $\mathbb{R}$ بوده، عددی مانند $a \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که هر دو انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ و $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرا باشند آنگاه انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ را همگرا و مقدار آن را برابر مجموع دو انتگرال ناسره فوق تعریف می‌کنیم. پس در این حالت

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

می‌توان ثابت کرد که همگرایی انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ و مقدار آن مستقل از انتخاب نقطه a است. همچنین باید توجه داشت که اگر یکی از دو انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^a f$ یا $\int_a^\infty f$ واگرا باشند آنگاه، بدون توجه به رفتار انتگرال ناسره دیگر، انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^\infty f$ واگرا نامیده می‌شود.

مثال. همگرایی یا واگرایی هر یک از انتگرال‌های ناسره زیر را بررسی کنید.
الف) $\int_۱^\infty \frac{۱}{x^p}\,dx$ که در آن $p > ۰$ مقداری ثابت است.

برای $t > 1$،

$$\int_1^t \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^t x^{-p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_1^t & p \neq 1 \\ \ln x\Big|_1^t & p = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{-p+1}(t^{-p+1} - 1) & p \neq 1 \\ \ln t & p = 1 \end{cases}$$

اکنون وقتی $t \to \infty$، در حالتی که $0 < p \leq 1$، $\int_1^t x^{-p}\,dx \to \infty$. در نتیجه در این حالت انتگرال ناسره واگرا است. در حالتی که $p > 1$،

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{-p+1}(t^{-p+1} - 1) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{-p+1}(\frac{1}{t^{p-1}} - 1) = \frac{1}{-p+1} \times (0 - 1) = \frac{1}{p-1}$$

پس در این حالت انتگرال ناسره $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ همگرا و مقدار آن برابر $\frac{1}{p-1}$ است.
پس به طور مثال، انتگرال‌های ناسره $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ (که در آن $p = 1$) و $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (که در آن $p = \frac{1}{2}$) واگرا هستند در حالی که انتگرال ناسره $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ (که در آن $p = 2$) همگرا و مقدار آن برابر $1 = \frac{1}{2-1}$ است.

ب) $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$.

برای $t < 0$،

$$\int_t^0 e^x\,dx = e^x\Big|_t^0 = 1 - e^t$$

در نتیجه

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^0 e^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} (1 - e^t) = 1$$

پس انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$ همگرا و مقدار آن برابر ۱ است.

ج) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

برای بررسی همگرایی یا واگرایی این انتگرال ابتدا نقطه‌ای دلخواه در $\mathbb{R}$ چون a انتخاب کرده، همگرایی یا واگرایی دو انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^a \frac{1}{1+x^2}\,dx$ و $\int_a^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ را مطالعه می‌کنیم. در اینجا مقدار a را برابر ۰ انتخاب می‌کنیم. برای $t > 0$،

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1} x\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1} t = \frac{\pi}{2}$$

به همین ترتیب، برای $t < ۰$،

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^{۰} \frac{۱}{۱+x^{۲}}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \tan^{-۱} x\Big|_t^{۰} = \lim_{t\to-\infty}(-\tan^{-۱} t) = -(-\frac{\pi}{۲}) = \frac{\pi}{۲}$$

با توجه به اینکه هر دو انتگرال ناسره فوق همگرا هستند انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{۱+x^{۲}}\,dx$ همگرا و مقدار آن برابر $\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲} = \pi$ است.

در بسیاری از موارد بررسی همگرایی یا واگرایی یک انتگرال ناسره مانند $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ با استفاده از تعریف، به دلیل دشوار بودن محاسبه $\int_a^{t} f(x)\,dx$ (یا حتی محاسبه ناپذیر بودن این انتگرال معین)، کاری سخت یا غیرعملی است. در این موارد می‌توانیم همگرایی یا واگرایی انتگرال را با استفاده از قضایای زیر بررسی کرده، در صورت همگرایی، مقدار انتگرال ناسره را با استفاده از روش‌های عددی با دقت مود نیاز تعیین کنیم.

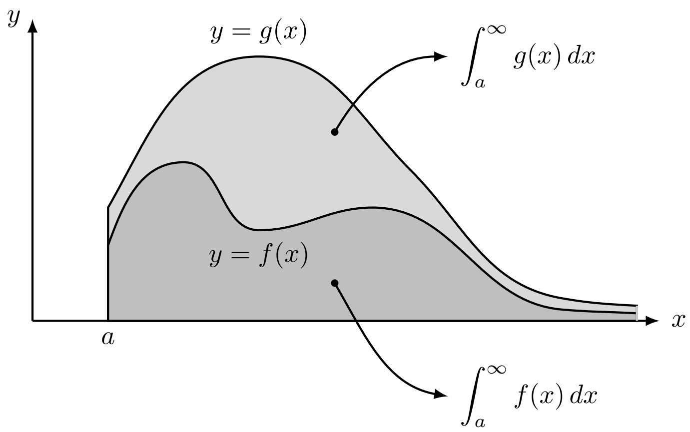
قضیه (آزمون مقایسه).

فرض کنیم $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ توابعی پیوسته بوده، برای هر $x \geq a$، $۰ \leq f(x) \leq g(x)$. در این صورت

الف) اگر انتگرال ناسره $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ همگرا باشد انتگرال ناسره $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ نیز همگرا است.

ب) اگر انتگرال ناسره $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ واگرا باشد انتگرال ناسره $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ هم واگرا خواهد بود.

شکل زیر توجیهی برای برقراری این آزمون بر اساس مساحت نواحی محصور بین هر یک از منحنی‌های $y = g(x)$ و $y = f(x)$ و محور x در ناحیه $x \geq a$ را نشان می‌دهد.



قضیه (آزمون مقایسه حدی).

فرض کنیم توابع $f, g; [a, \infty) \to \mathbb{R}$ توابعی پیوسته و نامنفی بوده، $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$، که در آن $0 \leq \ell \leq \infty$.
در این صورت

الف) اگر $0 < \ell < \infty$ آنگاه دو انتگرال ناسره $\int_a^\infty f(x)\,dx$ و $\int_a^\infty g(x)\,dx$ از نظر همگرایی یا واگرایی یک رفتار دارند.

ب) اگر $\ell = 0$ آنگاه از همگرایی $\int_a^\infty g(x)\,dx$ همگرایی انتگرال ناسره دیگر نتیجه می‌شود.

ج) اگر $\ell = \infty$ آنگاه از واگرایی انتگرال ناسره $\int_a^\infty g(x)\,dx$ واگرایی انتگرال ناسره $\int_a^\infty f(x)\,dx$ حاصل می‌شود.

آزمون‌های فوق برای انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ نیز قابل بیان و اثبات هستند.

مثال. همگرایی یا واگرایی هر یک از انتگرال‌های ناسره زیر را تعیین کنید.

الف) $\int_1^\infty \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

برای بررسی رفتار این انتگرال ناسره از آزمون مقایسه حدی استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
در این صورت برای هر $x \in [1, \infty)$، $f(x)$ و $g(x)$ نامنفی هستند. در عین حال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

با توجه به قسمت (الف) آزمون مقایسه حدی، دو انتگرال ناسره

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad \text{و} \qquad \int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

از بابت همگرایی یا واگرایی یک رفتار دارند. اما بنابر مثال‌های قبل، انتگرال ناسره $\int_1^\infty \dfrac{1}{x}\,dx$ واگرا است. پس انتگرال ناسره مورد نظر نیز واگرا خواهد بود.

ب) $\int_1^\infty \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x^2}}\,dx$.

برای این انتگرال ناسره از آزمون مقایسه استفاده می‌کنیم. توجه می‌کنیم که برای هر $x \in [1, \infty)$، $x^3 + x^2 \geq x^3$. در نتیجه

و از آنجا $\sqrt{x^3+x^2} \geq \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$

$$\forall x \geq 1 \qquad 0 \leq f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2}} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} := g(x)$$

با توجه به اینکه انتگرال ناسره $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int_1^\infty g(x)\,dx$ به عنوان حالت خاصی از انتگرال ناسره $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$، به ازای $p = \frac{3}{2} > 1$، همگرا است، بنابر آزمون مقایسه، انتگرال ناسره $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2}}\,dx$ نیز همگرا خواهد بود. این مثال با آزمون مقایسه حدی نیز به سادگی قابل حل است که بررسی جزئیات آن را به عهده دانشجویان می‌گذاریم.

ج) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

برای این مثال از آزمون مقایسه حدی استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $f(x) = e^{-x^2}$ و $g(x) = e^{-x}$. در این صورت هر دو تابع پیوسته و نامنفی بوده،

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-(x^2-x)} = 0$$

بنابر قسمت (ب) آزمون مقایسه حدی، اگر انتگرال ناسره $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ همگرا باشد آنگاه انتگرال ناسره $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ نیز همگرا خواهد بود. اکنون برای انتگرال ناسره $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ از تعریف استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} (-e^{-x})\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty} (1 - e^{-t}) = 1$$

پس انتگرال ناسره $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ همگرا بوده، انتگرال ناسره مورد نظر نیز همگرا است.

د) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$.

برای این انتگرال همگرایی یا واگرایی دو انتگرال ناسره $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ و $\int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ را بررسی می‌کنیم.

برای انتگرال نخست، با توجه به پیوستگی تابع $f(x) = \frac{x^2}{1+x^6}$ بر $[0,\infty)$، برای هر $t > 0$ با شرط $t \geq 1$ داریم

$$\int_0^t \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}\,dx + \int_1^t \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$$

در نتیجه $\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ وجود دارد اگر و تنها اگر $\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ وجود داشته باشد. به عبارت دیگر انتگرال

ناسره $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ همگرا است اگر و تنها اگر انتگرال ناسره $\int_{1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ همگرا باشد. اکنون برای انتگرال اخیر با استفاده از آزمون مقایسه داریم

$$\forall x \geq 1 \qquad 0 \leq f(x) = \frac{x^2}{1+x^6} \leq \frac{x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4} = g(x)$$

با توجه به همگرایی انتگرال ناسره $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$ (که در آن $p = 4 > 1$) انتگرال $\int_{1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ و از آنجا انتگرال ناسره $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ نیز همگرا است.

به نحو مشابه مشاهده می‌شود انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ هم همگرا است. در نتیجه انتگرال ناسره مورد نظر نیز همگرا است.

ه) $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx$.

قرار می‌دهیم $f(x) = x^2 e^{-x}$ و $g(x) = e^{-\frac{x}{2}}$. در این صورت هر دو تابع بر $[0, \infty)$ توابعی پیوسته و نامنفی هستند. همچنین

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$$

از طرف دیگر، به سادگی مشاهده می‌شود انتگرال ناسره $\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ همگرا است. پس بنابر آزمون مقایسه حدی، انتگرال ناسره فوق نیز همگرا است.

و) $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

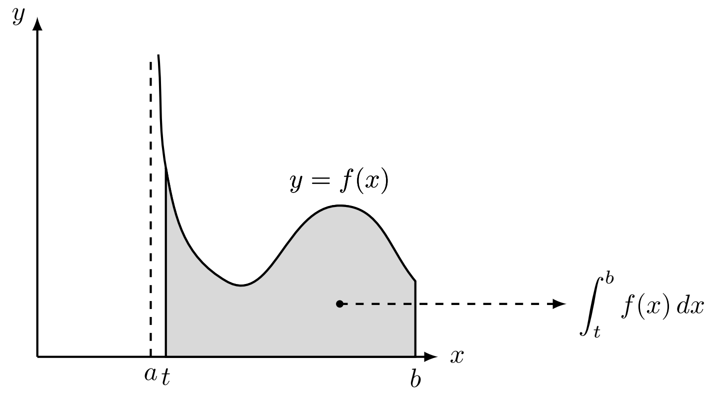
قرار می‌دهیم $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ و $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. در این صورت هر دو تابع بر $[1, \infty)$ پیوسته و نامنفی هستند. همچنین

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$$

تکمیل بحث با استفاده از آزمون مقایسه حدی را به عهده دانشجویان می‌گذاریم.

انتگرال ناسره نوع دوم (تابع بیکران بر بازه‌ای کراندار). فرض کنیم f تابعی تعریف شده بر بازه‌ای به فرم $(a, b]$ بوده، برای هر عدد t با شرط $a < t < b$، انتگرال معین $\int_{t}^{b} f(x)\,dx$ وجود داشته باشد. اگر $\lim_{t\to a^+} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$ وجود داشته

باشد آنگاه آن را با همان نماد $\int_a^b f(x)\,dx$ نمایش داده، انتگرال ناسره فوق را همگرا می‌نامیم. در غیر این صورت این انتگرال را واگرا می‌نامیم.



به همین ترتیب، اگر f بر بازه‌ای به فرم $[a,b)$ تعریف شده، برای هر t بین a و b انتگرال $\int_a^t f(x)\,dx$ وجود داشته باشد آنگاه قرار می‌دهیم

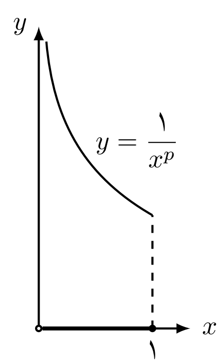
$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

به شرط آنکه حد فوق وجود داشته باشد. نهایتا اگر f بر بازه‌ای به فرم (a,b) تعریف شده باشد و برای $c\in(a,b)$، هر دو انتگرال ناسره $\int_a^c f(x)\,dx$ و $\int_c^b f(x)\,dx$ وجود داشته باشند آنگاه انتگرال ناسره $\int_a^b f(x)\,dx$ را همگرا نامیده، مقدار آن را برابر مجموع دو انتگرال ناسره $\int_a^c f(x)\,dx$ و $\int_c^b f(x)\,dx$ تعریف می‌کنیم.

در چند تعریف فوق شرط کراندار بودن تابع بر دامنه تعریف ضرورتی ندارد و همین امر دلیل نامگذاری ناسره برای این دسته از انتگرال‌ها است.

مثال. همگرایی یا واگرایی هر یک از انتگرال‌های ناسره زیر را بررسی کنید.

الف) $\int_۰^۱ \frac{۱}{x^p}\,dx$ ($p>۰$ عددی ثابت).



توجه می‌کنیم تابع $f(x) = \frac{۱}{x^p}$ بر بازه $(۰,۱]$ تعریف شده است. برای عدد t با شرط $۰ < t < ۱$،

$$\int_t^{۱} \frac{۱}{x^p}\,dx = \int_t^{۱} x^{-p}\,dx = \begin{cases} \frac{۱}{۱-p}(۱-t^{۱-p}) & p \neq ۱ \\ -\ln t & p = ۱ \end{cases}$$

به این ترتیب اگر $p \geq ۱$ در حالتی که $t \to ۰^+$ حد انتگرال $\int_t^{۱} \frac{۱}{x^p}\,dx$ وجود نداشته، این انتگرال ناسره در این حالت واگرا است. اما در حالتی که $۰ < p < ۱$،

$$\lim_{t\to ۰^+} \int_t^{۱} \frac{۱}{x^p}\,dx = \lim_{t\to ۰^+} \left(\frac{۱}{۱-p}(۱-t^{۱-p})\right) = \frac{۱}{۱-p}$$

پس برای p بین ۰ و ۱، انتگرال ناسره $\int_۰^{۱} \frac{۱}{x^p}\,dx$ همگرا و مقدار آن برابر $\frac{۱}{۱-p}$ است. پس به طور مثال، انتگرال‌های ناسره $\int_۰^{۱} \frac{۱}{x}\,dx$ (که در آن $p = ۱$) و $\int_۰^{۱} \frac{۱}{x^۲}\,dx$ (که در آن $p = ۲$) واگرا هستند. در مقابل، انتگرال ناسره $\int_۰^{۱} \frac{۱}{\sqrt{x}}\,dx$ (که در آن $p = \frac{۱}{۲}$) همگرا است.

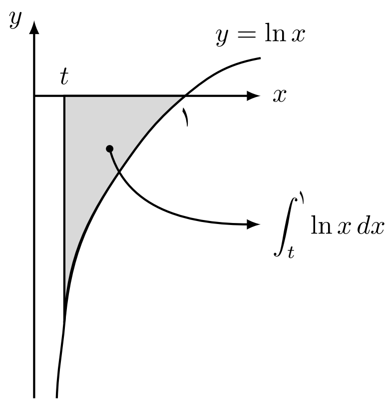
ب) $\int_۰^{۱} \ln x\,dx$.

تابع $f(x) = \ln x$ بر بازه $(۰,۱]$ تعریف شده است. همانطور که در بخش انتگرال‌گیری به روش جز به جز مشاهده کردیم

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

در نتیجه

$$\int_t^{۱} \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_t^{۱} = -۱ - t\ln t + t$$



در عین حال در فصل پنجم مشاهده کردیم $\lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$. در نتیجه

$$\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+}(-1 - t\ln t + t) = -1$$

در نتیجه انتگرال ناسره فوق همگرا است.

مانند بحث انتگرال‌های ناسره نوع اول، در اینجا نیز قضایایی مشابه آنچه برای آن انتگرال‌ها بیان کرده بودیم به شرح زیر قابل بیان و اثبات هستند.

قضیه (آزمون مقایسه)

فرض کنیم f و g توابعی پیوسته و نامنفی تعریف شده بر بازه‌ای چون $(a,b]$ بوده، برای هر $x\in(a,b]$، $0\le f(x)\le g(x)$. در این صورت اگر انتگرال ناسره $\int_a^b g(x)\,dx$ همگرا باشد آنگاه انتگرال ناسره $\int_a^b f(x)\,dx$ نیز همگرا است. به همین ترتیب، اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ واگرا باشد آنگاه $\int_a^b g(x)\,dx$ نیز واگرا خواهد بود.

قضیه (آزمون مقایسه حدی)

فرض کنیم f و g توابعی پیوسته و نامنفی تعریف شده بر بازه‌ای چون $(a,b]$ بوده، $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ (که در آن ℓ می‌تواند در بازه $[0,\infty)$ یا برابر ∞ باشد.) در این صورت

الف) در حالتی که $0<\ell<\infty$، دو انتگرال ناسره $\int_a^b f(x)\,dx$ و $\int_a^b g(x)\,dx$ از نظر همگرایی یا واگرایی یک رفتار دارند.

ب) اگر $\ell=0$ آنگاه از همگرایی $\int_a^b g(x)\,dx$ همگرایی $\int_a^b f(x)\,dx$ نتیجه می‌شود.

ج) در حالتی که $\ell=\infty$، واگرایی $\int_a^b g(x)\,dx$ واگرایی $\int_a^b f(x)\,dx$ را در پی خواهد داشت.

مثال. الف) با استفاده از تعریف نشان دهید انتگرال ناسره $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ همگرا است.

ب) همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$ را بررسی کنید.

الف) ابتدا توجه می‌کنیم تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ بر بازه $(-\infty,1)$ تعریف شده است. پس در ارتباط با انتگرال ناسره فوق، این تابع را بر بازه $[0,1)$ در نظر می‌گیریم.

برای عدد t با شرط $0 < t < 1$، با استفاده از تغییر متغیر $u = 1 - x$ خواهیم داشت

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int_1^{1-t} \frac{1}{\sqrt{u}}\,(-du) = \int_{1-t}^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = 2\sqrt{u}\Big|_{1-t}^1 = 2 - 2\sqrt{1-t}$$

در نتیجه

$$\lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \lim_{t\to 1^-} \left(2 - 2\sqrt{1-t}\right) = 2$$

پس این انتگرال ناسره همگرا است.

ب) اگر $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ و $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ آنگاه هر دو تابع نامنفی بوده، بر $[0,1)$ پیوسته هستند. به علاوه

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1+x+x^2} = \sqrt{3}$$

بنابر آزمون مقایسه حدی، دو انتگرال ناسره $\int_0^1 f(x)\,dx$ و $\int_0^1 g(x)\,dx$ از بابت همگرایی یا واگرایی یک رفتار دارند. ولی بنابر قسمت (الف)، انتگرال $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ همگرا است. پس انتگرال $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$ نیز همگرا است.

همانطور که تا اینجا مشاهده کردیم، انتگرال ناسره نوع اول امکان گسترش ایده انتگرال برای توابع کراندار بر بازه‌های بیکران و انتگرال ناسره نوع دوم این امکان را برای توابع بیکران بر بازه‌های کراندار مورد توجه قرار می‌دهد. در نهایت امکان دارد بخواهیم مفهوم انتگرال را برای تابعی بیکران بر بازه‌ای بیکران هم داشته باشیم. در این حالت، با انتخاب نقطه‌ای مناسب در دامنه تعریف تابع، انتگرال ناسره مورد نظر را به دو انتگرال ناسره نوع اول و نوع دوم تقسیم کرده همگرایی یا واگرایی دو انتگرال را بررسی می‌کنیم. در صورتی که هر دو انتگرال ناسره همگرا باشند انتگرال ناسره اصلی را همگرا نامیده مقدار آن را برابر مجموع دو انتگرال ناسره تعریف می‌کنیم.

مثال. همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}\,dx$ را بررسی کنید.

اگر قرار دهیم $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}$ آنگاه f تابعی پیوسته بر بازه $(0,\infty)$ بوده، با نزدیک شدن متغیر $x \in (0,\infty)$ به 0، مقدار تابع به بی‌نهایت میل می‌کند. پس این انتگرال ناسره تلفیقی از دو انتگرال ناسره نوع اول (بازه بیکران) و نوع دوم (تابع بی‌کران) است. با انتخاب نقطه $1 \in (0,\infty)$، همگرایی دو انتگرال ناسره $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}\,dx$ (که از نوع دوم است) و $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}\,dx$ (که از نوع اول است) را بررسی می‌کنیم.

الف) انتگرال ناسره نوع دوم $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}\,dx$.
اگر g تابع با دستور $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ باشد آنگاه f و g بر بازه $(0,1]$ پیوسته و نامنفی هستند. به علاوه

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} = 1$$

در نتیجه دو انتگرال ناسره $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ و $\int_{0}^{1} g(x)\,dx$ از بابت همگرایی یا واگرایی یک رفتار دارند. اما بنابر مثال‌های قبلی، انتگرال ناسره $\int_{0}^{1} g(x)\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$ (که در آن $p = \frac{2}{3} < 1$) همگرا است. پس انتگرال ناسره $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}\,dx$ نیز همگرا خواهد بود.
ب) انتگرال ناسره نوع اول $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}\,dx$.
فرض کنیم h تابع با دستور $h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$ باشد. در این صورت دو تابع f و h بر $[1,\infty)$ توابعی پیوسته، نامنفی و کراندار هستند. به علاوه

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+1}} = 1$$

در نتیجه دو انتگرال ناسره $\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ و $\int_{1}^{\infty} h(x)\,dx$ هم رفتار هستند. اما انتگرال $\int_{1}^{\infty} h(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\,dx$ همگرا است (چرا؟). در نتیجه انتگرال ناسره $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}\,dx$ نیز همگرا است.
با توجه به نتایج دو قسمت (الف) و (ب)، انتگرال ناسره $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}\,dx$ همگرا است.

تمرین‌های فصل ششم.

۱. انتگرال های زیر را با استفاده از روش جزء به جزء محاسبه کنید.

الف) $\int x^{2}\ln x\, dx$

ب) $\int \theta\cos\theta\, d\theta$

ج) $\int x\sin 5x\, dx$

د) $\int \arcsin x\, dx$

ه) $\int x^{2}\sin\alpha x\, dx$

و) $\int x^{3}e^{x}\, dx$

ز) $\int (\ln x)^{2}\, dx$

ح) $\int \ln\sqrt[3]{x}\, dx$

ط) $\int x^{5}\ln x\, dx$

ی) $\int_{0}^{1} x\cosh x\, dx$

ک) $\int x\tan^{2}x\, dx$

ل) $\int (\arcsin x)^{2}\, dx$

م) $\int e^{2x}\sin 3x\, dx$

۲. انتگرال‌های زیر را بعد از انجام تغییر متغیر مناسب با استفاده از روش جزء به جزء محاسبه کنید.

الف) $\int \cos\sqrt{x}\, dx$

ب) $\int x^{3}e^{-x^{2}}\, dx$

ج) $\int \sin(\ln x)\, dx$

د) $\int x\ln(1+x)\, dx$

۳. انتگرال‌های زیر را با استفاده از تغییر متغیرهای مثلثاتی و هذلولوی محاسبه کنید.

الف) $\int_{0}^{1} x^{3}\sqrt{1-x^{2}}\, dx$

ب) $\int_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{36-x^{2}}}\, dx$

ج) $\int \frac{x^{3}}{\sqrt{x^{2}+4}}\, dx$

د) $\int \frac{\sqrt{x^{2}-4}}{x}\, dx$

ه) $\int_{0}^{a} \frac{1}{(a^{2}+x^{2})^{3/2}}\, dx$

و) $\int_{0}^{a} x^{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}\, dx$

ز) $\int \frac{1}{\sqrt{a^{2}+x^{2}}}\, dx$

ح) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\, dx$

ط) $\int \frac{\sqrt{1+x^{2}}}{x}\, dx$

ی) $\int \sqrt{5+4x-x^{2}}\, dx$

ک) $\int x\sqrt{1-x^{4}}\, dx$

ل) $\int_{0}^{1} \sqrt{x^{2}+1}\, dx$

م) $\int \frac{x^{2}}{(a^{2}+x^{2})^{3/2}}\, dx$

۴. انتگرال‌های زیر را با استفاده از روش تجزیه کسرهای جزئی محاسبه کنید.

الف) $\displaystyle\int \frac{x^۴}{x-۱}\,dx$ ب) $\displaystyle\int \frac{۳x-۲}{x+۱}\,dx$

ج) $\displaystyle\int \frac{ax}{x^۲-bx}\,dx$ د) $\displaystyle\int \frac{x^۳+۴}{x^۲+۴}\,dx$

ه) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^۲(x-۱)^۲}$ و) $\displaystyle\int \frac{x^۲+x+۱}{(x^۲+۱)^۲}\,dx$

ز) $\displaystyle\int \frac{x^۵+x+۱}{x^۳+۱}\,dx$

۵. انتگرال‌های زیر را با استفاده از تغییر متغیری مناسب به انتگرال توابع گویا تبدیل کرده و سپس انتگرال را محاسبه کنید.

الف) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+۱}}{x}\,dx$ ب) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^۲+x\sqrt{x}}$

ج) $\displaystyle\int_۰^۱ \frac{۱}{۱+\sqrt[۳]{x}}\,dx$ د) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{۱+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

ه) $\displaystyle\int \frac{dx}{۱+e^x}$ و) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^۲ x-۳\cos x}\,dx$

ز) $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\sinh^۲ x+\sinh^۴ x}\,dx$

۶. نشان دهید که $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ واگراست ولی $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} xdx = ۰$.

۷. با تعبیر مساحتها، نشان دهید که

$$\int_۰^{\infty} e^{-x^۲}dx = \int_۰^۱ \sqrt{-\ln y}\,dy$$

۸. نشان دهید که

$$\int_۰^{\infty} x^۲e^{-x^۲}dx = \frac{۱}{۲}\int_۰^{\infty} e^{-x^۲}dx$$

۹. اگر $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ همگرا و a,b دو عدد حقیقی باشند، نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx+\int_b^{\infty} f(x)dx$$

۱۰. اگر $f(t)$ یک تابع پیوسته برای $t \geq ۰$ باشد، تبدیل لاپلاس آن تابعی بر حسب s است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(s) = \int_۰^\infty f(t)e^{-st}dt$$

دامنه‌ی تابع بالا متشکل از تمام s هائی است که به ازای آنها انتگرال بالا همگراست. تبدیل لاپلاس هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $f(t) = ۱$ ب) $f(t) = e^t$ ج) $f(t) = t$

۱۱. دقت کنید که انتگرال‌های زیر، همزمان ناسره‌ی نوع اول و دوم هستند. حاصل آنها را محاسبه کنید.

الف) $\int_۰^\infty \frac{۱}{\sqrt{x}(۱+x)}dx$ ب) $\int_۲^\infty \frac{۱}{\sqrt{x}\sqrt{x^۲-۴}}$

۱۲. با ذکر دلیل مشخص کنید که کدامیک از انتگرال‌های زیر همگرا و کدام واگرا هستند.

الف) $\int_۰^۹ \frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۱}}\,dx$ ب) $\int_۰^۵ \frac{w}{w-۲}\,dw$

ج) $\int_۰^{\pi/۲} \tan^۲\theta\,d\theta$ د) $\int_۰^۱ x\ln x\,dx$

ه) $\int_{-۱}^۰ \frac{e^{۱/x}}{x^۳}\,dx$ و) $\int_۰^۱ \frac{e^{۱/x}}{x^۳}\,dx$

ز) $\int_{-\infty}^۰ ۲^r\,dr$ ح) $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^۲}\,dx$

ط) $\int_۰^\infty \sin\theta e^{\cos\theta}\,d\theta$ ی) $\int_۱^\infty \frac{۱}{x^۲+x}\,dx$

ک) $\int_۱^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$ ل) $\int_۱^\infty \frac{\ln x}{x^۲}\,dx$

م) $\int_{-\infty}^۰ \frac{z}{z^۴+۳}\,dz$ ن) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^۲}$

ص) $\int_۱^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$ ض) $\int_۳^\infty \frac{dx}{(x-۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

ع) $\int_۰^\infty \frac{۱}{\sqrt[۳]{۱+x}}\,dx$ غ) $\int_{-\infty}^۰ \frac{۱}{۳-۴x}\,dx$

تمرین‌های تکمیلی.

۰۱ روابط زیر را ثابت کنید.

$$\text{(الف)}\quad \int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx$$

$$\text{(ب)}\quad \int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\, dx$$

$$\text{(ج)}\quad \int (\tan x)^n\, dx = \frac{(\tan x)^{n-1}}{n-1} - \int (\tan x)^{n-2}\, dx \qquad (n \neq 1)$$

$$\text{(د)}\quad \int (\sec x)^n\, dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx \qquad (n \neq 1)$$

۰۲ انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(الف)}\quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\, dx \qquad\qquad \text{(ب)}\quad \int \sin\sqrt{ax}\, dx$$

$$\text{(ج)}\quad \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx \qquad\qquad \text{(د)}\quad \int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$$

$$\text{(ه)}\quad \int \cos 2x \cos 6x\, dx \qquad\qquad \text{(و)}\quad \int x \sin x \cos x\, dx$$

$$\text{(ز)}\quad \int x^5 e^{-x^3}\, dx \qquad\qquad \text{(ح)}\quad \int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\, dx$$

$$\text{(ط)}\quad \int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\, dx \qquad\qquad \text{(ی)}\quad \int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\, dx$$

$$\text{(ک)}\quad \int \sqrt{1-\sin x}\, dx \qquad\qquad \text{(ل)}\quad \int \frac{4^x + 10^x}{2^x}\, dx$$

$$\text{(م)}\quad \int \sqrt{1+e^x}\, dx$$

۰۳ تابعِ f در $[0, +\infty)$ پیوسته است و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. آیا ممکن است که $\int_0^\infty f(x)dx$ همگرا باشد؟

۰۴ نشان دهید که اگر $a > -1$ و $b > a+1$ آنگاه انتگرال $\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b}dx$ همگراست.

۰۵ مقدار C را به گونه‌ای پیدا کنید که انتگرال زیر همگرا باشد؛ سپس حاصل انتگرال را برای آن مقدار بیابید.

$$\int_0^\infty \Big(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\Big)dx.$$

۰۶ حاصل انتگرال $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$ را برای $n = 0, 1, 2, 3$ محاسبه کنید.

۰۷ حاصل انتگرال سوال قبل را برای عدد طبیعی دلخواهِ n حدس بزنید و حدس خود را با استقراء ثابت کنید.

۰۸ مقادیر p را به گونه‌ای تعیین کنید که هر یک از انتگرال‌های زیر همگرا باشند (مقدار انتگرال مورد نظر را نیز محاسبه

کنید).

الف) $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ ب) $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ ج) $\int_0^1 x^p \ln x dx$

فصل هفتم
دنباله و سری

در این فصل ابتدا با دو مفهوم دنباله و سری عددی آشنا شده، همگرایی و واگرایی آنها را بررسی می‌کنیم. در ادامه سری توان را معرفی می‌کنیم. همانطور که اشاره خواهد شد، سری توان یکی از روش‌های موثر در ساختن توابعی جدید محسوب می‌شود. در انتهای این فصل نیز به معرفی بسط تیلور و مک‌لورن توابع خواهیم پرداخت.

دنباله‌های عددی.
یک دنباله عددی انتخابی است از اغداد حقیقی که در آن ترتیب اننتخاب اعداد نیز در نظر گرفته می‌شود. به بیان دیگر، در یک دنباله عددی اولین انتخاب را عضو اول دنباله می‌نامیم. به همین ترتیب دومین انتخاب را عضو دوم دنباله می‌نامیم و به همین ترتیب، عضو سوم، چهارم و ... تعریف می‌شوند. به طور دقیق‌تر، یک دنباله عبارت است از تابعی چون $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. برای دنباله $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$، برای هر $n\in\mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $a_n=f(n)$ و آن را جمله عمومی دنباله می‌نامیم. بر این اساس، $a_۱$ اولین عضو، $a_۲$ دومین عضو و به همین ترتیب a_n n-امین عضو دنباله را نشان می‌دهد. برای سهولت دنباله فوق را با نماد $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نشان می‌دهیم.

به طور مثال، اگر $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(n)=\dfrac{n}{n+۱}$ داده شده باشد آنگاه جمله عمومی دنباله $a_n=\dfrac{n}{n+۱}$ بوده، این دنباله را به صورت $\{\dfrac{n}{n+۱}\}_{n\in\mathbb{N}}$ نشان می‌دهیم. برای این دنباله سه عضو اول عبارتند از $a_۱=\dfrac{۱}{۲}$، $a_۲=\dfrac{۲}{۳}$ و $a_۳=\dfrac{۳}{۴}$.

تابع f با ضابطه $f(n)=\sqrt{n^۲-۵}$ نیز یک دنباله را نشان می‌دهد اگر چه که دامنه تعریف این تابع برابر $\mathbb{N}$ نیست. اگر تابع $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $g(n)=f(n+۲)=\sqrt{(n+۲)^۲-۵}$ تعریف کنیم آنگاه دنباله بودن این تابع راحت‌تر قابل قبول است. در این نمایش، جمله عمومی عبارت است از $a_n=\sqrt{(n+۲)^۲-۵}$ و دنباله فوق را به صورت $\{\sqrt{(n+۲)^۲-۵}\}_{n\in\mathbb{N}}$ نمایش می‌دهیم. با کمی مسامحه در تعریف دنباله، این دنباله را می‌توانیم با نماد $\{\sqrt{n^۲-۵}\}_{n\geq ۳}$ نیز نمایش دهیم. در این صورت اولین عضو این دنباله به ازای $n=۳$ به دست می‌آید. در عوض نمایش اعضای دنباله نسبت به حالت قبل ساده‌تر خواهد بود.

اولین مفهومی که به نحو طبیعی برای یک دنباله عددی تعریف می‌شود همگرایی یا واگرایی یک دنباله است.

تعریف

دنباله $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را همگرا به عدد ℓ نامیم و آن را با نماد $a_n \to \ell$ یا $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ نشان می‌دهیم هرگاه بتوانیم با بزرگ انتخاب کردن n اعضای دنباله را به اندازه دلخواه به ℓ نزدیک کنیم. به زبان ریاضی $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ هرگاه

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Rightarrow |a_n - \ell| < \epsilon$$

مثال. با استفاده از تعریف نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+۱} = ۱$.
طبق تعریف، باید نشان دهیم

$$\forall \epsilon > ۰ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \;\Rightarrow\; |\frac{n}{n+۱} - ۱| < \epsilon$$

برای $\epsilon > ۰$ داده شده، با توجه به اینکه

$$|\frac{n}{n+۱} - ۱| = |\frac{n-n-۱}{n+۱}| = |\frac{-۱}{n+۱}| = \frac{۱}{n+۱} < \frac{۱}{n}$$

برای داشتن $|a_n - ۱| < \epsilon$ کافی است N را به گونه‌ای اختیار کنیم که برای $n \geq N$، $\frac{۱}{n} < \epsilon$. برای این منظور $N \in \mathbb{N}$ را با شرط $N > \frac{۱}{\epsilon}$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت برای $n \geq N$،

$$|\frac{n}{n+۱} - ۱| < \frac{۱}{n} \leq \frac{۱}{N} < \epsilon$$

با استفاده از تعریف همگرایی یک دنباله، خاصیت‌های زیر را به سادگی می‌توان ثابت کرد.
اگر دنباله‌های $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا باشند آنگاه هر یک از دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$، $\{\lambda a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا هستند و

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n \;\;,\;\; \lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n \;\;,\;\; \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

به علاوه اگر $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq ۰$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

بدیهی است که بررسی حد هر دنباله همگرا با استفاده از تعریف کاری دشوار و غیر عملی است. در ادامه به قضایایی اشاره

می‌کنیم که بررسی حد برای دنباله‌ها را بدون نیاز به استفاده از تعریف مستقیم حد مقدور می‌سازند.

قضیه

فرض کنیم f تابعی تعریف شده بر بازه $[۱,\infty)$ بوده، $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell$. اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$، $a_n=f(n)$ آنگاه دنباله $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا به ℓ است.

اثبات. برای $\epsilon>۰$، با توجه به فرض $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell$ ، عدد $M>۰$ وجود دارد که برای هر $x\geq M$، $|f(x)-\ell|<\epsilon$. اکنون اگر $N\in\mathbb{N}$ را با شرط $N\geq M$ انتخاب کنیم آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$ با شرط $n\geq N$،

$$n\geq N\geq M \Rightarrow |f(n)-\ell|,\epsilon \quad \text{یا} \quad |a_n-\ell|<\epsilon$$

پس طبق تعریف، $a_n\to\ell$. ■

مثال. حد هر یک از دنباله‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $a_n=\dfrac{۱}{n^r}$ ($r>۰$ ثابت).

اگر تابع $f:[۱,\infty)\to\mathbb{R}$ را با دستور $f(x)=\dfrac{۱}{x^r}$ در نظر بگیریم آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $a_n=f(n)$. از طرف دیگر، با توجه به فرض $r>۰$،

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x^r}=۰$$

بنابر قضیه فوق، $a_n=\dfrac{۱}{n^r}\to ۰$.

ب) $a_n=a^n$ (a عددی ثابت با شرط $۰<a<۱$).

فرض کنیم $f(x)=a^x$. در این صورت برای هر $n\in\mathbb{N}$، $f(n)=a^n=a_n$. با توجه به اینکه $a\in(۰,۱)$ داریم $\ln a<۰$. در نتیجه

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} a^x=\lim_{x\to\infty} e^{x\ln a}=۰$$

به این ترتیب $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=۰$.

ج) $a_n=\dfrac{\ln n}{n}$.

با در نظر گرفتن $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$، داریم $a_n=\dfrac{\ln n}{n}=f(n)$. برای بررسی رفتار حدی تابع f در ∞ می‌توانیم از قاعده هوپیتال استفاده کنیم. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{۱}=۰$$

پس $a_n = \frac{\ln n}{n} \to 0$.

د) $a_n = n\sin(\frac{1}{n})$.

اگر $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f(n) = n\sin\frac{1}{n} = a_n$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\sin t = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1$$

در محاسبه حد فوق از تغییر متغیر $t = \frac{1}{x}$ استفاده کرده‌ایم. به این ترتیب $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$.

ه) $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

با قرار دادن $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ خواهیم داشت

$$f(x) = (1+\frac{1}{x})^x = e^{\left(x\ln(1+\frac{1}{x})\right)}$$

به این ترتیب برای بررسی حد $\lim_{x\to\infty} f(x)$ لازم است حد عبارت $x\ln(1+\frac{1}{x})$ در بی‌نهایت را بررسی کنیم. با استفاده از تغییر متغیر $t = \frac{1}{x}$ خواهیم داشت

$$\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+t}}{1} = 1$$

در محاسبه حد عبارت آخر از قاعده هوپیتال استفاده کرده‌ایم. در نتیجه

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^1 = e$$

و از آنجا $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$. توجه می‌کنیم این نتیجه روشی برای محاسبه تقریبی عدد e در اختیارمان می‌گذارد. در واقع با انتخاب مقادیر بزرگ n، $e \approx (1+\frac{1}{n})^n$.

و) $a_n = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ($a > 0$ ثابت).

با در نظر گرفتن تابع $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$، f بر بازه $[1,\infty)$ تعریف شده، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f(n) = a^{\frac{1}{n}} = a_n$. با توجه به اینکه

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln a} = e^0 = 1$$

بنابر قضیه قبل، $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۱$.

قضیه دیگری که کاربردهای متعددی در محاسبه حد دنباله‌ها دارد قضیه فشردگی است که به صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه فشردگی

فرض کنیم $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$، $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ سه دنباله از اعداد حقیقی بوده، عدد $n_۰ \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ با شرط $n \geq n_۰$، $a_n \leq b_n \leq c_n$. اگر دنباله‌های $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا بوده، حد برابر داشته باشند آنگاه دنباله $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نیز همگرا است و حد آن برابر حد دو دنباله فوق خواهد بود.

اثبات. فرض کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{x\to\infty} a_n = \ell$. نشان می‌دهیم $b_n \to \ell$. برای $\epsilon > ۰$، با توجه به مفروضات قضیه،

$$\exists n_۱ \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq n_۱ \Rightarrow |a_n - \ell| < \epsilon \quad \text{یا} \quad \ell - \epsilon < a_n < \ell + \epsilon \tag{۹}$$

$$\exists n_۲ \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq n_۲ \Rightarrow |c_n - \ell| < \epsilon \quad \text{یا} \quad \ell - \epsilon < c_n < \ell + \epsilon \tag{۱۰}$$

اکنون فرض کنیم $N = \max\{n_۰, n_۱, n_۲\}$. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ اگر $n \geq N$ آنگاه هر سه شرط $n \geq n_۰$، $n \geq n_۱$ و $n \geq n_۲$ به طور همزمان برقرار خواهند بود. در نتیجه با استفاده از روابط (۹) و(۱۰) و فرض قضیه، خواهیم داشت

$$\ell - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \epsilon$$

و از آنجا $|b_n - \ell| < \epsilon$. پس طبق تعریف، $b_n \to \ell$. ■

مثال. حد هر یک از دنباله‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $a_n = \dfrac{(-۱)^n}{n}$.

با توجه به اینکه برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$-\frac{۱}{n} \leq \frac{(-۱)^n}{n} \leq \frac{۱}{n}$$

و این که $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{۱}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-\dfrac{۱}{n}) = ۰$ ، بنابر قضیه فشردگی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-۱)^n}{n} = ۰$$

ب) $a_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

مانند مثال قبل، از آنجا که $\sin n$ همواره بین ۱ و ۱− قرار دارد، خواهیم داشت

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad -\frac{۱}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \leq \frac{۱}{\sqrt{n}}$$

قبلا مشاهده کرده‌ایم که برای هر عدد $r > ۰$، $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^r} = ۰$. در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\sqrt{n}} = ۰$ و از آنجا دنباله $\{-\frac{۱}{\sqrt{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ نیز همگرا به صفر است. در نتیجه بنابر قضیه فشردگی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = ۰$$

ج) $a_n = \frac{۳^n}{n!}$.

برای $n \geq ۴$،

$$۰ \leq a_n = \frac{۳^n}{n!} = \frac{۳ \times ۳ \times ۳ \times \cdots \times ۳}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times n} \leq \frac{۹}{۲} \times \frac{۳}{n}$$

اما $\lim_{n\to\infty} \frac{۲۷}{۲}\frac{۱}{n} = ۰$. دنباله ثابت صفر (سمت چپ رابطه فوق) نیز همگرا به صفر است. پس بنابر قضیه فشردگی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۳^n}{n!} = ۰$$

د) $a_n = \sqrt[n]{۲^n + ۳^n}$.

با توجه به اینکه برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$۳^n < ۲^n + ۳^n < ۳^n + ۳^n = ۲ \times ۳^n$$

خواهیم داشت

$$۳ < \sqrt[n]{۲^n + ۳^n} < \sqrt[n]{۲} \times ۳$$

اما $\sqrt[n]{۲} = ۲^{\frac{۱}{n}} \to ۱$. بر این مبنا، دنباله ثابت ۳ در سمت چپ رابطه فوق و دنباله $۳ \times \sqrt[n]{۲}$ در سمت راست این رابطه هر دو همگرا به ۳ هستند. در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲^n + ۳^n} = ۳$$

در ادامه به معرفی دسته‌ای از دنباله‌ها می‌پردازیم که همگرایی یا واگرایی آنها را با بررسی نوعی رفتار خاص آنها، و نه با مشخص کردن عددی به عنوان حد، تعیین می‌کنیم.

تعریف

دنباله $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را دنباله‌ای صعودی (نزولی) نامیم هرگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $a_n\leq a_{n+1}$ ($a_n\geq a_{n+1}$). یک دنباله را یکنوا نامیم هرگاه دنباله‌ای صعودی یا دنباله‌ای نزولی باشد.

یادآوری می‌کنیم دنباله $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را دنباله‌ای کراندار نامیم هرگاه اعدادی مانند c و d وجود داشته باشند که

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad c\leq a_n\leq d$$

به طور مثال می‌توان نشان داد که هر دنباله همگرا دنباله‌ای کراندار است. ولی البته عکس این خاصیت لزوما برقرار نیست. یعنی اگر دنباله‌ای کراندار باشد آنگاه لزوما همگرا نخواهد بود. به طور مثال دنباله $a_n=(-1)^n$ دنباله‌ای کراندار است ولی همگرا نمی‌باشد. با وجود این، قضیه زیر بیان می‌کند که افزودن یک شرط به کرانداری، همگرایی دنباله را در پی خواهد داشت.

قضیه

هر دنباله یکنوا و کراندار همگرا است.

اثبات. فرض کنیم $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای صعودی و کراندار باشد. طبق تعریف، عددی مانند d وجود دارد که

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\leq\cdots\leq d$$

عدد d را یک کران بالای این دنباله می‌نامند. روشن است که عدد d با خاصیت فوق منحصر به فرد نیست. با در نظر گرفتن کلیه کران‌های بالای این دنباله، فرض کنیم a کوچکترین کران بالای این دنباله باشد (وجود چنین عددی از اصل کمال برای مجموعه اعداد حقیقی ناشی می‌شود). به عبارت دیگر، a یک کران بالا برای این دنباله است و اگر b عددی کوچکتر از a باشد آنگاه b دیگر کران بالای این دنباله نیست. اکنون نشان می‌دهیم $a_n\to a$.

برای $\epsilon>0$، با توجه به اینکه $a-\epsilon<a$، عدد $a-\epsilon$ کران بالای دنباله مورد نظر نبوده، در نتیجه $n_0\in\mathbb{N}$ وجود دارد که $a-\epsilon<a_{n_0}$. اکنون با توجه به رفتار صعودی دنباله و این که a یک کران بالای این دنباله است خواهیم داشت

$$\forall n\geq n_0\qquad a-\epsilon<a_{n_0}\leq a_n\leq a<a+\epsilon$$

پس برای هر $n\in\mathbb{N}$ با شرط $n\geq n_0$،

$$|a_n-a|<\epsilon$$

و این همان مفهوم همگرایی دنباله $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ به عدد a است. ■

مثال. نشان دهید دنباله $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ با دستور $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$، برای هر $n \in \mathbb{N}$، دنباله‌ای صعودی و همگرا است.
برای اثبات صعودی بودن این دنباله از استقرا استفاده می‌کنیم. برای $n = 1$،

$$a_2 = \sqrt{a_1 + 2} = \sqrt{1 + 2} > 1 = a_1$$

فرض کنیم برای عدد $n \in \mathbb{N}$، $a_n < a_{n+1}$. برای عدد $n + 1$،

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} < \sqrt{a_{n+1} + 2} = a_{n+2}$$

پس بنابر استقرای ریاضی، برای هر عدد $n \in \mathbb{N}$، $a_n < a_{n+1}$. یعنی این دنباله صعودی است. به همین روش، با استفاده از استقرای ریاضی، مشاهده می‌شود

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n < 2$$

یعنی $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از بالا کراندار است. طبیعتا چون این دنباله صعودی است، از پایین نیز کراندار است. در نتیجه $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای صعودی و کراندار و از آنجا همگرا است.

ساختار این مثال به گونه‌ای است که می‌توانیم حد آن را نیز به دست آوریم. فرض کنیم $\lim a_n = a$. در این صورت به سادگی مشاهده می‌شود که $a_{n+1} \to a$. در نتیجه، با استفاده از دستور بازگشتی دنباله

$$a = \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{a_n + 2} = \sqrt{a + 2}$$

پس a ریشه‌ای از معادله $a^2 - a - 2 = 0$ خواهد بود. ریشه‌های این معادله عبارتند از -1 و 2. ولی از آنجا که a مثبت است (چرا؟) پس مقدار a برابر 2 خواهد بود. یعنی این دنباله صعودی همگرا به عدد ۲ است.

سری‌های عددی

فرض کنیم $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. در این صورت تشکیل حاصل‌جمع‌هایی به فرم $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ برای هر عدد طبیعی n همواره امکان‌پذیر است. اکنون این سئوال مطرح می‌شود که آیا می‌توان حاصل‌جمعی به فرم

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

تشکیل داد. باید توجه داشت که انجام بی‌نهایت عمل جمع در عمل غیر ممکن است. با وجود این چنین ساختارهایی در مسائل مختلف کارآیی زیادی دارد. سعی در معنی دادن به چنین عبارت‌هایی منجر به تعریف سری عددی شده است.

تعریف

فرض کنیم $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. در این صورت عبارت $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ را یک سری عددی نامیده آن را با نماد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمایش می‌دهیم. متناظر با این سری، دنباله عددی $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ با دستور

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad s_N = a_1+a_2+\cdots+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

را دنباله حاصل‌جمع جزئی این سری می‌نامیم. اگر دنباله اخیر همگرا به عددی مانند ℓ باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرا و مقدار آن را برابر ℓ تعریف می‌کنیم. در غیر این صورت سری فوق را واگرا می‌نامیم.

مثال. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ ($r\in\mathbb{R}$ عددی ثابت).

ابتدا دنباله حاصل‌جمع جزئی این سری را تشکیل می‌دهیم. با توجه به اتحاد

$$(r^{n+1}-1)=(r-1)(r^n+r^{n-1}+\cdots+r+1) \quad \text{یا} \quad \frac{r^{n+1}-1}{r-1}=1+r+\cdots+r^n$$

داریم

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad s_n = r+r^2+\cdots+r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}-1=\frac{r^{n+1}-r}{r-1}=\frac{r}{r-1}(r^n-1)$$

اکنون رفتار دنباله فوق را وقتی $n\to\infty$ مطالعه می‌کنیم. در حالتی که $|r|<1$، با توجه به اینکه

$$|r^n|=|r|^n\to 0$$

خواهیم داشت $r^n\to 0$. در نتیجه

$$s_n=\frac{r}{r-1}(r^n-1)\to -\frac{r}{r-1}=\frac{r}{1-r}$$

بنابر این طبق تعریف، در این حالت سری همگرا و مقدار آن برابر $\frac{r}{1-r}$ خواهد بود. در سایر حالت‌ها، یعنی وقتی r عددی با شرط $|r|\geq 1$ باشد با یک بررسی ساده مشاهده می‌شود دنباله $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ واگرا است. پس برای این مقادیر r، سری $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ نیز

واگرا خواهد بود. سری مورد مطالعه در این مثال سری هندسی با قدر نسبت r نامیده می‌شود. بنابر بررسی فوق، سری هندسی همگرا است اگر و تنها اگر قدر نسبت آن عددی در بازه $(-۱,۱)$ باشد.

ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} ۲^n ۳^{-n}$.

سری فوق را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۲^n ۳^{-n} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n}{۳^n} = \sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{۲}{۳})^n$$

در نتیجه سری مورد نظر یک سری هندسی با قدر نسبت $r = \frac{۲}{۳}$ بوده، بنابر قسمت (الف)، این سری همگرا و مقدار آن برابر $\frac{\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{۲}{۳}} = ۲$ است.

ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۱)}$.

نخست دنباله حاصل‌جمع جزئی این سری را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n &= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲\times ۳} + \cdots + \frac{۱}{n(n+۱)} \\
&= (۱-\frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}) + \cdots + (\frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱}) \\
&= ۱ - \frac{۱}{n+۱}
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\lim s_n = \lim(۱-\frac{۱}{n+۱}) = ۱$$

پس بنابر تعریف، سری فوق همگرا و مقدار آن برابر ۱ است.

د) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$.

این سری به سری همساز معروف است. با روش برهان خلف نشان می‌دهیم این سری واگرا است. فرض کنیم سری همگرا و مقدار آن برابر ℓ باشد. پس اگر $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله حاصل‌جمع جزئی این سری باشد آنگاه طبق فرض فوق، $s_n \to \ell$. با استفاده از تعریف همگرایی دنباله‌ها، به سادگی مشاهده می‌شود در این حالت دنباله $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ به صورت

$$t_۱ = s_۲ \quad t_۲ = s_۴ \quad \cdots \quad t_n = s_{۲n} \quad \cdots$$

نیز همگرا با همان حد ℓ خواهد بود. در نتیجه $t_n - s_n \to \ell - \ell = 0$. اما

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad t_n - s_n &= s_{2n} - s_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، فاصله t_n و s_n همواره بزرگتر از $\frac{1}{2}$ بوده، دنباله تفاضلی $\{t_n - s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نمی‌تواند به صفر همگرا باشد. تناقض حاصل نشان می‌دهد فرض همگرایی سری همساز نادرست بوده، این سری واگرا است.

در قضیه زیر یک شرط لازم برای همگرایی یک سری عددی را مشاهده می‌کنیم.

قضیه

اگر سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه دنباله $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا به صفر است.

اثبات. فرض کنیم سری فوق همگرا به عددی مانند ℓ باشد. اگر $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ آنگاه طبق تعریف، این دنباله همگرا به ℓ است. به این ترتیب با بزرگ کردن n، مقادیر s_n رفته رفته به ℓ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. روشن است که با بزرگ کردن n، جمله s_{n-1} نیز به ℓ نزدیک می‌شود. در نتیجه اگر $n \to \infty$، آنگاه $s_n - s_{n-1} \to 0$. اما $s_n - s_{n-1} = a_n$. ■

بنابر قضیه فوق، اگر $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای واگرا باشد یا اگر این دنباله به عددی غیر صفر همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است. به این ترتیب هر یک از دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ واگرا هستند.

تذکر. باید توجه داشت که عکس قضیه فوق لزوما برقرار نیست. بدین معنی که اگر $a_n \to 0$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ لزوما همگرا نخواهد بود. به طور مثال، مشاهده کردیم که سری همساز، یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است و این در حالی است که $\frac{1}{n} \to 0$.

به سادگی با استفاده از تعریف همگرایی سری‌های عددی می‌توان ثابت کرد اگر دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشند

آنگاه سری‌های $\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ و $\sum_{n=۱}^{\infty}\lambda a_n$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ ثابت) نیز همگرا هستند و

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \quad \text{و} \quad \sum_{n=۱}^{\infty}\lambda a_n = \lambda \sum_{n=۱}^{\infty} a_n$$

آزمون‌های همگرایی.

همان طور که در تعریف سری عددی مشاهده کردیم، برای بررسی همگرایی یا واگرایی یک سری باید ابتدا دنباله حاصل‌جمع جزئی سری را تشکیل دهیم. سپس بررسی کنیم آیا دنباله حاصل همگرا است یا خیر. در اکثر موارد تعیین ضابطه دنباله حاصل‌جمع جزئی یک سری غیرممکن بوده، بنابر این بررسی همگرایی یا واگرایی آن به طور مستقیم غیرعملی است. در این بخش با قضایایی تحت عنوان آزمون‌های همگرایی آشنا می‌شویم که بررسی همگرایی یا واگرایی یک سری را به صورتی غیرمستقیم انجام می‌دهد. به طور طبیعی، بعد از حصول اطلاع از همگرایی یک سری می‌توانیم مقدار آن را با استفاده از دنباله حاصل‌جمع جزئی با هر درجه دقت تقریب بزنیم.

بحث خود را با آزمون انتگرال آغاز می‌کنیم.

آزمون انتگرال

فرض کنیم $f : [۱, \infty) \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته، نزولی و مثبت بوده، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n = f(n)$. در این صورت سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا است اگر و تنها اگر انتگرال ناسره $\int_{۱}^{\infty} f(x)\, dx$ همگرا باشد.

شکل زیر توجیهی برای برقراری حکم این آزمون را نشان می‌دهد. باید توجه داشت که در صورت همگرایی انتگرال ناسره و در نتیجه سری عددی نظیر، مقدار سری در حالت کلی بزرگتر یا مساوی مقدار انتگرال ناسره خواهد بود.

در ادامه با چند مثال نحوه استفاده از این آزمون در بررسی همگرایی یا واگرایی چند سری عددی را مشاهده می‌کنیم.

مثال. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$، ($p > ۰$ ثابت).

با در نظر گرفتن تابع $f : [۱, \infty) \to \mathbb{R}$ با دستور $f(x) = \frac{۱}{x^p}$، f تابعی پیوسته، مثبت و نزولی است. قبلا مشاهده کرده‌ایم انتگرال ناسره $\int_{۱}^{\infty} f(x)\, dx$ همگرا است اگر و تنها اگر مقدار p بزرگتر از ۱ باشد. در نتیجه بنابر آزمون انتگرال، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$

همگرا است اگر و تنها اگر $p > 1$. پس به طور مثال، هر یک از دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ همگرا هستند. در حالیکه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگرا است.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

با در نظر گرفتن تابع $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ بر بازه $[1, \infty)$ مشاهده می‌شود f بر این بازه پیوسته بوده، برای هر x در این بازه، $f(x) \geq 0$. به علاوه یک بررسی ساده نشان می‌دهد f بر بازه $[e, \infty)$ تابعی نزولی است. با استدلالی مشابه آنچه در آزمون انتگرال بیان گردید، مشاهده می‌شود انتگرال ناسره $\int_4^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$ همگرا است اگر و تنها اگر سری $\sum_{n=4}^{\infty} a_n$ و از آنجا سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد.

اکنون همگرایی انتگرال ناسره فوق را بررسی می‌کنیم.

$$\int_4^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_4^{t} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)\Big|_4^t = \infty$$

به این ترتیب این انتگرال ناسره واگرا و از آنجا سری مورد نظر نیز واگرا است.

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.

با در نظر گرفتن تابع $f(x) = xe^{-x}$ بر بازه $[1, \infty)$، این تابع بر $[1, \infty)$ تابعی پیوسته، مثبت و نزولی است. اکنون همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ را بررسی می‌کنیم. برای هر $t \geq 1$، با استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز،

$$\int_1^t xe^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big|_1^t + \int_1^t e^{-x}\, dx = -te^{-t} + e^{-1} - e^{-x}\Big|_1^{=} 2e^{-1} - te^{-t} - e^{-t}$$

در نتیجه

$$\int_1^{\infty} xe^{-x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t xe^{-x}\, dx = \lim_{t\to\infty} (2e^{-1} - te^{-t} - e^{-t}) = 2e^{-1}$$

در نتیجه این انتگرال ناسره همگرا و از آنجا بنابر آزمون انتگرال، سری مورد نظر نیز همگرا است.

آزمون بعدی آزمون مقایسه است. این آزمون همگرایی یا واگرایی سری مورد نظر را با رفتار سری دیگری که اطلاعات همگرایی یا واگرایی آن را می‌دانیم مقایسه می‌کند.

آزمون مقایسه

فرض کنیم $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دو دنباله عددی نامنفی بوده، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $0\leq a_n\leq b_n$. در این صورت اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است. به همین ترتیب، اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز واگرا خواهد بود.

با چند مثال با نحوه استفاده از آزمون مقایسه آشنا می‌شویم.

مثال. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+1}$.

اگر قرار دهیم $a_n=\frac{1}{n^2+3n+1}$ و $b_n=\frac{1}{n^2}$ آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$،

$$0\leq a_n=\frac{1}{n^2+3n+1}\leq\frac{1}{n^2}=b_n$$

در مثال‌های آزمون انتگرال مشاهده کردیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا است. پس بنابر آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+1}$ نیز همگرا خواهد بود.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n}}$.

برای هر $n\in\mathbb{N}$، با توجه به اینکه

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n}}\geq\frac{n}{\sqrt{n^3+n^3}}=\frac{n}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\geq 0$$

و این که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ و از آنجا سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$ واگرا است، بنابر آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n}}$ نیز واگرا است.

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin(\frac{1}{n^2})$.

قبلا اشاره کرده‌ایم که برای زاویه θ بر حسب رادیان همواره $|\sin\theta|\leq|\theta|$. به خصوص اگر θ مثبت باشد آنگاه $\sin\theta\leq\theta$. در نتیجه $\sin\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$. در عین حال به ازای همه مقادیر n، زاویه $\frac{1}{n^2}$ (که بر حسب رادیان در نظر گرفته می‌شود) در بازه $(0,\frac{\pi}{2})$

بوده، سینوس آن مثبت است. در نتیجه برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\circ \leq \sqrt{n}\sin(\frac{۱}{n^{۲}}) \leq \sqrt{n}\frac{۱}{n^{۲}} = \frac{۱}{n^{\frac{۳}{۲}}}$$

با توجه به اینکه سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ برای مقادیر $p > ۱$ همگرا است، سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{\frac{۳}{۲}}}$ همگرا بوده، بنابر آزمون مقایسه، سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \sqrt{n}\sin(\frac{۱}{n^{۲}})$ همگرا است.

همانطور که مشاهده کردیم، در آزمون مقایسه ما به یک سری به عنوان مبنا که اطلاعات همگرایی یا واگرایی آن را در اختیار داشته باشیم نیاز داریم. سپس با مقایسه سری مورد نظر به نحو مناسب با این سری مبنا، می‌توانیم در مورد همگرایی یا واگرایی آن اظهار نظر کنیم. در آزمون بعدی، با بررسی نوعی رفتار اعضای تشکیل دهند یک سری در مورد همگرایی یا واگرایی آن نظر می‌دهیم.

آزمون نسبت

فرض کنیم $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت بوده، $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n}$ وجود داشته برابر عدد چون ℓ باشد. در این صورت

الف) اگر $\ell < ۱$ آنگاه سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا است.

ب) اگر $\ell > ۱$ آنگاه $\lim a_n \neq \circ$ و در نتیجه سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگرا است.

ج) در حالت $\ell = ۱$ از این آزمون نتیجه‌ای به دست نمی‌آید.

با چند مثال، نحوه استفاده از این آزمون را مشاهده می‌کنیم.

مثال. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum\limits_{n=\circ}^{\infty} \frac{n^{۲}}{۳^n}$.

برای این سری $a_n = \frac{n^{۲}}{۳^n}$ که جمله‌ای مثبت است. در نتیجه

$$\lim \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+۱)^{۲}}{۳^{n+۱}}}{\frac{n^{۲}}{۳^n}} = \lim \frac{۱}{۳}\frac{(n+۱)^{۲}}{n^{۲}} = \frac{۱}{۳} < ۱$$

بنابر آزمون نسبت، این سری همگرا است.

ب) $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ ($a > ۰$ ثابت)

در سری مورد نظر $a_n = \frac{a^n}{n!}$ که طبق فرض فوق، مقداری مثبت است. با استفاده از آزمون نسبت

$$\lim \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim \frac{\frac{a^{n+۱}}{(n+۱)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim a\frac{n!}{(n+۱)!} = \lim \frac{a}{n+۱} = ۰ < ۱$$

در نتیجه این سری نیز همگرا است.

ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۳^n}{n^۹}$.

برای این سری $a_n = \frac{۳^n}{n^۹} > ۰$. بااستفاده از آزمون نسبت،

$$\lim \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim \frac{\frac{۳^{n+۱}}{(n+۱)^۹}}{\frac{۳^n}{n^۹}} = \lim ۳\frac{n^۹}{(n+۱)^۹} = ۳ > ۱$$

در نتیجه این سری واگرا است.

باید توجه کرد که سه آزمون بیان شده تا اینجا، یعنی آزمون‌های انتگرال، مقایسه و نسبت برای سری‌ها با جملات نامنفی (یا قدری کلی‌تر، سری‌ها با جملاتی که از مرحله‌ای به بعد نامنفی هستند) قابل استفاده است. برای بررسی رفتار یک سری با جملات دلخواه می‌توانیم از قضیه زیر استفاده کنیم.

قضیه

برای دنباله‌ای چون $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد حقیقی، اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ (که یک سری با جملات نامنفی است) همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز همگرا خواهد بود.

اثبات. با توجه به اینکه برای هر عدد حقیقی مانند a، نامساوی‌های $-|a| \leq a \leq |a|$ همواره برقرار است، خواهیم داشت

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad -|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

در نتیجه با اضافه کردن $|a_n|$ به طرفین روابط فوق،

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

بنابه فرض سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ و از آنجا سری $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ همگرا است. در نتیجه بنابر آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ نیز همگرا خواهد بود. با توجه به اینکه

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \Big((a_n + |a_n|) - |a_n| \Big)$$

از همگرایی دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نتیجه می‌شود. ■

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرای مطلق نامیم هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد. بنابر قضیه فوق، هر سری همگرای مطلق خود نیز همگرا است. بعدا مشاهده می‌کنیم عکس این خاصیت لزوما برقرار نیست. به این معنی که اگر یک سری چون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه لزوما سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا نخواهد بود. در نتیجه از واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ نمی‌توانیم واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را در حالت کلی نتیجه بگیریم.

مثال. همگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{1+n^2}$.

توجه می‌کنیم به دلیل وجود جمله $\sin n$، عبارت $a_n = \frac{\sin n}{n^2+1}$ می‌تواند هر دو علامت مثبت و منفی را اختیار کند. بنابر این آزمون‌های سه‌گانه‌ای که برای سری‌ها با جملات نامنفی بیان کردیم مستقیما برای این سری کارآیی ندارند. بر این اساس، همگرایی مطلق این سری را بررسی می‌کنیم.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq |a_n| = \frac{|\sin n|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

با توجه به همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و بنابر آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا است. در نتیجه بنابر قضیه فوق، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1}$ نیز همگرا خواهد بود.

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ ($a \in \mathbb{R}$ ثابت).

قبلا مشاهده کرده‌ایم سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ برای هر $a \geq 0$ همگرا است. در نتیجه برای هر $a \in \mathbb{R}$، با توجه به اینکه $|a| \geq 0$، سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a|^n}{n!}$ نیز همگرا است. اما

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{a^n}{n!}| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a^n|}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a|^n}{n!}$$

در نتیجه سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ برای هر $a \in \mathbb{R}$ همگرای مطلق و از آنجا همگرا است.

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

با توجه به اینکه جملات این سری یک در میان مثبت و منفی است (چنین سری را یک سری متناوب می‌نامیم) آزمون‌های همگرایی برای سری‌ها با جملات نامنفی را نمی‌توانیم برای این سری استفاده کنیم. به همین دلیل همگرایی مطلق آن را بررسی می‌کنیم.

$$|a_n| = |\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}| = \frac{|(-1)^n|}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

می‌دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ واگرا است ($p = \frac{1}{2} \leq 1$). در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ یک سری واگرا است. بنابر توضیحی که بعد از اثبات قضیه قبل بیان کردیم، با این اطلاع نمی‌توانیم در مورد همگرایی یا واگرایی سری فوق اظهار نظر کنیم.

رفتار برخی سری‌ها مانند سری اخیر را می‌توانیم با استفاده از آزمونی به نام آزمون لایب‌نیتز تعیین نماییم.

آزمون لایب‌نیتز

فرض کنیم $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد مثبت باشد و $\lim a_n = 0$. در این صورت سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ همگرا است.

با چند مثال با آزمون فوق بیشتر آشنا می‌شویم.

مثال. همگرایی هر یک از سری‌های متناوب زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ ($p > 0$ ثابت)

اگر قرار دهیم $a_n = \frac{۱}{n^p}$ آنگاه برای هر $p > ۰$،

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{۱}{n^p} > \frac{۱}{(n+۱)^p} = a_{n+۱} > ۰$$

در نتیجه $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد مثبت است. به علاوه

$$\lim a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^p} = ۰$$

بنابر آزمون لایب‌نیتز، سری متناوب $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^p}$ برای هر $p > ۰$ همگرا است.

به این ترتیب، در حالت خاص $p = \frac{۱}{۲}$، سری متناوب $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n}}$ (سری ج در مثال قبلی) همگرا خواهد بود. همچنین توجه می‌کنیم برای $۰ < p \leq ۱$ علی‌رغم همگرایی سری متناوب $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^p}$، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p} = \sum_{n=۱}^{\infty} |\frac{(-۱)^n}{n^p}|$ واگرا است. پس همانطور که قبلا نیز اشاره کردیم، از واگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ نمی‌توانیم لزوما واگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ را نتیجه بگیریم.

ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{\ln n}{n}$.

اگر $f : [۱, \infty) \to \mathbb{R}$ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ باشد آنگاه f بر این بازه پیوسته است و

$$\forall x \in (۱, \infty) \qquad f'(x) = \frac{۱ - \ln x}{x^۲}$$

در نتیجه برای $x \geq e$، $f'(x) \leq ۰$. یعنی f بر بازه $[e, \infty)$ تابعی نزولی است. در نتیجه اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n := f(n)$ آنگاه دنباله $\{a_n\}_{n\geq ۳}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد مثبت است. همچنین با توجه به اینکه $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = ۰$، خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = ۰$$

در نتیجه با استفاده از آزمون لایب‌نیتز، سری متناوب $\sum_{n=۳}^{\infty} (-۱)^n a_n$ همگرا است. از آنجا که اضافه کردن چندجمله به یک سری اثری در همگرایی یا واگرایی سری ندارد، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{\ln n}{n}$ نیز همگرا است.

سری توان.
فرض کنیم $x_0 \in \mathbb{R}$. در این صورت نظیر دنباله عددی $\{a_n\}_{n\geq 0}$ از اعداد حقیقی، عبارت

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

را یک سری توان حول x_0 (یا سری توان با مرکز همگرایی x_0) نامیده، آن را به طور خلاصه به صورت $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ نمایش می‌دهیم. با انتخاب هر عدد حقیقی و قرار دادن آن به جای متغیر x در عبارت فوق، این عبارت تبدیل به یک سری عددی شده، می‌تواند همگرا یا واگرا باشد. مجموعه تمام اعدادی که با جایگذاری در عبارت فوق، سری عددی حاصل همگرا باشد را دامنه همگرایی سری توان می‌نامیم.

مثال. دامنه همگرایی سری توان $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-1)^n$ را تعیین کنید.

برای تعیین دامنه همگرایی، $x \in \mathbb{R}$ را مقداری ثابت در نظر گرفته، سری عددی $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-1)^n$ را بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه علامت جمله $(x-1)^n$ بسته به اینکه $x \geq 1$ یا $x < 1$ می‌تواند مثبت یا منفی شود، پس سری متناظر به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{n}{2^n}(x-1)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}|x-1|^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

را در نظر می‌گیریم که در آن $A_n = \frac{n}{2^n}|x-1|^n$ مقداری نامنفی است. با استفاده از آزمون نسبت برای این سری با جملات نامنفی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}|x-1|^{n+1}}{\frac{n}{2^n}|x-1|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{|x-1|}{2}$$

در نتیجه بنابر آزمون نسبت، برای مقادیری از $x \in \mathbb{R}$ که $\frac{|x-1|}{2} < 1$ (یا مقادیر x با شرط $|x-1| < 2$) سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ همگرا است. در نتیجه برای این مقادیر x، سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-1)^n$ همگرای مطلق و در نتیجه همگرا خواهد بود.

برای مقادیری از x که $\frac{|x-1|}{2} > 1$، $\lim A_n = \lim \frac{n}{2^n}|x-1|^n \neq 0$ و در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}(x-x_0)^n \neq 0$. به این ترتیب برای $x \in \mathbb{R}$ با شرط $|x-1| > 2$ سری توان فوق شرط لازم همگرایی را نداشته، واگرا خواهد بود.

نهایتا برای مقادیر x با شرط $|x-1| = 2$، یعنی $x = 3$ و $x = -1$ با جایگذاری این مقادیر در سری توان فوق به دو سری عددی $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(3-1)^n$ و $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(-1-1)^n$ می‌رسیم که هر دو واگرا هستند. بنابر این

دامنه همگرایی سری فوق برابر مجموعه

$$\{x \in \mathbb{R}; |x-۱| < ۲\} = (-۱, ۳)$$

است.

تذکر. برای سری توان $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-x_۰)^n$ فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}|$ وجود داشته برابر $\ell > ۰$ باشد. با قرار دادن

$$A_n := |a_n(x-x_۰)^n|$$

و استفاده از آزمون نسبت برای سری $\sum_{n=۰}^{\infty} A_n$ (که یک سری با جملات نامنفی است) داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+۱}}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+۱}(x-x_۰)^{n+۱}|}{|a_n(x-x_۰)^n|} = |x-x_۰| \lim \frac{|a_{n+۱}|}{|a_n|} = \ell|x-x_۰|$$

به این ترتیب برای مقادیری از $x \in \mathbb{R}$ که $\ell|x-x_۰| < ۱$ (یا به طور معادل، برای مقادیری که $|x-x_۰| < \frac{۱}{\ell}$) سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-x_۰)^n$ همگرای مطلق و در نتیجه همگرا است. برای مقادیری از $x \in \mathbb{R}$ که $\ell|x-x_۰| > ۱$ (یا به طور معادل، برای مقادیری که $|x-x_۰| > \frac{۱}{\ell}$) $\lim A_n = \lim |a_n(x-x_۰)^n| \neq ۰$ و از آنجا $\lim a_n(x-x_۰)^n \neq ۰$ و در نتیجه سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-x_۰)^n$ واگرا است. در نتیجه اگر $D \subset \mathbb{R}$ دامنه همگرایی سری توان فوق باشد آنگاه

$$(x_۰ - \frac{۱}{\ell}, x_۰ + \frac{۱}{\ell}) \subseteq D \subseteq [x_۰ - \frac{۱}{\ell}, x_۰ + \frac{۱}{\ell}]$$

در این حالت، عدد $R := \frac{۱}{\ell}$ را شعاع همگرایی سری توان می‌نامیم. بنابر این در حالتی که $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}|$ وجود داشته عددی غیر صفر باشد سری توان بر بازه $(x_۰ - R, x_۰ + R)$ همگرا (در واقع همگرای مطلق) و بر بازه‌های $(-\infty, x_۰ - R)$ و $(x_۰ + R, \infty)$ واگرا است. رفتار سری توان در نقاط $x_۰ - R$ و $x_۰ + R$ بستگی به ضرایب سری توان داشته، برای هر سری توان باید جداگانه بررسی شوند.

در حالتی که $\lim |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = ۰$ به سادگی مشاهده می‌شود سری توان بر $\mathbb{R}$ همگرا است. در این حالت شعاع همگرایی را برابر بی‌نهایت گویند. در حالتی که $\lim |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = \infty$ سری توان فقط در $x = x_۰$ همگرا است. نتایج فوق در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه

برای سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$ که در آن $0 \leq \ell \leq \infty$. در این صورت

الف) اگر $0 < \ell < \infty$ آنگاه برای $R := \frac{1}{\ell}$، سری توان بر بازه $(x_0 - R, x_0 + R)$ همگرا و بر هر یک از بازه‌های $(-\infty, x_0 - R)$ و $(x_0 + R, \infty)$ واگرا است.

ب) اگر $\ell = 0$ آنگاه سری توان بر $\mathbb{R}$ همگرا است.

ج) اگر $\ell = \infty$ آنگاه سری توان فوق فقط در $x = x_0$ همگرا است.

مثال. شعاع همگرایی و دامنه همگرایی هم یک از سری‌های توان زیر را به دست آورید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}(x+2)^n$.

برای این سری توان $x_0 = -2$ ، $a_n = \frac{1}{n3^n}$. در نتیجه

$$\ell = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{1}{n3^n}} = \lim \frac{1}{3}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{3}$$

به این ترتیب شعاع همگرایی سری برابر $R = \frac{1}{\ell} = 3$ است. در نتیجه این سری برای $x \in \mathbb{R}$ با شرط $|x+2| < 3$ (یا هر x در بازه $(-5, 1)$) همگرا و بر بازه‌های $(-\infty, -5)$ و $(1, \infty)$ واگرا است. برای $x = -5$ و $x = 1$ مستقیما این مقادیر را در سری توان فوق جایگذاری می‌کنیم. در این صورت دو سری عددی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}(-5+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{و} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}(1+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

به دست می‌آید که اولی (به ازای $x = -5$) بنابر آزمون لایب‌نیتز همگرا و دومی (به ازای $x = 1$) سری همساز و واگرا است. پس دامنه همگرایی این سری برابر بازه $[-5, 1)$ است.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(2x-5)^n$.

ابتدا سری فوق را با فاکتورگیری از عدد ۲ در داخل عبارت $(2x-5)$ به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(2x-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(x-\frac{5}{2})^n$$

که سری توان با مرکز همگرایی $x_\circ = \frac{۵}{۲}$ و $a_n = \frac{۲^n}{n^۲}$ است. در نتیجه

$$\ell = \lim \frac{|a_{n+۱}|}{|a_n|} = \lim \frac{\frac{۲^{n+۱}}{(n+۱)^۲}}{\frac{۲^n}{n^۲}} = \lim ۲\frac{n^۲}{(n+۱)^۲} = ۲$$

در نتیجه شعاع همگرایی این سری برابر $R = \frac{۱}{\ell} = \frac{۱}{۲}$ بوده، این سری بر بازه $(۲, ۳) = (\frac{۵}{۲} - \frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۲})$ همگرا و بر مجموعه $(-\infty, \frac{۵}{۲} - \frac{۱}{۲}) \cup (\frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۲}, \infty) = (-\infty, ۲) \cup (۳, \infty)$ واگرا است. برای نقاط $x = ۲$ و $x = ۳$ با جایگذاری مستقیم این مقادیر در سری توان فوق، دو سری عددی

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n}{n^۲}(۲ - \frac{۵}{۲})^n = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^۲} \qquad \text{و} \qquad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n}{n^۲}(۳ - \frac{۵}{۲})^n = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$$

به دست می‌آید که هر دو همگرا هستند. در نتیجه دامنه همگرایی این سری برابر بازه $[۲, ۳]$ است.

ج) $\sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(۲x)^n}{n!}$.

ابتدا سری توان را به صورت $\sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۲^n}{n!}x^n$ می‌نویسیم که یک سری توان با مرکز همگرایی $x_\circ = \circ$ و $a_n = \frac{۲^n}{n!}$ است. در نتیجه

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+۱}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۲^{n+۱}}{(n+۱)!}}{\frac{۲^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} ۲\frac{n!}{(n+۱)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{۲}{(n+۱)} = \circ$$

به این ترتیب این سری بر تمام $\mathbb{R}$ همگرا است. در این حالت می‌توانیم بگوییم شعاع همگرایی سری $R = \infty$ است.

فرض کنیم سری توان $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(x - x_\circ)^n$ شعاع همگرایی برابر $R \neq \circ$ داشته باشد. در این حالت می‌توانیم با استفاده از این سری تابعی چون $f : (x_\circ - R, x_\circ + R) \to \mathbb{R}$ (یا تابعی از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$، اگر $R = \infty$) با دستور

$$\forall x \in (x_\circ - R, x_\circ + R) \qquad f(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(x - x_\circ)^n$$

تعریف کنیم. خاصیت‌های اصلی این تابع در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه

فرض کنیم $f:(x_0-R,x_0+R)\to\mathbb{R}$ تابع متناظر با سری توان $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$، با شعاع همگرایی $R\neq 0$، باشد. در این صورت

الف) تابع f بر (x_0-R,x_0+R) تابعی مشتق‌پذیر است و برای هر x در این بازه

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

به علاوه، شعاع همگرایی این سری توان نیز برابر R است.

ب) سری توان $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ دارای شعاع همگرایی برابر R بوده، تابع معرفی شده توسط این سری توان یک تابع اولیه برای تابع f است. به بیان دیگر

$$\int f(x)\,dx=\int\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\Big)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+C$$

مثال. الف) شعاع همگرایی سری توان $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ و مقدار $f(0)$ را تعیین کنید.

ب) اگر f تابع معرفی شده توسط این سری توان باشد مطلوب است محاسبه $f'(x)$. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) سری مورد نظر یک سری با مرکز همگرایی $x_0=0$ و ضرایب $a_n=\frac{1}{n!}$ است. برای این سری

$$\ell=\lim\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim\frac{1}{n+1}=0$$

در نتیجه شعاع همگرایی این سری برابر بی‌نهایت است. بنابر قضیه قبل، این سری تابعی مشتق‌پذیر بر $\mathbb{R}$ با دستور

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

تعریف می‌کند. با توجه به این ضابطه $f(0)=1$.

ب) بنابر قضیه قبل، برای محاسبه تابع مشتق می‌توانیم جمله به جمله از سری توان فوق مشتق بگیریم.

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

با بسط سری توان مربوط به تابع f'،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

پس $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با دو خاصیت $f(0) = 1$ و $f'(x) = f(x)$ است. قبلا در فصل پنجم درس، طی مثالی مشاهده کردیم تابع نمایی تنها تابع صادق در این شرایط است. پس سری توان در این مثال همان تابع نمایی را مشخص می‌کند. یعنی

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

بسط تیلور و مک‌لورن.

قبلا در فصل پنجم مشاهده کرده‌ایم اگر تابع f در یک همسایگی نقطه x_0 تابعی $n+1$ بار مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای هر x در این همسایگی، عدد c بین x و x_0 وجود دارد که

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

جمله آخر را باقیمانده تیلور نامیدیم و آن را با $R_n(x)$ نشان دادیم.

اکنون فرض کنیم f بر یک همسایگی نقطه x_0 بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد. در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر x در این همسایگی تساوی فوق برقرار خواهد بود. در این حالت اگر برای هر x در این همسایگی

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0$$

آنگاه

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \Big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، در این حالت تابع f توسط سری توانی به صورت فوق بر این همسایگی قابل نمایش می‌باشد. این سری توان را بسط تیلور f حول نقطه x_0 می‌نامیم. در حالتی که $x_0 = 0$ سری توان مزبور را سری مک‌لورن (یا بسط مک‌لورن) f می‌نامند. بدیهی است که شعاع همگرایی این سری توان به رفتار ضرایب $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ بستگی دارد.

مثال. بسط مک‌لورن هر یک از توابع e^x، $\sin x$ و $\cos x$ را به دست آورید.

بنابر آنچه در بالا اشاره کردیم، سری مک‌لورن تابعی چون f به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ است. اکنون برای هر یک از توابع فوق به محاسبه ضرایب سری مک‌ل.رن می‌پردازیم.

برای تابع $f(x) = e^x$ از آنجا که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f^{(n)}(x) = e^x$ خواهیم داشت $f^{(n)}(0) = 1$ و در نتیجه سری مک‌لورن این تابع به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

برای تابع $f(x) = \sin x$، به سادگی مشاهده می‌شود برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x \qquad \text{و} \qquad f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n+1} \cos x$$

در نتیجه

$$f^{(2n)}(0) = 0 \qquad \text{و} \qquad f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n+1}$$

و از آنجا بسط مک‌لورن این تابع به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

بسط مک‌لورن تابع کسینوس نیز با محاسباتی مشابه به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

می‌توان تحقیق کرد که شعاع همگرایی هر سه سری توان فوق برابر بی‌نهایت است.

تمرین. فرض کنید i عدد موهومی $\sqrt{-1}$ باشد. با استفاده از بسط‌های فوق و با فرض اینکه مقدار e^{ix} را بتوان با بسط مک‌لورن فوق به دست آورد، نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

تمرین‌های فصل دنباله و سری

۱. همگرایی یا واگرایی هر یک از دنباله‌های $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ با جمله عمومی داده شده زیر را مشخص کنید و در صورت همگرایی، حد آن را بیابید.

الف) $a_n = e^{-۱/\sqrt{n}}$

ب) $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{n+۱}\right)$

ج) $a_n = \dfrac{n^۲}{\sqrt{n^۳+۴n}}$

د) $a_n = \dfrac{(۲n-۱)!}{(۲n+۱)!}$

ه) $a_n = \dfrac{\ln n}{\ln ۲n}$

و) $a_n = \dfrac{\tan^{-۱} n}{n}$

ز) $a_n = \ln(n+۱) - \ln n$

ح) $a_n = \sqrt[n]{n}$

ط) $a_n = \ln(۲n^۲+۱) - \ln(n^۲+۱)$

ی) $a_n = \arctan(\ln n)$

ک) $a_n = n - \sqrt{n+۱}\sqrt{n+۳}$

ل) $a_n = \dfrac{n!}{۲^n}$

م) $a_n = \dfrac{(-۳)^n}{n!}$

۲. هر یک از خاصیت‌های یکنوایی و کرانداری را برای دنباله‌های زیر بررسی کنید.

الف) $a_n = \cos n$

ب) $a_n = \frac{۱}{۲n+۳}$

ج) $a_n = \frac{۱-n}{۲+n}$

د) $a_n = n(-۱)^n$

ه) $a_n = ۲ + \frac{(-۱)^n}{n}$

و) $a_n = ۳ - ۲ne^{-n}$

ز) $a_n = n^۳ - ۳n + ۳$

۳. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید و در صورت همگرایی مقدار سری را به‌دست آورید.

الف) $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۳)^{n-۱}}{۴^n}$

ب) $\displaystyle\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۳^{n+۱}}{(-۲)^n}$

ج) $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{e^{۲n}}{۶^{n-۱}}$

د) $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \ln\left(\frac{n^۲+۱}{۲n^۲+۱}\right)$

ه) $\displaystyle\sum_{n=۴}^{\infty} \left(\frac{۱}{\sqrt{n}} - \frac{۱}{\sqrt{n+۱}}\right)$

و) $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \left(e^{۱/n} - e^{۱/(n+۱)}\right)$

۴. با استفاده از آزمون انتگرال، همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$

ج) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

د) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

ه) $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k}$

و) $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k^2}$

۵. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \cdots$

ب) $-\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \cdots$

ج) $\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 6} + \frac{1}{\ln 7} - \cdots$

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3+5n}$

ه) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$

و) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$

ز) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$

ح) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$

ط) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$

ی) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n e^{-n}$

ک) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arctan n$

ل) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{1+\sqrt{n}}$

م) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{2^n}$

ن) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

ص) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

ع) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

۶. همگرایی مطلق و همگرایی مشروط هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+1}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$

ه) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+4}$

۷. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n n^3}$

(د) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

(ه) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

(و) $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k}$

(ز) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

(ح) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

(ط) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi^n}{(-3)^{n-1}}$

(ی) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(-10)^{n+1}}$

(ک) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

(ل) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(م) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}100^n}{n!}$

(ن) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

۸. شعاع همگرایی و بازه‌ی همگرایی هریک از سری‌های توانی زیر را به‌دست آورید.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$

(د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

(ه) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(و) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{\sqrt{n}} x^n$

(ز) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^4 4^n}$

(ح) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n^2+1)} x^n$

(ط) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

(ی) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

(ک) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)2^n}(x-1)^n$

(ل) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \ln n}$

(م) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{8^n}(x+6)^n$

(ن) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \sqrt{n}}$

(ص) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n}(x-a)^n \quad , \quad b>0$

(ع) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{\ln n}(x-a)^n \quad , \quad b>0$

(ف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{n^3}$

(ض) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

۹. سری تیلور و شعاع همگرایی مربوط به تابع f به مرکز a را پیدا کنید.

الف) $f(x) = x^۵ + ۲x^۳ + x, \quad a = ۲$

ب) $f(x) = x^۶ - x^۴ + ۲, \quad a = -۲$

ج) $f(x) = \ln x, \quad a = ۲$

د) $f(x) = \frac{۱}{x}, \quad a = -۳$

ه) $f(x) = e^{۲x}, \quad a = ۳$

و) $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/۲$

ز) $f(x) = \sin x, \quad a = \pi$

ح) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = ۱۶$

۱۰. سری مک لورن هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \arctan(x^۲)$

ب) $f(x) = \sin(\pi x/۴)$

ج) $f(x) = x \cos ۲x$

د) $f(x) = e^{۳x} - e^{۲x}$

ه) $f(x) = x \cos\left(\frac{۱}{۲}x^۲\right)$

و) $f(x) = x^۲ \ln(۱ + x^۳)$

ز) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{۴ + x^۲}}$

ح) $f(x) = \frac{x^۲}{\sqrt{۲ + x}}$

ط) $f(x) = \sin^۲ x$

ی) $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^۳} & x \neq ۰ \\ \frac{۱}{۶} & x = ۰ \end{cases}$

تمرین‌های تکمیلی.

۱. مقدار p را به گونه‌ای بیابید که سری‌های زیر همگرا باشند.

الف) $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n(\ln n)^p}$

ب) $\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{n \ln n [\ln(\ln n)]^p}$

ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} n(۱ + n^۲)^p$

د) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

ه) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n + p}$

و) $\sum_{n=۲}^{\infty} (-۱)^{n-۱} \frac{(\ln n)^p}{n}$

۲. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+8}$

ب) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$

ج) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{3+10^n}$

د) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{5^n+6^n}$

ه) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k}$

و) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin^2 k}{1+k^3}$

ز) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3+4k+3}}$

ح) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos n}{e^n}$

ط) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$

ی) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^4+n^2}$

ک) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3^n}{n+2^n}$

ل) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$

م) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n}$

ن) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

۳. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را با استفاده از آزمون‌ها بررسی کنید.

الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^3+1}$

ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^3+1}$

ج) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2}$

د) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(1+n)^{3n}}$

ه) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

و) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^4}{4^n}$

ز) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$

ح) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$

ط) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{3^n}\right)$

ی) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$

ک) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}3^{k+1}}{k^k}$

ل) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n}$

م) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

ن) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{k}-1}{k(\sqrt{k}+1)}$

ص) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$

ع) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2+\sin k}$

۴. فرض کنید $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اعداد طبیعی متشکل از اعداد ۰ تا ۹ باشد. نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$ همگرا است.
(این سری نمایش عدد اعشاری $0/d_1d_2\ldots d_n\ldots$ است.)

۵. نشان دهید اگر $a_n \geq 0$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ نیز همگراست.

۶. نشان دهید اگر $a_n > 0$ و $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

۷. نشان دهید اگر $a_n > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ نیز همگراست.

۸. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا با عناصر مثبت باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که $\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ نیز همگراست؟