محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس اول «هندسهٔ تحلیلی » نام طراح: جواد عسگری

اهداف یادگیری:

-یادآوری معادله خط در حالت کلی و حالت های خاص

-یادآوری شرط موازی بودن دو خط و آموزش شرط عمود بودن دو خط

-توانایی محاسبه فاصله دو نقطه با داشتن مختصات آنها

-توانایی یافتن مختصات نقطه وسط پاره خط

-توانایی به کارگیری فرمول فاصله نقطه از خط

انتظارات پس از مطالعه:

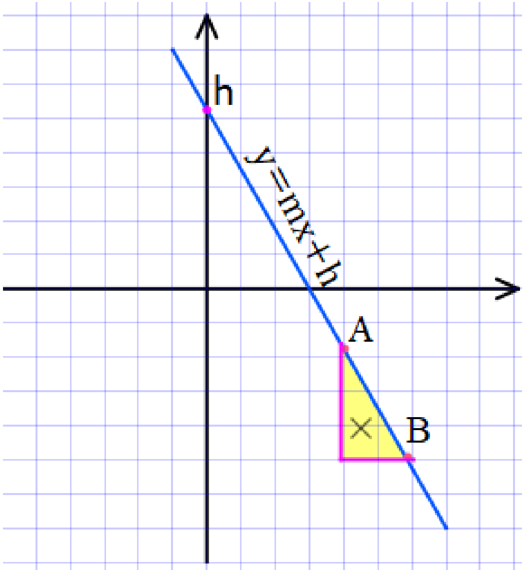
—بتواند تشخیص دهد که دو خط نسبت به هم چه وضعیتی دارند

—بتواند نوع مثلث و محیط و مساحت مثلث را با محاسبه طول اجزای اصلی و فرعی مثلث مشخص کند.

-بتواند قرینه یک نقطه را نسبت به نقطه دیگر پیدا کند.

-بتواند قرینه یک نقطه را نسبت به یک خط مشخص کند.

یادآوری از سال های قبل:



◈شیب یک خط برابر است با نسبت جابه جایی عمودی به جابه جایی افقی یعنی اگر $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ دو نقطه دو نقطه از خطی باشند دراینصورت شیب خط برابر است با $m = \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$

◈در معادله خط $y = mx + h$ ، m را شیب خط و h را عرض از مبدا می نامند

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A(۱, -۲)$ و $B(۳,۲)$ بگذرد.

راه حل: شیب خط برابر است با: $m = \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} = \frac{۲-(-۲)}{۳-۱} = \frac{۴}{۲} = ۲$

معادله خط بصورت $y = ۲x + h$ می باشد مختصات یکی از دو نقطه A یا B را در معادله خط جاگذاری می کنیم تا عرض از مبدا مشخص شود

$-۲ = ۲ \times ۱ + h \Rightarrow h = -۴$ پس معادله خط برابر $y = ۲x - ۴$ می باشد.

◈اگر دو خط $L_۱$ و $L_۲$ با هم موازی باشند در اینصورت شیب هایشان با هم برابر است یعنی $m = m'$

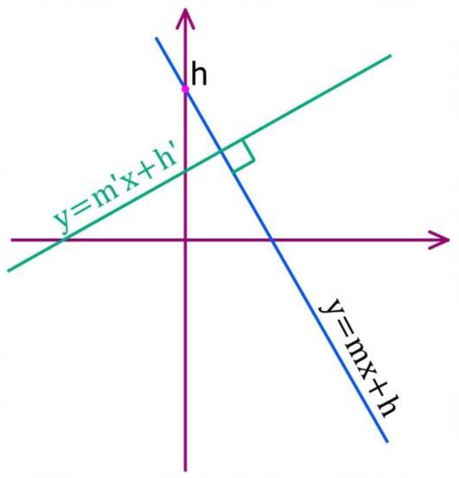
مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(۲,۰)$ عبور کند و با خط $y = -۳x + ۷$ موازی باشد.

راه حل: شیب خط داده شده برابر $m' = -۳$ است پس $m = -۳$

$y = -۳x + h \Rightarrow ۰ = -۳ \times ۲ + h \Rightarrow h = ۶$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس اول «هندسهٔ تحلیلی » نام طراح: جواد عسگری

و معادله خط برابر $y = -۳x + ۶$ می باشد.



◈دو خط عمود برهم : اگر خط $L_۱$ به معادله $y = mx + h$ بر خط $L_۲$ به معادله $y = m'x + h'$ عمود باشد در اینصورت $m.m' = -۱$ و یا $m' = \frac{-۱}{m}$ و به عبارت دیگر شیب خط یکی قرینه و معکوس دیگری باشد.

مثال:دو خط به معادله های $y = ۳x + ۴$ و $۶y + ۲x - ۱ = ۰$ بر هم عمود هستند زیرا شیب خط اولی $m = ۳$ و شیب خط دومی برابر $m' = -\frac{۲}{۶} = -\frac{۱}{۳}$ است و $m.m' = ۳ \times \left(-\frac{۱}{۳}\right) = -۱$

مثال: سه خط $L_۱: ۴x + ۶y = ۳$ و $L_۲: y = ۳x + ۵$ و $L_۳: ۳x - ۲y = ۶$ دو به دو نسبت به هم چه وضعی دارند؟

راه حل: ابتدا شیب هر سه خط را جداگانه محاسبه می کنیم:

$$L_۱: ۴x + ۶y = ۳ \Rightarrow ۶y = -۴x + ۳ \Rightarrow y = \frac{-۴}{۶}x + \frac{۳}{۶} \Rightarrow m_۱ = \frac{-۲}{۳}$$

$$L_۲: y = ۳x + ۵ \Rightarrow m_۲ = ۳$$

$$L_۳: ۳x - ۲y = ۶ \Rightarrow -۲y = -۳x + ۶ \Rightarrow y = \frac{-۳}{-۲}x + \frac{۶}{-۲} \Rightarrow m_۳ = \frac{۳}{۲}$$

شیب دو خط $L_۱$ و $L_۲$ برابر نیستند پس موازی یکدیگر نیستند و شیب یکی قرینه و معکوس دیگری نیست پس برهم عمود هم نیستند این دو خط متقاطع هستند.

شیب های دو خط $L_۱$ و $L_۳$ قرینه و معکوس یکدیگرند پس این دو خط برهم عمودند

با توجه به شیب های دو خط $L_۲$ و $L_۳$ این خط باهم متقاطع هستند.

تست: خط d در نقطه ای که مجموع طول و عرض آن ۳ باشد بر خط $۴x + y = ۱۵$ عمود است عرض از مبدا خط d کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۱-

راه حل: نقطه $A(x,y)$ روی خط $۴x + y = ۱۵$ قرار دارد و مجموع طول و عرض آن ۳ است پس $\begin{cases} ۴x + y = ۱۵ \\ x + y = ۳ \end{cases}$

از حل دستگاه بدست می آید$x = ۴, y = -۱$

حال باید معادله خطی را بنویسیم که از نقطه $A(۴,-۱)$ بگذرد و بر خط $۴x + y = ۱۵$ عمود باشدچون $m = -۴$ پس $m' = \frac{۱}{۴}$ و در نتیجه $y + ۱ = \frac{۱}{۴}(x - ۴)$ و یا بطور ساده تر $y = \frac{۱}{۴}x - ۲$ عرض از مبدا خط d برابر ۲- می باشد.

محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل اول
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسهٔ تحلیلی و جبر
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس اول «هندسهٔ تحلیلی »
۱۴۰۰-۱۴۰۱	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	نام طراح: جواد عسگری
	گروه ریاضی	

نکته: برای اینکه سه نقطه A ، B و C روی یک خط راست قرار داشته باشند یا به اصطلاح هم راستا(هم استقامت) باشند) آن است که شیب دو به دوی آنها یکی باشد یعنی $m_{AB} = m_{BC}$

تست: به ازای کدام مقادیر a نقاط $(a,۳)$ ، $(۶,۴a+۱)$ و مبدا مختصات در یک راستا قرار می گیرند؟(تجربی خارج ۸۸)

۱) $\frac{۹}{۴}$ و -۲ ۲) $\frac{۳}{۴}$ و -۲ ۳) $\frac{-۳}{۴}$ و ۲ ۴) $\frac{-۹}{۴}$ و ۲

راه حل: کافی است که شیب دو به دوی آنها را یکی قرار بدهیم پس

$$\frac{۴a+۱-۳}{۶-a} = \frac{۳-۰}{a-۰} \Longrightarrow ۴a^۲ - ۲a = ۱۸ - ۳a$$

$$\Longrightarrow ۴a^۲ + a - ۱۸ = ۰ \Longrightarrow a = ۲, a = \frac{-۹}{۴}$$

◈**وضعیت دو خط نسبت به هم :** اگر خط های L و L' به معادله های $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ در صفحه مختصات باشند در اینصورت

الف) دو خط همدیگر را قطع می کنند هرگاه $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ و یا دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ فقط یک جواب دارد

ب) دو خط با هم موازی هستند هر گاه $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ و یا دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ جواب ندارد

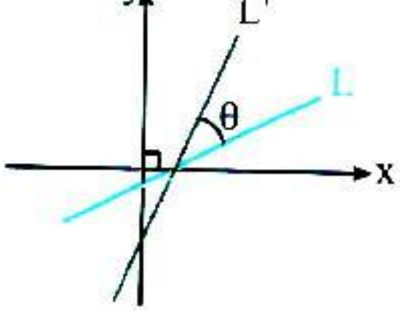
ج) دو خط برهم منطبق هستند هر گاه $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ و یا دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ بی شمار جواب دارد.

تست: به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} x+my=۱ \\ ۲x+(m+۲)y=۳ \end{cases}$ فاقد جواب است؟

۱) ۲ ۲) -۲

۳) ۳ ۴) -۳

راه حل: شرط جواب نداشتن دستگاه آن است که $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ پس $\frac{۱}{۲} = \frac{m}{m+۲} \neq \frac{۱}{۳}$ در نتیجه بدست می آید $m=-۲$



◈**زاویه بین دو خط متقاطع:** اگر دو خط متقاطع با شیب های m و m' داشته باشیم و θ زاویه حاده بین آنها باشد

آنگاه θ از رابطه مقابل بدست می آید: $tan\theta = \left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right|$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس اول «هندسهٔ تحلیلی » نام طراح: جواد عسگری

مثال: زاویه بین دو خط $y = ۲x + ۱$ و $y + ۳x = ۲$ را تعیین کنید.

شیب خط اولی $m = ۲$ و شیب خط دومی برابر $m' = -۳$ است پس $\tan\theta = \left|\frac{۲-(-۳)}{۱+۲\times(-۳)}\right| = \left|\frac{۵}{-۵}\right| = ۱$ و چون θزاویه ای حاده است پس $\theta = ۴۵$

◈دسته خطوط: به هر معادله خط راستی که در آن پارامتری وجود داشته باشد یک دسته خطوط می گویند

به عنوان مثال $۴x + my - ۲m + ۳ = ۰$ معادله دسته خطوط است با دادن مقدارهای مختلف به m معادله خط های مختلفی بدست می آید که ممکن است تمامی این خط ها از یک نقطه ثابتی بگذرند. برای پیدا کردن مختصات این نقطه کافی است دو مقدار مختلف به پارامتر داده شده بدهیم و نقطه تلاقی دو خط بدست آمده را با حل دستگاه تعیین کنیم.

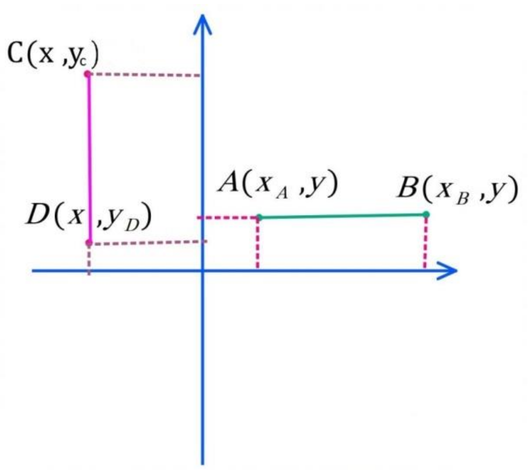
مثال: خطوط به معادلات $(m + ۳)x - (۲m - ۱)y + m - ۴ = ۰$ به ازای تمام مقادیر m از نقطه ثابتی می گذرد مختصات نقطه ثابت را بدست آورید.

راه حل : اگر $m = -۳$ قرار دهیم معادله خط بصورت $۷y - ۷ = ۰$ در می آید و $y = ۱$ و اگر $m = ۰$ باشد در اینصورت $۳x + y - ۴ = ۰ \xrightarrow{y=۱} ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱$ پس مختصات نقطه ثابت $(۱,۱)$ می باشد.

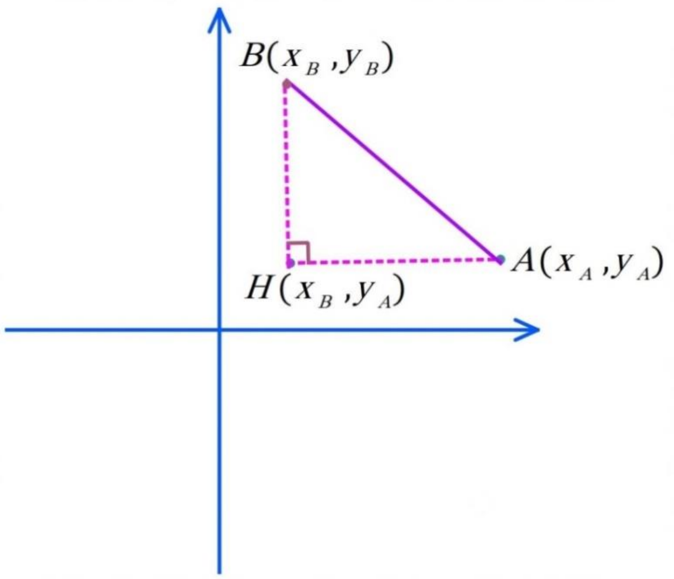
◈فاصله دو نقطه در صفحه:

اگر دو نقطه $A(x_A, y)$ و $B(x_B, y)$ دو نقطه هم عرض در صفحه باشند در اینصورت طول پاره خط AB برابر است با $|x_A - x_B|$

همچنین اگر $C(x, y_C)$ و $D(x, y_D)$ دو نقطه هم طول در صفحه باشند، در اینصورت طول پاره خط CD برابر است با $|y_C - y_D|$



محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل اول
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسهٔ تحلیلی و جبر
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس اول «هندسهٔ تحلیلی »
۱۴۰۰–۱۴۰۱	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	نام طراح: جواد عسگری
	گروه ریاضی	



در حالت کلی

اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند از A و B موازی محورهای مختصات رسم می کنیم تا همدیگر را در نقطه H قطع کنند با توجه به شکل داریم:$H(x_B, y_A)$

در مثلث قائم الزاویه ABH طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲$ و یا

$$AB^۲ = (x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲$$

آنگاه طول پاره خط ABبرابر است با

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$$

مثال: نقاط $A(۰, -۱)$ ، $B(۱, -۲)$ و $C(-۱, -۲)$ سه راس مثلث ABC باشند طول اضلاع مثلث را بدست آورید؟ این مثلث ،چه نوع مثلثی است؟

راه حل : $AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲} \Longrightarrow AB = \sqrt{(۰ - ۱)^۲ + \left(-۱ - (-۲)\right)^۲} = \sqrt{۱ + ۱} = \sqrt{۲}$

$BC = |۱ - (-۱)| = ۲$ و $AC = \sqrt{(۰ - (-۱))^۲ + \left(-۱ - (-۲)\right)^۲} = \sqrt{۱ + ۱} = \sqrt{۲}$

چون دو ضلع AB و AC برابرند و نیز $AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$ پس مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است .

تست:اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط به معادله های $y + x = ۴$ ، $y = ۲x + ۱$ و $۲y + x + ۳ = ۰$ هستند. نوع مثلث کدام است؟

۱)قائم الزاویه ۲) متساوی الساقین

۳) قائم الزاویه و متساوی الساقین ۴) متساوی الاضلاع

راه حل :شیب دو خط از سه خط داده شده برابر ۲ و $-\frac{۱}{۲}$ است پس برهم عمودند و مثلث قائم الزاویه است. از تقاطع دو به دو معادله خط ها مختصات سه راس مثلث را پیدا می کنیم

$$\begin{cases} y = -x + ۴ \\ y = ۲x + ۱ \end{cases} \Longrightarrow x = ۱, y = ۳ \Longrightarrow A(۱,۳)$$

$$\begin{cases} y + x = ۴ \\ ۲y + x + ۳ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow x = ۱۱, y = -۷ \Longrightarrow B(۱۱, -۷)$$

$$\begin{cases} y = ۲x + ۱ \\ ۲y + x + ۳ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow x = -۱, y = -۱ \Longrightarrow C(-۱, -۱)$$

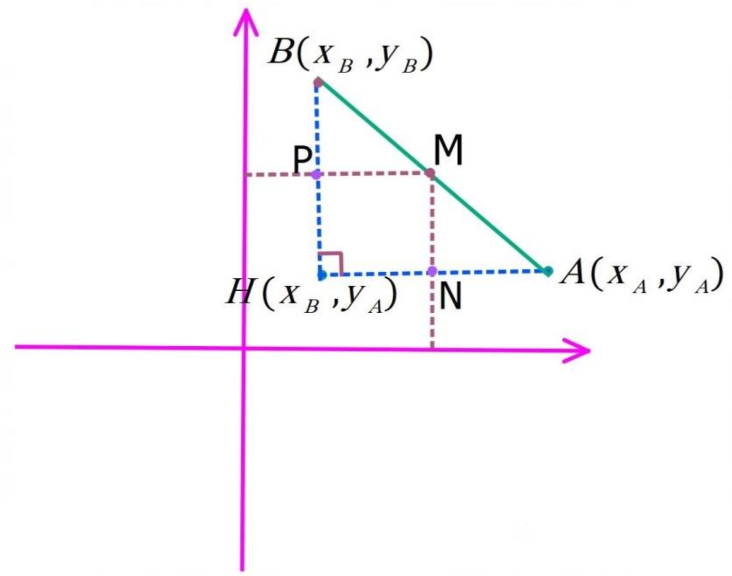
محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس اول «هندسهٔ تحلیلی » نام طراح: جواد عسگری

$AB = \sqrt{(۱۱-۱)^۲ + (-۷-۳)^۲} = \sqrt{۲۰۰}$ و $AC = \sqrt{(۱-(-۱))^۲ + \left(۳-(-۱)\right)^۲} = \sqrt{۲۰}$ و نیز

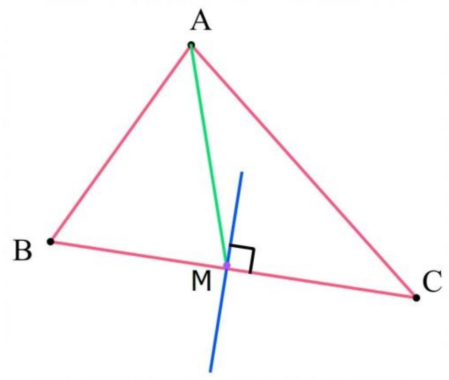
$BC = \sqrt{(۱۱-(-۱))^۲ + \left(-۷-(-۱)\right)^۲} = \sqrt{۱۸۰}$ پس اضلاع آن با هم برابر نیستند و مثلث فقط قائم الزاویه است.

مختصات نقطه وسط پاره خط:

اگر نقطه M وسط پاره خط AB در صفحه مختصات باشد آن گاه مختصات نقطه M برابر است با $M(\frac{x_A+x_B}{۲}, \frac{y_A+y_B}{۲})$ که در آن $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$



مثال: نقاط $A(۱,۲)$ ، $B(-۳,۰)$ و $C(-۱,-۴)$ سه راس مثلث ABC باشند طول میانه AM و معادله خط عمودمنصف ضلع BC را بدست آورید.



راه حل: M وسط ضلع BC است پس $\begin{cases} x_M = \frac{-۱+(-۳)}{۲} = -۲ \\ y_M = \frac{۰+(-۴)}{۲} = -۲ \end{cases}$

و طول میانه AM برابر $AM = \sqrt{(x_A - x_M)^۲ + (y_A - y_M)^۲} =$

$\sqrt{(۱-(-۲))^۲ + \left(۲-(-۲)\right)^۲} = ۵$

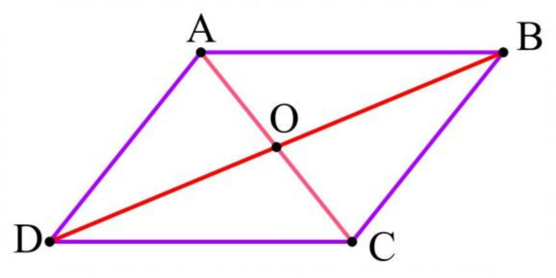
برای پیدا کردن معادله خط عمودمنصف ضلع BC ابتدا شیب خط BC را مشخص می کنیم $m_{BC} = \frac{۰-(-۴)}{-۳-(-۱)} = -۲$

قرینه و معکوس -۲ برابر است با $\frac{۱}{۲}$ پس$m = \frac{۱}{۲}$ $y = \frac{۱}{۲}x + h$ مختصات نقطه M را در معادله خط قرار می دهیم

$-۲ = \frac{۱}{۲} \times (-۲) + h \Longrightarrow h = -۱$ و معادله خط $y = \frac{۱}{۲}x - ۱$ می باشد.

محتوای نوشتاری **کتاب ریاضی(۲)** **سال تحصیلی** **۱۴۰۰–۱۴۰۱**	**به نام خدا** **اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی** **معاونت آموزش متوسطه** **اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی** **گروه ریاضی**	**فصل اول** **هندسهٔ تحلیلی و جبر** **درس اول «هندسهٔ تحلیلی »** **نام طراح: جواد عسگری**

◈رابطه بین مختصات راس های متوازی الاضلاع



اگر A ، B ، C و D چهار راس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشد و فرض کنیم قطرهای AC و BD همدیگر را در نقطه O قطع کنند چون در متوازی الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می کنند لذا

O وسط AC است پس $O(\frac{x_A+x_C}{۲},\frac{y_A+y_C}{۲})$ همچنین O وسط BD نیز است پس $O(\frac{x_B+x_D}{۲},\frac{y_B+y_D}{۲})$درنتیجه

$\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{x_B+x_D}{۲}$, و $\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{y_B+y_D}{۲}$ و یا $x_A+x_C=x_B+x_D$ و $y_A+y_C=y_B+y_D$

مثال: نقاط $A(۲,۱)$ ، $B(-۳,۲)$ و $C(۷,۳)$ سه راس متوازی الاضلاع $ABCD$ می باشد مختصات راس D را بدست آورید.

D روبروی راس B است پس $x_A+x_C=x_B+x_D \Rightarrow ۲+۷=-۳+x_D \Rightarrow x_D=۱۲$ و

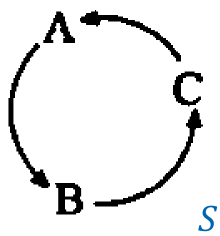
$$y_A+y_C=y_B+y_D \Rightarrow ۱+۳=۲+y_D \Rightarrow y_D=۲$$

پس $D(۱۲,۲)$ می باشد.

◈مختصات مرکز ثقل مثلث:

اگر $A(x_۱,y_۱)$ ، $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ سه راس مثلث ABC باشند محل همرسی سه میانه مثلث را که مرکز ثقل مثلث نیز می نامند و با G نشان می دهند که مختصات آن برابر است با $G(\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳},\frac{y_۱+y_۲+y_۳}{۳})$

◈محاسبه مساحت مثلث با داشتن مختصات سه راس مثلث:



اگر $A(x_۱,y_۱)$ ، $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ سه راس مثلث ABC باشند مساحت مثلث از رابطه زیر بدست می آید:

$$S=\frac{۱}{۲}|x_۱(y_۲-y_۳)+x_۲(y_۳-y_۱)+x_۳(y_۱-y_۲)|$$

مثال: مساحت مثلثی که مختصات سه راس آن برابر $A(۲,۳)$ ، $B(-۱,۰)$ و $C(۱,-۲)$ می باشد را به دست آورید.

راه حل:

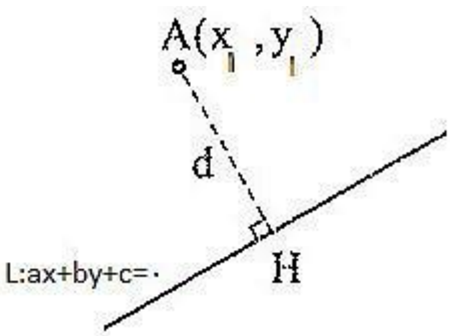
$$S=\frac{۱}{۲}|۲(۰-(-۲))-۱(-۲-۳)+۱(۳-۰)|=\frac{۱}{۲}|۴+۵+۳|=۶$$

محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل اول
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسهٔ تحلیلی و جبر
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس اول «هندسهٔ تحلیلی »
۱۴۰۰–۱۴۰۱	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	نام طراح: جواد عسگری
	گروه ریاضی	

◈قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر: اگر نقطه A را به نقطه M وصل کنیم و به همان اندازه امتداد دهیم تا به نقطه A' برسیم در اینصورت A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه M می باشد و M وسط پاره خط AA' می باشد پس $M=\frac{A+A'}{۲} \Longrightarrow A'=۲M-A$ و یا به عبارت دیگر $\begin{cases} x_{A'}=۲x_M-x_A \\ y_{A'}=۲y_M-y_A \end{cases}$

مثال: قرینه نقطه $A(۳,۴)$ را نسبت به نقطه $M(-۱,۲)$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} x_{A'}=۲x_M-x_A \\ y_{A'}=۲y_M-y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'}=۲\times(-۱)-۳=-۵ \\ y_{A'}=۲\times ۲-۴=۰ \end{cases}$$



◈فاصله نقطه از خط

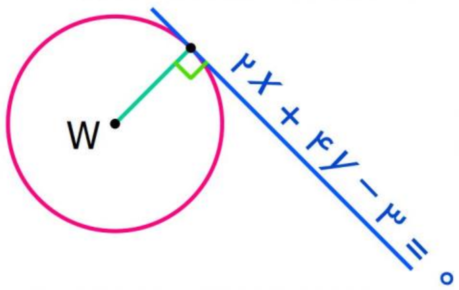
اگر $A(x_۱,y_۱)$ نقطه ای خارج خط $L: ax+by+c=۰$ باشد فاصلهٔ نقطه Aاز خط L برابر طول پاره خطی است که از A بر خط L عمود رسم می شود.

اگر این طول را با d نشان دهیم دراینصورت $\boxed{d=\frac{|ax_۱+by_۱+c_۱|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$

مثال: فاصله نقطه $A(۴,۷)$ از خط $۳x+۴y=۶$ را بدست آورید.

راه حل: ابتدا خط را بصورت $۳x+۴y-۶=۰$ می نویسیم. دراینصورت $a=۳, b=۴, c=-۶$ پس خواهیم داشت:

$$d=\frac{|ax_۱+by_۱+c_۱|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۳\times ۴+۴\times ۷-۶|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۳۴}{۵}$$



مثال: خط $L: ۲x+۴y-۳=۰$ بر دایره ای به مرکز $W(۱,۲)$ مماس است شعاع دایره را مشخص کنید.

می دانیم که خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است پس شعاع دایره همان فاصله مرکز دایره از خط داده شده می باشد لذا:

$$d=\frac{|ax_۱+by_۱+c_۱|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲\times ۱+۴\times ۲-۳|}{\sqrt{۲^۲+۴^۲}}=\frac{۷}{\sqrt{۲۰}}=\frac{۷}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۷\sqrt{۵}}{۱۰}$$

مثال:معادله خط های راستی را بنویسید که از نقطه $(-۲,۳)$ می گذرد و فاصله نقطه های $(۵,-۱)$ و $(۳,۷)$ از آنها برابر است.

راه حل:معادله خطی که از نقطه $(-۲,۳)$ می گذرد برابر است با:

$$y-۳=m(x-(-۲))\Longrightarrow mx-y+۲m+۳=۰$$

فاصله نقطه $(۵,-۱)$ از این خط برابر است با:

$$d=\frac{|m\times ۵+۱\times(-۱)+۲m+۳|}{\sqrt{m^۲+۱^۲}}=\frac{|۷m+۴|}{\sqrt{m^۲+۱}}$$

و فاصله نقطه $(۳,۷)$ از این خط برابر است با:

$$d=\frac{|m\times ۳+۱\times ۷+۲m+۳|}{\sqrt{m^۲+۱^۲}}=\frac{|۵m-۴|}{\sqrt{m^۲+۱}}$$

و چون این دو فاصله با هم برابرند پس : $|۷m+۴|=|۵m-۴|\Longrightarrow m=۰,m=-۴$ و خط های مورد نظر عبارتند از $y=-۴x-۵$ و $y=۳$

◈فاصله دو خط موازی

اگر دو خط L و L' به معادله های $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ با هم موازی باشند آن گاه فاصله این دو خط موازی برابر است با $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

تست: اگر دو ضلع مربعی بر خط های $۴y-۲x=۷$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۳$ واقع شوند مساحت مربع چقدر است؟

۱(۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴)۱/۷۵

راه حل: ابتدا هر دو خط را مثل هم هم می کنیم

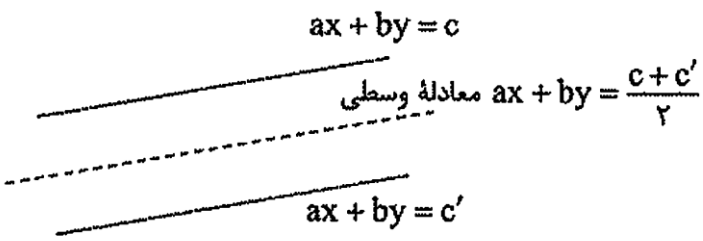
$$۴y-۲x=۷\Longrightarrow ۴y-۲x-۷=۰$$

$$y=\frac{۱}{۲}x+۳\overset{\times ۴}{\Longrightarrow} ۴y-۲x-۱۲=۰$$

چون شیب هر دو خط برابر $\frac{۱}{۲}$ است پس باهم موازیند فاصله دو خط موازی برابر طول ضلع مربع است $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۷-(-۱۲)|}{\sqrt{(-۲)^۲+۴^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۲۰}}$ و مساحت مربع برابر است با $S=(\frac{۵}{\sqrt{۲۰}})^۲=\frac{۲۵}{۲۰}=۱/۲۵$

فصل اول	به نام خدا	محتوای نوشتاری
هندسهٔ تحلیلی و جبر	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	کتاب ریاضی(۲)
درس اول «هندسهٔ تحلیلی»	معاونت آموزش متوسطه	سال تحصیلی
نام طراح: جواد عسگری	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	۱۴۰۰–۱۴۰۱
	گروه ریاضی	

◈معادله خط وسط دو خط موازی: اگر دو خط L و L' به معادله های $ax+by=c$ و $ax+by=c'$ با هم موازی باشند معادله خطی که با این دو خط موازی بوده و از هر کدام به یک فاصله باشد برابر است با: $ax+by=\frac{c+c'}{۲}$

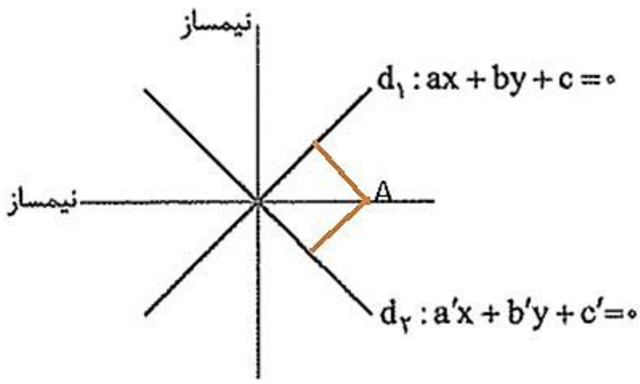


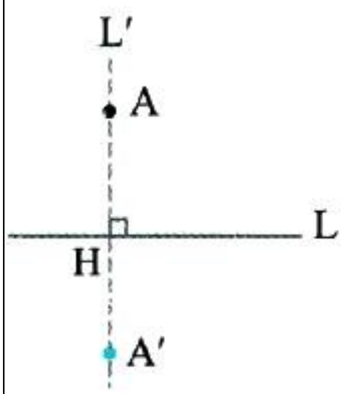
◈معادلات نیمسازهای دو خط متقاطع:

اگر دو $d_۱$ و $d_۲$ به معادله های $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ متقاطع باشند

و $A(x,y)$ نقطه ای دلخواه روی نیمسازباشد چون فاصله نقطه A از خط $d_۱$ برابر فاصله نقطه A از خط $d_۲$ است

پس $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^۲+b'^۲}}$ از حل این تساوی معادله دو خط عمود برهم را به ما می دهد که معادلات نیمسازهای دو خط متقاطع می باشد.





◈قرینه یک نقطه نسبت به یک خط: اگر نقطه A عمود AH را بر خط L رسم کنیم و این خط را به اندازه خودش امتداد دهیم تا به نقطه A' برسیم A' قرینه نقطه A نسبت به خط L می باشد.

برای پیدا کردن مختصات نقطه A' معادله خط AH را با داشتن مختصات یک نقطه و شیب خط عمود بر خط L را نوشته و با خط L قطع می دهیم تا مختصات نقطه H بدست آید A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه H می باشد پس $A'=۲H-A$

تست: قرینه نقطه $(۳,۸)$ نسبت به خط $x+۳y-۷=۰$ کدام نقطه است؟

۱) $(-۱,-۴)$ ۲) $(-۳,-۸)$ ۳) $(۱,-۴)$ ۴) $(۳,۸)$

راه حل: شیب خط داده شده برابر $m=\frac{-۱}{۳}$ است پس $m'=۳$ معادله خط گذرنده از نقطه $(۳,۸)$ و $m'=۳$ برابر است با:

$y-۸=۳(x-۳)\Rightarrow ۳x-y-۱=۰$ اگر این دو خط را قطع بدهیم

$\begin{cases}x+۳y-۷=۰\\ ۳x-y-۱=۰\end{cases}\Rightarrow x=۱, y=۲\Rightarrow H(۱,۲)$ درنتیجه $\begin{cases}x_{A'}=۲x_M-x_A\\ y_{A'}=۲y_M-y_A\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}x_{A'}=۲\times۱-۳=-۱\\ y_{A'}=۲\times۲-۸=-۴\end{matrix}$

فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس اول «هندسهٔ تحلیلی » نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱

نکته: اگر $A(x,y)$ نقطه ای در صفحه مختصات باشد در اینصورت

الف) قرینه نقطه A نسبت به محور x ها نقطه $A'(x,-y)$

ب) قرینه نقطه A نسبت به محور y ها نقطه $A'(-x,y)$

پ) قرینه نقطه A نسبت به مبدا مختصات نقطه $A'(-x,-y)$

ت) قرینه نقطه A نسبت به مبدا مختصات نقطه $A'(-x,-y)$

ث) قرینه نقطه A نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط $y=x$) نقطه $A'(y,x)$

ج) قرینه نقطه A نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم (خط $y=-x$) نقطه $A'(-y,-x)$ می باشد.

پاسخ فعالیت ها، کاردر کلاس ها و تمرینات کتاب:

• کار در کلاس ص ۲ کتاب درسی

۱– می دانیم از هر دو نقطهٔ متمایز، تنها یک خط عبور می کند؛ بنابراین:

الف) با داشتن مختصات دو نقطه از یک خط باید بتوان معادلهٔ آن را به دست آورد.

ب) با داشتن معادلهٔ یک خط می توان با مشخص کردن دو نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم نمود.

۲– نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه محورهای مختصات مقابل رسم کنید:

الف) $L_۱: y=۲x+۱$

x	-۱	۰
y	-۱	۱

ب) $L_۲: y=۲x-۳$

x	۰	۲
y	-۳	۱

پ) $L_۳: y=۱$

این خط خاص است محور عرض ها را در نقطه ی (۱و۰) قطع می کند و موازی محور xها است.

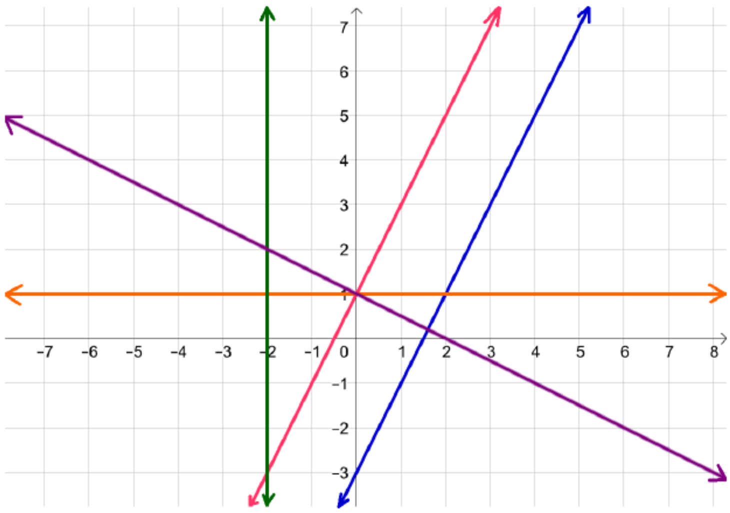
ت) $L_۴: x=-۲$

این خط خاص است محور طول ها را در نقطه ی (۰و۲-) قطع می کند و موازی محور y ها است.

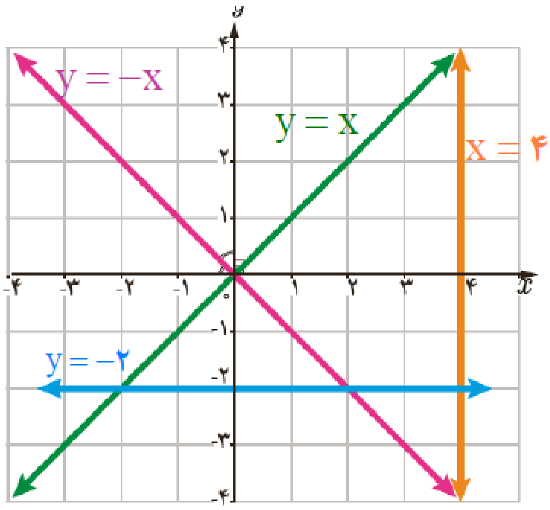
ث) $L_۵: x+۲y=۲$

x	۰	۲
y	۱	۰

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس اول «هندسهٔ تحلیلی » نام طراح: جواد عسگری



۳- معادلهٔ هر یک از خط های مقابل را روی شکل بنویسید.



۴- الف) توجه داریم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه جایی عمودی به جابه جایی افقی؛ به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطهٔ غیر هم طول A , B برابر است با $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای شیب های برابر باشند.

فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس اول «هندسهٔ تحلیلی » نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱

۵- الف) از پایهٔ نهم به خاطر داریم که هرگاه خط L محور yها را در نقطه ای با عرض h قطع کند، آن گاه h ، عرض از مبدأ خط L نامیده می شود.

ب) در سؤال ۲، شیب و عرض از مبدأ هر یک از پنج خط ذکر شده را بنویسید. در این سؤال کدام دو خط با هم موازی اند؟

الف) $L_۱: y = ۲x + ۱$

$m = ۲ , h = ۱$

ب) $L_۲: y = ۲x - ۳$

$m = ۲ , h = -۳$

پ) $L_۳: y = ۱$

$m = ۰ , h = ۱$

ت) $L_۴: x = -۲$

شیب این خط تعریف نشده است و عرض از مبدأ هم ندارد .

ث) $L_۵: x + ۲y = ۲$

$$۲y = -x + ۲ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x + ۱ \Rightarrow m = -\frac{۱}{۲} \quad , \quad h = ۱$$

خط های $L_۲, L_۱$ با هم موازی هستند.

۶- الف) خط با شیب m و عرض از مبدأ h معادله ای به صورت $y = mx + h$ دارد.

ب) می خواهیم معادلهٔ خط L، گذرا از دو نقطهٔ $B(۳ , ۱), A(۰ , ۷)$ را بنویسیم. برای این کار، ابتدا شیب خط را محاسبه می کنیم:

شیب خط : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۱ - ۷}{۳ - ۰} = -۲$

معادلهٔ خط $= y = -۲x + h$

$B(۳ , ۱): ۱ = -۲\,(۳) + h \Rightarrow h = ۷$ روی خط L واقع است

البته اگر به مختصات نقطهٔ $A(۰ , ۷)$ از خط L دقت کنیم، بدون محاسبه متوجه می شویم که عرض از مبدأ این خط $h = ۷$ است .

پس : $y = -۲x + ۷$ معادلهٔ خط L

پ) معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $P(۲ , -۱)$ را بنویسید؛ به طوری که با خط $y = ۳x - ۴$ موازی باشد.

خط گذرنده از نقطه $p(۲ , -۱)$ با خط $y = ۳x - ۴$ موازی است پس $m = ۳$ همچنین $p(۲ , -۱)$ روی خط است پس داریم:

$$-۱ = ۳ \times ۲ + h \Rightarrow h = -۷ \Rightarrow y = ۳x - ۷$$

• کار در کلاس صفحه ۴ کتاب درسی

۱- در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی،عمود یا متقاطعِ غیر عمود؟)

الف) $L: y = ۵x - ۲ \quad m = ۵ \qquad T: y = -\frac{۱}{۵}x + ۳ \quad m' = -\frac{۱}{۵} mm' = -۱$

ب) $\mathrm{L}: \mathrm{y} = \frac{۱}{۲}x + ۷ \quad m = \frac{۱}{۲}$

$T: x - ۲y = ۱ \qquad x - ۲y = ۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲} \Rightarrow m' = \frac{۱}{۲} \Rightarrow m = m'$

پ) $L: ۲x - ۳y + ۳ = ۰ \qquad m = -\frac{a}{b} \Rightarrow m = \frac{۲}{۳}$

$T: ۳x + ۲y = ۰ \;\; m' = -\frac{a}{b} \Rightarrow m' = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow mm' = -۱$

ت) $\mathrm{L}: x = ۱$ خط L عمودی است

$T: y = -۳$ خط T افقی است بنابراین دو برخط هم عمود هستند .

ث) $\mathrm{L}: \mathrm{y} = ۳x + ۱ \quad m = ۳$

$T: x = ۳y - ۱$ پس در قسمت (ث) دو خط فقط متقاطع هستند

$x = ۳y - ۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۱}{۳} \Rightarrow m' = \frac{۱}{۳} \Rightarrow m \neq m', mm' \neq -۱$

۲– خط L به معادلهٔ $۲y - ۳x = ۱$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادلهٔ $y = mx + ۵$ را در نظر بگیرید.

الف) m، را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

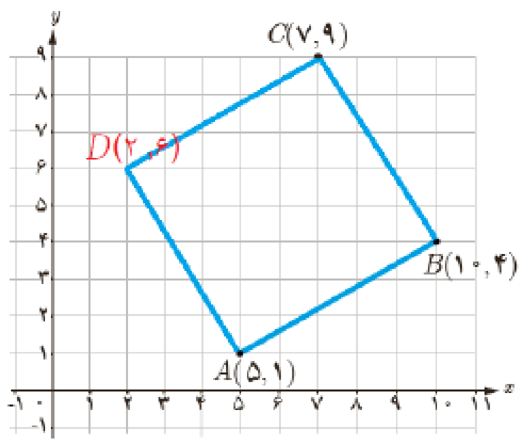
$۲y - ۳x = ۱ \Rightarrow -۳x + ۲y - ۱ = ۰ \Rightarrow m' = -\frac{a}{b} \Rightarrow m' = \frac{۳}{۲}$

$y = mx + ۵ \Rightarrow m = m' = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x + ۵$

ب) به ازای چه مقداری از m، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

$y = mx + ۵ \Rightarrow mm' = -۱ \Rightarrow m = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow y = -\frac{۲}{۳}x + ۵$

۳– مربع $ABCD$ در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است، به طوری که $A(۵\,,۱), B(۱۰\,,۴)$ دو رأس مجاور آن هستند.



الف) شیب ضلع AB را بنویسید.

$m_{AB} = \frac{۴-۱}{۱۰-۵} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow m_{AB} = \frac{۳}{۵}$

ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را بنویسید.

می دانیم که ضلع AB بر ضلع AD عمود است

پس: $m_{AD}=-\frac{۵}{۳}$

پ) اگر بدانیم نقطهٔ $C(۷,۹)$ رأس سوم مربع است،

مختصات رأس D را بیابید.

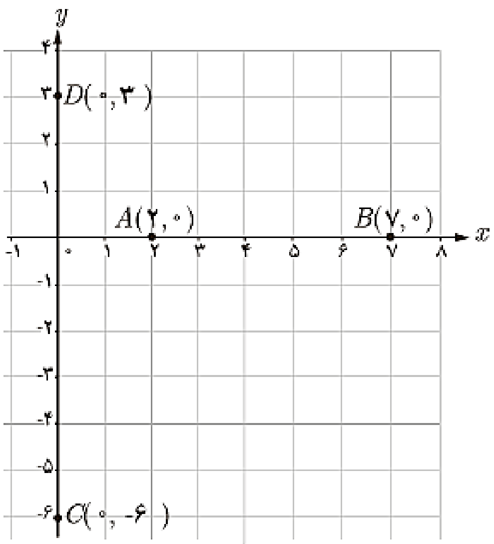
نقطهٔ D محل برخورد دوپاره خط $CD\ ,AD$ است اگر معادله ی خط ها گذرنده از این دو خط را به دست آوریم و نقطه ی برخورد آن ها را بیابیم مختصات D به دست می آید.

$$m_{CD}=\frac{۳}{۵}\ ,۹=\frac{۳}{۵}\times ۷+h\xrightarrow{\times ۵}۴۵=۲۱+۵h\Rightarrow h=\frac{۲۴}{۵}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=\frac{۳}{۵}x+\frac{۲۴}{۵}\xrightarrow{\times ۵}۳x-۵y=-۲۴$$
$$m_{AD}=-\frac{۵}{۳}\ ,۱=-\frac{۵}{۳}\times ۵+h\xrightarrow{\times ۳}۳=-۲۵+۳h\Rightarrow h=\frac{۲۸}{۳}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳}\xrightarrow{\times ۳}۵x+۳y=۲۸$$
$$\begin{cases}۵x+۳y=۲۸\\ ۳x-۵y=-۲۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲۵x+۱۵y=۱۴۰\\ ۹x-۱۵y=-۷۲\end{cases}\Rightarrow ۳۴x=۶۸\Rightarrow x=۲\Rightarrow ۵\times ۲+۳y=۲۸$$
$$\Rightarrow y=۶\Rightarrow D(۲,۶)$$

فاصلهٔ دو نقطه

•فعالیت ص ۴ کتاب درسی

شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف) فاصلهٔ دو نقطهٔ $A\ ,B$ که برابر طول پاره خط AB است،

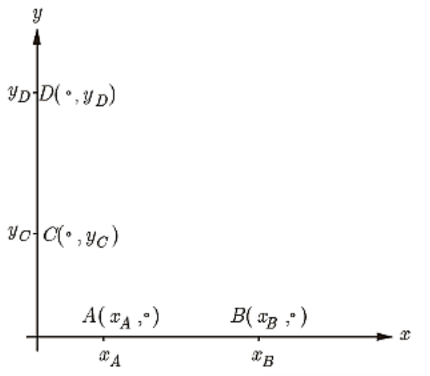
برابر ۵ است. چه رابطه ای بین این عدد با x_A, x_B وجود دارد؟

$$AB=|x_B-x_A|=|۷-۲|=|۵|=۵$$
$$BA=|x_A-x_B|=|۲-۷|=|-۵|=۵$$

ب) فاصلهٔ دو نقطهٔ $C\ ,D$ را برحسب عرض آنها بیان کنید.

$$DC=|y_D-y_C|=|۳-(-۶)|=|۹|=۹$$
$$CD=|y_C-y_D|=|-۶-۳|=|-۹|=۹$$

پ) در شکل مقابل، فاصلهٔ نقاط A , B را برحسب طول آنها و فاصلهٔ دو نقطهٔ C , D را برحسب عرض آنها به دست آورید.



$$AB = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$
$$CD = |y_D - y_C| = |y_C - y_D|$$

در حالت کلی می توان گفت:

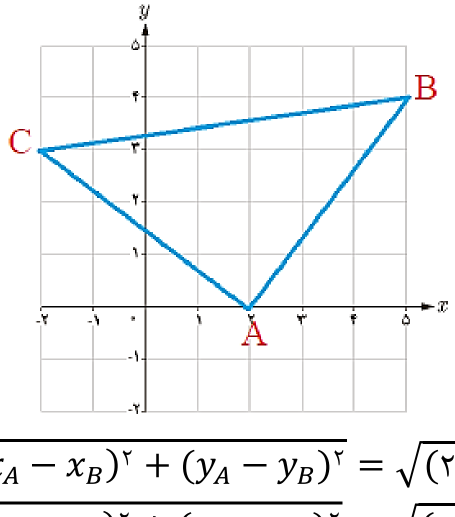
۱- اگر A , B دو نقطهٔ هم عرض در صفحه باشند، آن گاه $AB = |x_A - x_B|$

۲- اگر C , D دو نقطهٔ هم طول در صفحه باشند، آن گاه $CD = |y_C - y_D|$

چون طول پاره خط AB با طول پاره خط BA برابر است و همواره عددی مثبت است پس باید از قدر مطلق استفاده کنیم. (برای پاره خط CD هم همینطور)

• کار در کلاس صفحهٔ ۶ کتاب درسی

۱– نقاط $A(۲ , ۰)$, $B(۵ , ۴)$, $C(-۲ , ۳)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه مختصات مشخص کنید.



الف) محیط مثلث ABC را با محاسبهٔ طول اضلاع آن به دست آورید.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲} = \sqrt{(۲ - ۵)^۲ + (۰ - ۴)^۲} = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵$$
$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^۲ + (y_A - y_C)^۲} = \sqrt{(۲ + ۲)^۲ + (۰ - ۳)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$$
$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^۲ + (y_B - y_C)^۲} = \sqrt{(۵ + ۲)^۲ + (۴ - ۳)^۲} = \sqrt{۴۹ + ۱} = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$$

ب) ABC چه نوع مثلثی است؟

مثلث متساوی الساقین است.

پ) به دو روش نشان دهید ABC یک مثلث قائم الزاویه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

الف) طول اضلاع مثلث در قضیه فیثاغورش صدق می کند:

$$۵^۲ + ۵^۲ = ۲۵ \Rightarrow AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$

ب) دو خط گذرنده از پاره خط های AB و AC بر هم عمود هستند زیرا حاصل ضرب شیب این خط ها برابر با ۱- است:

$$m_{AB} = \frac{۴ - ۰}{۵ - ۲} = \frac{۴}{۳}\ , m_{AC} = \frac{۳ - ۰}{-۲ - ۲} = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow m_{AB} \times m_{AC} = \frac{۴}{۳} \times -\frac{۳}{۴} = -۱$$

$$S = \frac{۱}{۲} \times AC \times AB \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۵ = ۱۲/۵$$

۲- در یکی از جاده های کشور تصادفی رخ داده است که مختصات نقطهٔ تصادف بر روی نقشهٔ مرکز امداد به صورت $P(۵۰ \text{ و } ۳۰)$ است. نزدیک ترین پایگاه های امداد هوایی به محل تصادف در نقاط $A(۱۰ , -۲۰)$ و $B(۸۰ , ۹۰)$ واقع اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگردِ امداد به محل حادثه پیشنهاد می کنید؟ (اعداد برحسب کیلومتر هستند).

$$PA = \sqrt{(x_A - x_P)^۲ + (y_A - y_P)^۲} = \sqrt{(۵۰ - ۱۰)^۲ + (۳۰ - (-۲۰))^۲} = \sqrt{۱۶۰۰ + ۲۵۰۰} = \sqrt{۴۱۰۰} = ۱۰\sqrt{۴۱}$$

$$PB = \sqrt{(x_B - x_P)^۲ + (y_B - y_P)^۲} = \sqrt{(۵۰ - ۸۰)^۲ + (۳۰ - ۹۰)^۲} = \sqrt{۱۹۰۰ + ۳۶۰۰} = \sqrt{۴۵۰۰} = ۱۰\sqrt{۴۵}$$

$$\left.\begin{matrix} PA \\ PB \end{matrix}\right\} \Rightarrow PB > PA$$

پایگاه A را پیشنهاد می دهم زیرا به محل نزدیک تر حادثه است.

۳- الف) فاصلهٔ نقطهٔ $N(-۶,۸)$ تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

$$ON = \sqrt{(x_N - x_O)^۲ + (y_N - y_O)^۲} = \sqrt{(-۶ - ۰)^۲ + (۸ - ۰)^۲} = \sqrt{۳۶ + ۶۴} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $E(x_E, y_E)$ تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

$$OE = \sqrt{(x_E - x_O)^۲ + (y_E - y_O)^۲} = \sqrt{(x_E - ۰)^۲ + (y_E - ۰)^۲} = \sqrt{x_E^۲ + y_E^۲} = \mathrm{OE} = \sqrt{x_E^۲ + y_E^۲}$$

مختصات نقطهٔ وسط پاره خط

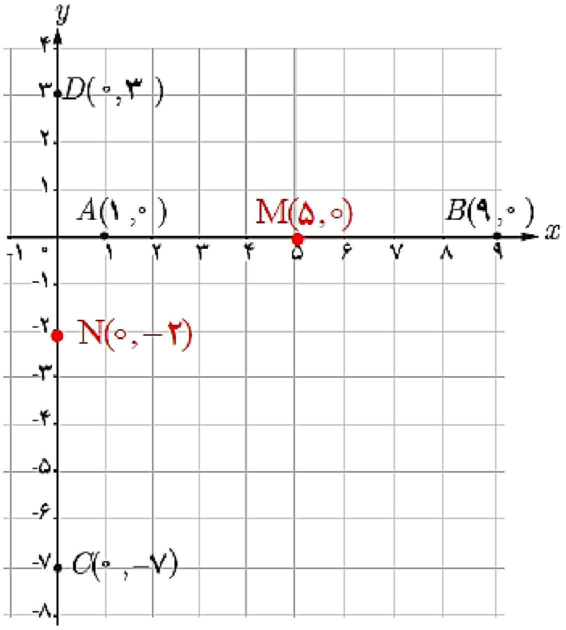
•فعالیت ص ۶ کتاب درسی

این شکل را در نظر بگیرید.

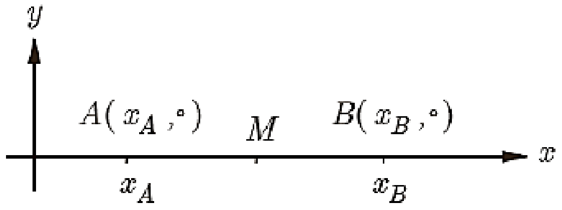
الف) نقطهٔ وسط پاره خط AB را M بنامید. M را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

ب) نقطهٔ وسط پاره خط CD را N بنامید و N را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل اول
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسهٔ تحلیلی و جبر
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس اول «هندسهٔ تحلیلی »
۱۴۰۱–۱۴۰۰	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	نام طراح: جواد عسگری
	گروه ریاضی	



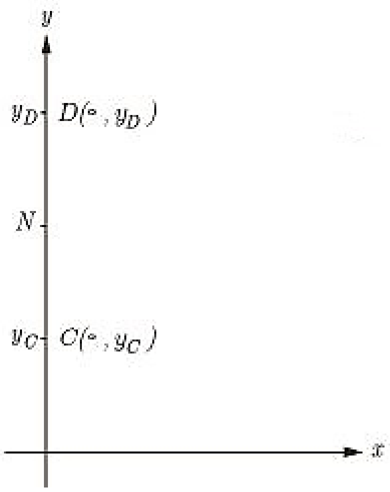
پ) مطابق شکل، B, A دو نقطهٔ دلخواه روی محور x ها هستند. اگر M وسط AB باشد، طول نقطهٔ M را به دست آورید.



M وسط AB $\Rightarrow AM = MB$

$$\Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M$$

$$\Rightarrow ۲x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$



ت) در شکل مقابل، C , D دو نقطهٔ دلخواه روی محور y ها هستند.

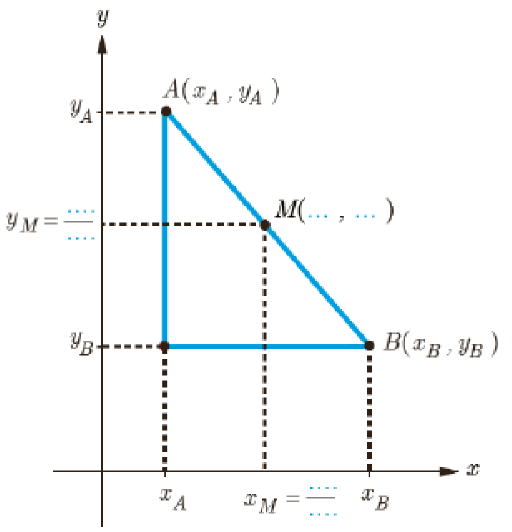
اگر N وسط CD باشد، عرض نقطهٔ N را بیابید.

N وسط CD $\Rightarrow CN = ND$

$$\Rightarrow y_N - y_C = y_D - y_N$$

$$\Rightarrow ۲y_N = y_C + y_D \Rightarrow y_N = \frac{y_C + y_D}{۲}$$

ث) اگر A , B دو نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مختصات باشند و M نقطهٔ وسط AB ، آنگاه با توجه به شکل مقابل می توان نشان داد:



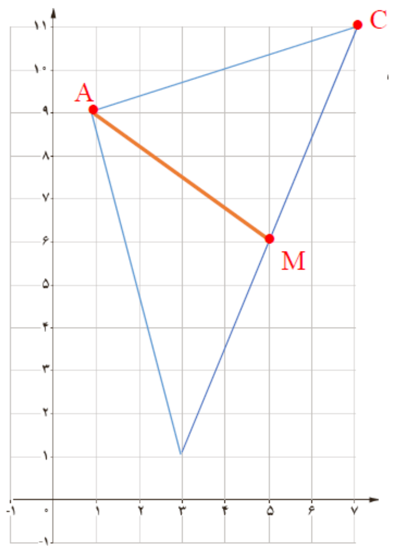
مختصات نقطهٔ وسط پاره خط AB عبارت است از

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{۲} , \frac{y_A + y_B}{۲}\right)$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} , y_M \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{۲} , \frac{y_A + y_B}{۲}\right)$$

● کار در کلاس صفحهٔ ۷ کتاب درسی

۱- مثلث با رئوس $A(۱ , ۹), B(۳ , ۱), C(۷,۱۱)$ را در نظر بگیرید و آنها را در دستگاه محورهای مختصات مقابل مشخص کنید.



الف) مختصات M، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

$$M = \left(\frac{۳ + ۷}{۲} , \frac{۱ + ۱۱}{۲}\right) = (۵,۶)$$

ب) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

در این قسمت یادآوری میانه مثلث ضروری به نظر می رسد.

فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس اول «هندسهٔ تحلیلی » نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱

(پاره‌خطی که وسط یک ضلع را به رأس مقابل آن ضلع وصل می‌کند.)

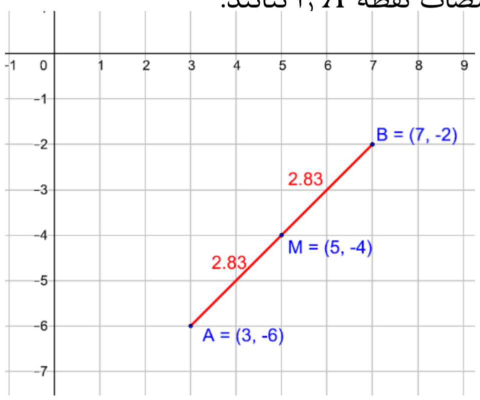
$$AM=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۶-۹)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

پ) معادلهٔ میانهٔ AM را به دست آورید.

$$m_{AM}=\frac{۹-۶}{۱-۵}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow y-۶=-\frac{۳}{۴}(x-۵)$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۳}{۴}x+\frac{۳۹}{۴}\qquad,\qquad ۳x+۴y=۳۹$$

۲- الف) نقطهٔ $N(۵\,,-۴)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطهٔ A, $B(۷\,,-۲)$ است. مختصات نقطهٔ A را بیابید.

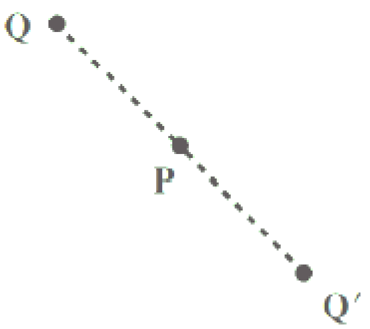


چون N وسط پاره خط AB است پس داریم:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\Rightarrow ۵=\frac{x_A+۷}{۲}\Rightarrow x_A=۳$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}\Rightarrow -۴=\frac{y_A+(-۲)}{۲}\Rightarrow y_A=-۶$$

ب) قرینهٔ نقطهٔ $A(۱\,,۲)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱\,,۴)$ را به دست آورید.



یادآوری قرینه ی نقطه ای نسبت به یک نقطه ی دیگر در صفحه:

در شکل مقابل نقطه ی Q' قرینه ی نقطه ی Q نسبت به نقطه ی P است

به شرطی که $PQ=PQ'$ در نتیجه می بینیم که نقطه ی P وسط دو

نقطه ی Q, Q' است.

قرینه ی نقطه ی A را A' می نامیم و با توجه به مطالب فوق داریم:

$AM+A'M$ پس M وسط AA' در نتیجه:

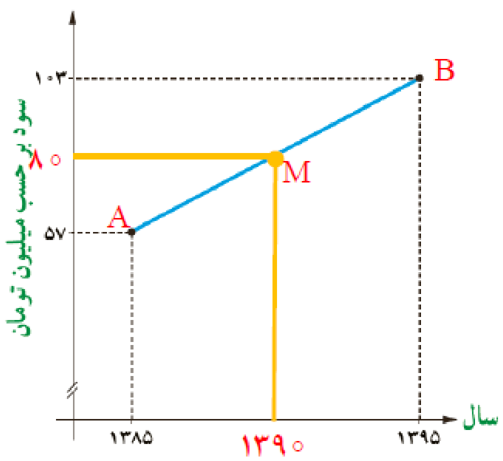
$$x_M=\frac{x_A+x_{A'}}{۲}\Rightarrow -۱=\frac{x_A+۱}{۲}\Rightarrow x_A=-۳$$

$$y_M=\frac{y_A+y_{A'}}{۲}\Rightarrow ۴=\frac{y_A+۲}{۲}\Rightarrow y_A=۶$$

پ) قرینهٔ نقطهٔ $P(\alpha\,,\beta)$ نسبت به مبدأ مختصات را به دست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} x_O = \dfrac{x_P + x_{P'}}{۲} \Rightarrow ۰ = \dfrac{\alpha + x_{P'}}{۲} \Rightarrow x_{P'} = -\alpha \\ y_O = \dfrac{y_P + y_{P'}}{۲} \Rightarrow ۰ = \dfrac{\beta + x_{P'}}{۲} \Rightarrow y_{P'} = -\beta \end{array}\right\} \Rightarrow P'(-\alpha\,,-\beta)$$

۳- سود سالانهٔ یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است. به کمک رابطهٔ نقطهٔ وسط پاره خط، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) میانگین سود سالانهٔ این شرکت در دههٔ مورد نظر چقدر بوده است؟

برای محاسبه ی میانگین سود سالانه باید مقدار عرض نقطه ی وسط پاره خط آبی رنگ را به دست آوریم:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow y_M = \frac{۵۷ + ۱۰۳}{۲} \Rightarrow y_M = ۸۰$$

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه، با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

برای اینکه بفهمیم در کدام سال مقدار سود سالانه بااین میانگین برابر بوده باید طول نقطه ی وسط پاره خط آبی را به دست آوریم:

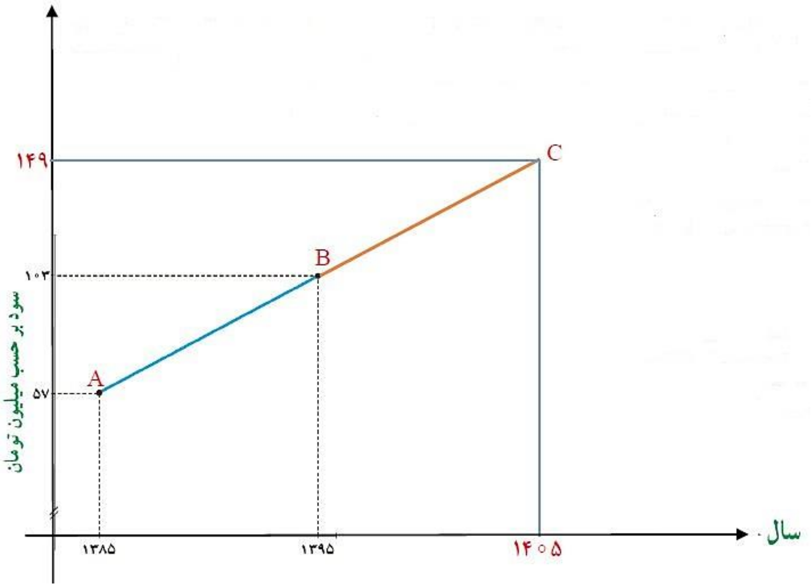
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow x_M = \frac{۱۳۸۵ + ۱۳۹۵}{۲} \Rightarrow x_M = ۱۳۹۰$$

پ) اگر سود سالانه در طول یک دههٔ آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟

با توجه به شکل واضح است که نقطه ی B وسط پاره خط AC است.

$$y_B = \frac{y_A + y_C}{۲} \Rightarrow ۱۰۳ = \frac{۵۷ + y_C}{۲}$$

$$\Rightarrow y_C = ۲۰۶ - ۵۷ = ۱۴۹$$



•کار در کلاس صفحه ۹ کتاب

۱- فاصلهٔ نقطهٔ $P(۷\,,-۴)$ را از هر یک از خطوط با معادله های زیر به دست آورید:

الف) $L: ۲x + y = ۵$

$$۲x + y - ۵ = ۰ \Rightarrow a = ۲\,, b = ۱\,, c = -۵\; d = \frac{|ax_{.} + by_{.} + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

$$d = \frac{|۲(۷) + ۱(-۴) - ۵|}{\sqrt{۴ + ۱}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵} \Rightarrow d = \sqrt{۵}$$

ب) $T: x = ۵$

$$x - ۵ = ۰ \Rightarrow a = ۱\,, b = ۰\,, c = -۵\;, d = \frac{|ax_{.} + by_{.} + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

$$d = \frac{|۱(۷) + ۰ \times (-۴) - ۵|}{\sqrt{۱ + ۰}} = \frac{۲}{\sqrt{۱}} = ۲ \Rightarrow d = ۲$$

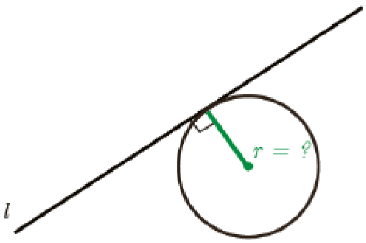
پ) $\Delta: y = ۰$

$$a = ۰\,, b = ۱\,, c = ۰\,,\; d = \frac{|ax_{.} + by_{.} + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

$$d = \frac{|۰ \times (۷) + ۱(-۴) + ۰|}{\sqrt{۰ + ۱}} = \frac{۴}{\sqrt{۱}} = ۴ \Rightarrow d = ۴$$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس اول «هندسهٔ تحلیلی » نام طراح: جواد عسگری

۲- خط $L: ۳x - ۴y = ۰$ بر دایره ای به مرکز $W(۲\,,-۱)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید. (راهنمایی: خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است.)



پس باید با توجه به راهنمایی که کرده فاصله ی مرکز را از خط l به دست آوریم.

$$r = \frac{|۳ \times ۲ + (-۴) \times (-۱) + ۰|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{۱۰}{۵} \Rightarrow r = ۲$$

•حل تمرینات صفحه ی ۹ کتاب درسی

۱- وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

$$L: ۲x - y = ۱ \quad m_L = -\frac{۲}{-۱} \Rightarrow m_L = ۲$$

$$T: y = ۲x - ۳ \quad m_T = ۲$$

نکته: $ax + by + c = ۰ \ \Rightarrow \ m = -\frac{a}{b}$

$$\Delta: x + ۲y = ۰ \quad m_\Delta = -\frac{۱}{۲}$$

با توجه به شیب های خط ها: خط L موازی خط T است و خط Δ بر دو خط L و T عمود است.

۲- دو نقطهٔ $A(۱۴\,,۳)$ و $B(۱۰\,,-۱۳)$ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به دست آورید.

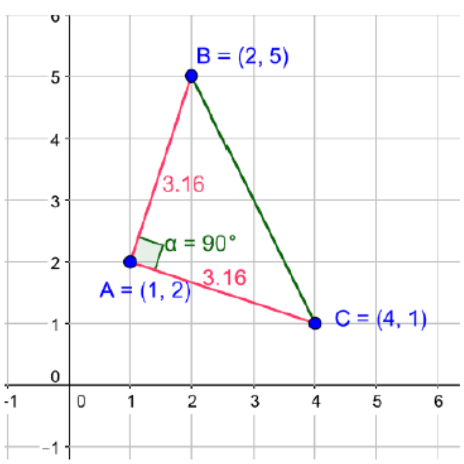
اگر نقطه ی M وسط پاره خط AB باشد. پس:

$$M\left(\frac{۱۴+۱۰}{۲}\,,\frac{۳-۱۳}{۲}\right) \Rightarrow M(۱۲\,,-۵)$$

فاصله ی مبدأ از نقطه ی M:

$$OM = \sqrt{۱۲^۲ + (-۵)^۲} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵} = ۱۳$$

۳- نشان دهید مثلث با رئوس $A(۱\,,۲), B(۲\,,۵), C(۴\,,۱)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.



محتوای نوشتاری **کتاب ریاضی(۲)** **سال تحصیلی** **۱۴۰۰–۱۴۰۱**	**به نام خدا** **اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی** **معاونت آموزش متوسطه** **اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی** **گروه ریاضی**	**فصل اول** **هندسهٔ تحلیلی و جبر** **درس اول «هندسهٔ تحلیلی »** **نام طراح: جواد عسگری**

$$\left.\begin{array}{l} AB=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰} \\ AC=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۱-۲)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰} \end{array}\right\} \Rightarrow AB=AC$$

راه اول:

$$m_{AB}=\frac{۵-۲}{۲-۱}=۳\,, m_{AC}=\frac{۱-۲}{۴-۱}=-\frac{۱}{۳}$$

$$m_{AB}\times m_{AC}=۳\times-\frac{۱}{۳}=-۱$$

راه دوم:

$$BC=\sqrt{(۴-۲)^۲+(۱-۵)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}$$

$$\left(\sqrt{۱۰}\right)^۲+\left(\sqrt{۱۰}\right)^۲=\left(\sqrt{۲۰}\right)^۲ \overset{۲}{\Rightarrow} AB^۲+AC^۲=BC^۲$$

۴- دو انتهای یکی از قطرهای دایره ای نقاط $B(۶\,,۴), A(۲\,,-۲)$ هستند .

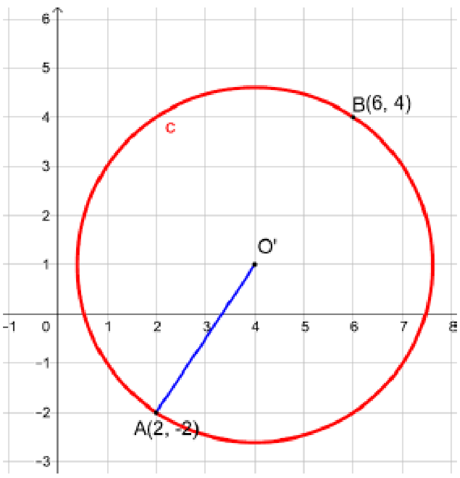
الف) اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

مختصات مرکز دایره نقطه وسط قطر یعنی وسط پاره خط AB است:

$$O'\left(\frac{۲+۶}{۲}\,,\frac{۴-۲}{۲}\right)\Rightarrow O'(۴\,,۱)$$

$$O'A=\sqrt{(x_A-x_{O'})^۲+(y_A-y_{O'})^۲}$$

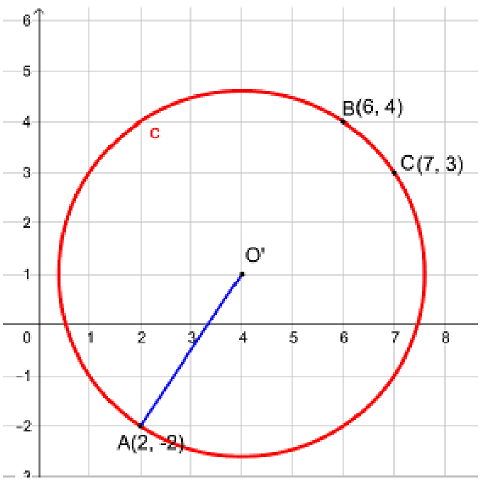
$$\Rightarrow\ O'A=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$



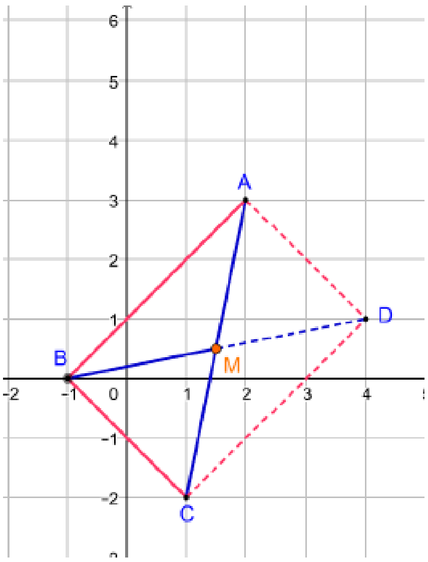
ب) آیا نقطهٔ $C(۷\,,۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

نقطه ی C روی دایره باشد باید $O'C$ نیز برابر با طول شعاع دایره باشد:

$$O'C=\sqrt{(۴-۷)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۱۳}$$



محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس اول «هندسهٔ تحلیلی » نام طراح: جواد عسگری



۵- نقاط $A(۲\,,۳)$, $B(-۱\,,۰)$, $C(۱\,,-۲)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یکدیگرند، آیا می توانید راه حل کوتاه تری برای مسئله ارائه کنید؟)

محل برخورد قطرها را M می نامیم و مختصات آن را با داشتن مختصات دو سر پاره خط AC به دست می آوریم. حالا می دانیم که نقطه ی M وسط قطر دیگر هم هست باز به کمک فرمول می توانیم مختصات رأس چهارم D را بیابیم.

$$MA = MC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{۲+۱}{۲}\,,\frac{۳+(-۲)}{۲}\right) \Rightarrow M\left(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$$

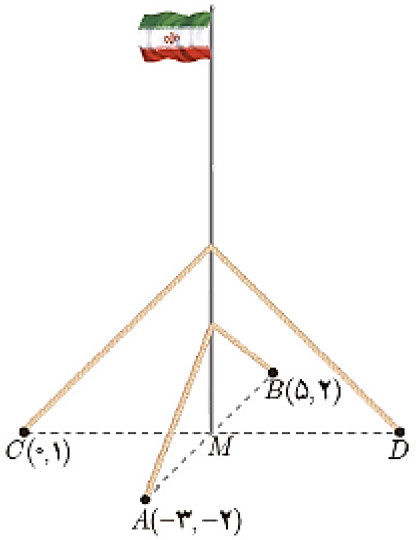
$$MB = MD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_D = ۲x_M - x_B \Rightarrow x_D = ۲\times\frac{۳}{۲} - (-۱) = ۴$$

$$\Rightarrow y_D = ۲y_M - y_B \Rightarrow y_D = ۲\times\frac{۱}{۲} - ۰ = ۱ \Rightarrow D(۴,۱)$$

راه کوتاه تر:

$$\overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_D - y_A = y_C - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D - ۲ = ۲ \Rightarrow x_D = ۴ \\ y_D - ۳ = -۲ \Rightarrow y_D = ۱ \end{cases} \Rightarrow D(۴\,,۱)$$

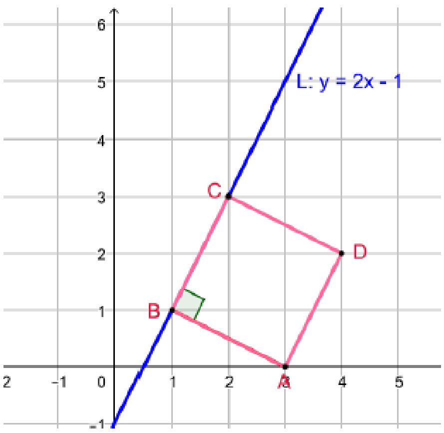


۶- یک میلهٔ پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری که فاصلهٔ هر نقطه تا میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا میله. مختصات نقطهٔ D را به دست آورید.

محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل اول
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسهٔ تحلیلی و جبر
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس اول «هندسهٔ تحلیلی »
۱۴۰۰–۱۴۰۱	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	نام طراح: جواد عسگری
	گروه ریاضی	

$$MA = MB \Rightarrow M(\frac{-۳+۵}{۲}, \frac{۲-۲}{۲}) \Rightarrow M(۱,۰)$$

$$\left.\begin{array}{l} MC = MD \Rightarrow x_D = ۲x_M - x_C \Rightarrow x_D = ۲ - ۰ = ۲ \\ MC = MD \Rightarrow y_D = ۲y_M - y_C \Rightarrow y_D = ۰ - ۱ = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow D(۲,-۱)$$



۷- یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = ۲x - ۱$ واقع است. اگر $A(۳,۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

نقطه ی A روی خط قرار ندارد بنابراین از A برخط L عمود می کنیم. فاصله ی این نقطه از خط طول ضلع مربع است.

$$A(۳,۰) = (x_۰, y_۰), ۲x - y - ۱ = ۰$$

$$AB = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} \Rightarrow$$

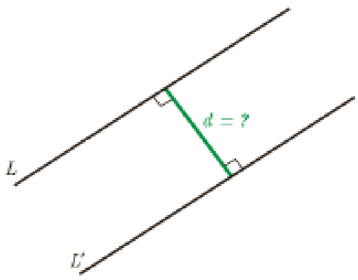
$$AB = \frac{|۲ \times ۳ + (-۱) \times ۰ + (-۱)|}{\sqrt{۴ + ۱}} \Rightarrow d = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

$$S = AB^۲ \Rightarrow S = ۵$$

۸- **الف)** نشان دهید دو خط با معادلات $۵x - ۱۲y + ۸ = ۰$, $-۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰$ با یکدیگر موازی اند.

ب) فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید.

(راهنمایی: یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن را از خط دیگر به دست آورید.)



$$\left.\begin{array}{l} ۵x - ۱۲y + ۸ = ۰ \Rightarrow -۱۲y = -۵x - ۸ \xrightarrow{\div ۱۲} y = \frac{۵}{۱۲}x + \frac{۸}{۱۲} \Rightarrow m = \frac{۵}{۱۲} \\ -۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰ \Rightarrow ۲۴y = ۱۰x - ۱۰ \xrightarrow{\div ۲۴} y = \frac{۱۰}{۲۴}x - \frac{۱۰}{۲۴} \Rightarrow m' = \frac{۵}{۱۲} \end{array}\right\}$$

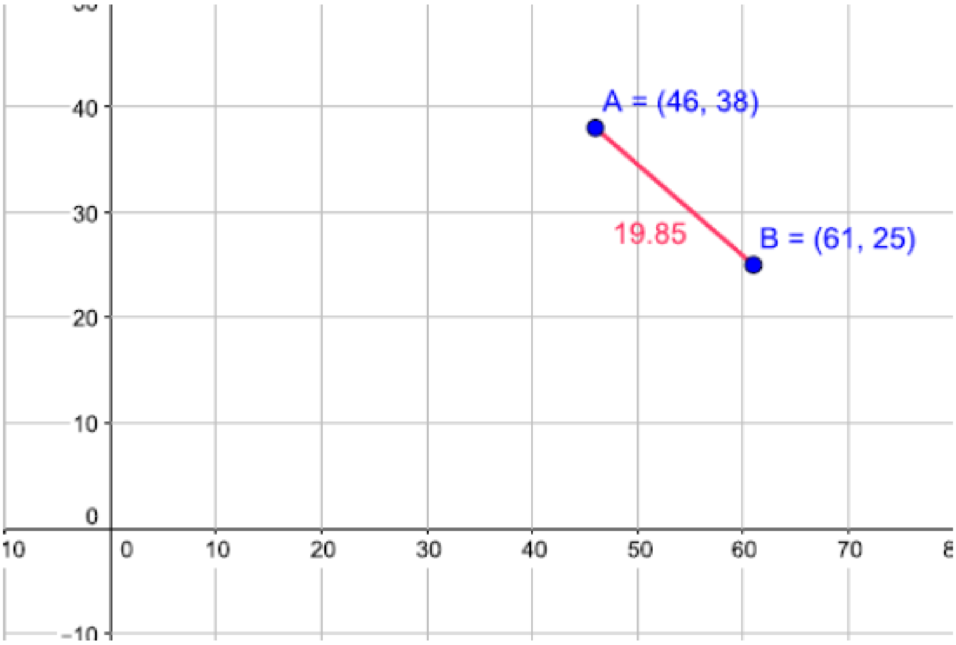
$$\Rightarrow m = m'$$

$$x = ۱ \Rightarrow -۱۰ \times ۱ + ۲۴y + ۱۰ = ۰ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow A(۱,۰)$$

$$d = \frac{|۵(۱) - ۱۲(۰) + ۸|}{\sqrt{۱ + ۰}} = ۱$$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس اول «هندسهٔ تحلیلی » نام طراح: جواد عسگری

۹- طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجهٔ شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجهٔ شمالی است. برای راحتی، می توانیم موقعیت این شهر را به طور خلاصه، به صورت (۳۸ و ۴۶) نشان دهیم. این اطلاعات دربارهٔ چابهار به صورت (۲۵ و ۶۱) است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانندمسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ تقریبی این دو شهر.



راه اول: ابتدا با توجه به طول و عرض جغرافیایی مانند مختصات فاصله دو شهر را به دست می آوریم:

$$AB=\sqrt{(۶۱-۴۶)^۲+(۲۵-۳۸)^۲}=\sqrt{۲۲۵+۱۶۹}=\sqrt{۳۹۴}\simeq ۱۹/۸۵$$

با فرض این که مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر است پس فاصلهٔ تقریبی شهر می شود: $۱۱۰\times ۱۹/۸۵ = ۲۱۸۳/۵$

راه دوم: از همان ابتدا مسافت فیزیکی را در مختصات اثر می دهیم:

$$AB=\sqrt{(۶۱\times۱۱۰-۴۶\times۱۱۰)^۲+(۲۵\times۱۱۰-۳۸\times۱۱۰)^۲}$$
$$=\sqrt{(۱۱۰)^۲\times۲۲۵+(۱۱۰)^۲\times۱۶۹}=۱۱۰\times\sqrt{۳۹۴}\simeq۱۱۰\times۱۹/۸۵=۲۱۸۳/۵$$

سوالات امتحانی پر تکرارو مهم (نهایی/ کنکور/داخلی):

۱- نقطه $A(۱,-۳)$ مختصات یک راس و خط $۳x+۴y-۳=۰$ معادله یکی از ضلع های مربع باشدمحیط و مساحت مربع را بدست آورید.

۲- **مثلث با راس های $A(۱,۱)$, $B(۱,۳)$, $C(۳,۱)$ را در نظر بگیرید. مطلوبست محاسبه :**

الف) مختصات نقطه M وسط ضلع BC

ب) طول میانه AM

۳- دو نقطه $A(-۳,۵)$ و $B(۱,۳)$ را در نظر بگیرید .فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB بدست آورید.

۴- نقاط $A(۲,-۱)$ و $B=(۳,۰)$ و $C=(۱,۴)$ سه راس یک مستطیل هستند مختصات راس چهارم را بیابید.

۵- فاصله نقطه $A(۱,۲)$ از خط $۵x+۱۲y=۱۰$ را بدست آورید

۶- نقطه ی $A\left(۷,۶\right)$ راس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است.

۷- در مثلث با رأس های $A(۶,۱)$ ، $B(۲,۳)$ و $C(۵,۹)$ مختصات نقطه H، پای ارتفاع AH را بدست آورید.

سوالات تستی و کنکور:

۱-شیب نیم خطی با نقطه شروع $A(۲,۴)$ برابر ۳ است. مستطیل $ABCD$ را چنان می سازیم که نقطه B روی نیم خط فوق و راس سوم آن $C(-۳,-۱)$ باشد، محیط مستطیل، کدام است؟(تجربی۱۴۰۰)

۱) ۲۴   ۲) ۱۸   ۳) $۶\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۱۰}$

۲-مثلثی با راس های $A(۱,۵)$، $B(۷,۳)$ و $C(۲,-۲)$ مفروض است، اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC کدام است؟(تجربی۹۹)

۱) ۴   ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) ۵   ۴) $۴\sqrt{۲}$

۳-اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط به معادلات $y+۲x=۱۶$ ، $۲y-x=۲$ و $y=۰$ هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث ، در صفحه مختصات کدام است؟(تجربی خارج ۹۹)

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) ۵   ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۶

۴- قرینه خط به معادله $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$ را خط d می نامیم. عرض از مبدا خط d کدام است؟(تجربی۹۷)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱   ۴) ۲

۵- مساحت ناحیه محدود به نمودار های دو تابع $y=x+|x|$ و $y=۲-|x|$ کدام است؟ (تجربی۹۵)

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس اول «هندسهٔ تحلیلی » نام طراح: جواد عسگری

۱) ۲   ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ۳

۶- به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + y = m - ۱ \\ ۳\,x + (m - ۲)y = ۴ - ۲\,m \end{cases}$ دارای بی شمار جواب است؟ (تجربی۹۴)

۱) ۲-   ۲) ۱-   ۳) ۳   ۴) هیچ مقدار m

۷- نقطه $A($۳ و ۱ $-)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $۲\,y - x = ۵$ است مساحت این مربع کدام است؟ (تجربی خارج۹۳)

۱) ۴۰   ۲) ۴۵   ۳) ۷۵   ۴) ۸۰

۸- مساحت مثلثی با سه راس به مختصات $A\left(\text{۲ و ۵}\right)$ و $B\left(\text{۳ و ۰}\right)$ و $C\left(\text{۰ و ۲}\right)$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) ۶   ۲) ۶/۵   ۳) ۷   ۴) ۷/۵

۹- دایره ای از دو نقطه ی $\left(\text{۰ و ۱}\right)$ و $\left(\text{۳ و ۰}\right)$ گذشته و معادله ی یک قطر آن به صورت $\mathrm{x} - \mathrm{y} = ۲$ است . شعاع این دایره کدام است؟ (تجربی خارج۹۰)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲   ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

۱۰- سه ضلع مثلثی به معادلات $AB:\ ۲\,y - x = ۳$ و $AC:\ y - ۲\,x = ۵$ و $BC: ۲\,y + ۳\,x = ۶$ هستند .معادله ی ارتفاع AH از مثلث مفروض کدام است؟ (تجربی خارج۸۹)

۱) $۶\,y - ۴\,x = ۱۵$ ۲) $۹\,y - ۶\,x = ۱۷$ ۳) $۳\,y - ۲\,x = ۷$ ۴) $۳\,y + ۲\,x = ۹$

۱۱- نقطه ی $A($۷ و ۶$)$ راس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادله های $۳\,y + ۴\,x =$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس اول «هندسهٔ تحلیلی » نام طراح: جواد عسگری

$۲y - ۳x = ۱۱$ و ۸ هستند مختصات وسط قطر آن کدام است ؟ (تجربی ۹۰)

۱) $(۵ و ۱)$ ۲) $(۴ و ۳)$ ۳) $(۵ و ۳)$ ۴) $(۳ و ۴)$

۱۲-دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x - ۲y = ۳$ و $y = x + ۱$ هستند. مساحت مربع کدام است؟(تجربی ۹۲)

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۸}$ ۳) $\frac{۲۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۱۳- فاصله دو خط به معادلات $y = \sqrt{۳}x + ۲$ و $\sqrt{۳}y - ۳x + ۶ = ۰$ کدام است؟ (تجربی خارج۸۸)

۱) $۲ - \sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳} - ۱$ ۳) $\sqrt{۳} + ۱$ ۴) $۲ + \sqrt{۳}$

۱۴- دو نقطه بر خط به معادله ی $y = x - ۱$ قرار دارند به طوری که فاصله این نقاط از خط به معادله $۲x - ۳y = ۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است.طول این دو نقطه، کدام است؟(تجربی۸۹)

۱) $-۱۵ ,۹$ ۲) $-۱۵, ۱۱$ ۳) $-۱۱, ۱۵$ ۴) $۱۱, -۹$

۱۵- راس های مثلثی نقاط $A(۴,۲)$ ، $B(۲,۳)$ و $C(-۱,۴)$ هستند .امتداد ارتفاع CH محور y ها را با چه عرضی قطع می کند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۶- هرگاه نقاط $A(۴,۲)$ و $C(۶,-۴)$ دو رأس مقابل لوزی $ABCD$ باشند معادله قطر BD محور طول ها را با چه طولی قطع می کند؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

❖پاسخ تشریحی سوالات امتحانی

۱- نقطه A روی خط $۳x + ۴y - ۳ = ۰$ قرار ندارد، پس فاصله نقطه A از خط طول ضلع مربع خواهد بود.

$$d=\frac{|۳\times ۱+۴(-۳)-۳|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{|۳-۱۲-۳|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۲}{۵}$$

$$\text{محیط}=\frac{۱۲}{۵}\times ۴=\frac{۴۸}{۵}$$

$$\text{مساحت}=(\frac{۱۲}{۵})^۲=\frac{۱۴۴}{۲۵}$$

۲- الف)

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{۱+۳}{۲}=۲ \\ y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{۳+۱}{۲}=۲ \end{cases}$$

ب) $AM=\sqrt{(x_A-x_M)^۲+(y_A-y_M)^۲}=\sqrt{(۱-۲)^۲+(۱-۲)^۲}=\sqrt{۲}$

۳- فرض کنید M وسط پاره خط AB باشد دراینصورت

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{-۳+۱}{۲}=۱ \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۵+۳}{۲}=۴ \end{cases}$$

و فاصله M از مبدا مختصات برابر است با:

$$OM=\sqrt{{x_M}^۲+{y_M}^۲}=\sqrt{۱^۲+۴^۲}=\sqrt{۱۷}$$

۴- $x_A+x_C=x_B+x_D$ و $y_A+y_C=y_B+y_D$

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۲+۱=۳+x_D \\ -۱+۴=۰+y_D \end{cases}\Rightarrow x_D=۰\,,y_D=۳$$

۵-

$$d=\frac{|۵\times ۱+۱۲\times ۲-۱۰|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}=\frac{|۵+۲۴-۱۰|}{\sqrt{۱۶۹}}=\frac{۱۹}{۱۳}$$

۶- نقطه A روی هیچ یک از دو خط داده شده قرار ندارد. پس نقطه تقاطع دو خط مورد نظر نقطه مقابل راس A در متوازی الاضلاع خواهد بود .

$$\begin{cases} ۲y-۳x=۱۱ \\ ۳y+۴x=۸ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۸y-۱۲x=۴۴ \\ ۹y+۱۲x=۲۴ \end{cases}\Rightarrow ۱۷y=۶۸\Rightarrow y=۴\,,x=-۱$$

پس $C(۴,-۱)$ و مختصات وسط قطر AC برابر است با: $O\left(\frac{۷-۱}{۲},\frac{۶+۴}{۲}\right)=O(۴,۵)$

۷- ابتدا معادله خط شامل ضلع BC را بدست می آوریم:

$$m_{BC}=\frac{۹-۳}{۵-۲}=۲$$

و معادله خط برابر است با:

$$y-۳=۲(x-۲)\Longrightarrow y=۲x-۱$$

با توجه به اینکه AH بر BC عمود است پس: $m_{AH}=-\frac{۱}{۲}$

$$y-۱=-\frac{۱}{۲}(x-۶)\Longrightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۴$$

از تقاطع این دو خط مختصات نقطه H بدست خواهد آمد.

$$\begin{cases} y=۲x-۱ \\ y=-\frac{۱}{۲}x+۴ \end{cases}\Longrightarrow ۲x-۱=-\frac{۱}{۲}x+۴$$

$$\Longrightarrow ۴x-۲=-x+۸\Longrightarrow ۵x=۱۰\Longrightarrow x=۲\Longrightarrow y=۳$$

پس $H(۲,۳)$

منابع استفاده شده:

۱- کتاب درسی ریاضی ۲ چاپ پنجم ۱۴۰۰.

۲- کتاب معلم ریاضی (۲)پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه چاپ اول ۱۳۹۶

۳-جبر، حساب و آنالیز نویسنده : احمد قندهاری انتشارات مدرسه چاپ : پنجم ۱۳۷۸

فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱

اهداف یادگیری:

-استفاده از روش تغییر متغیر برای حل معادلات دو مجذوری.

- یافتن مجموع و حاصلضرب ریشه های معادله درجه ۲ بدون حل معادله.

- تشکیل معادله درجه ۲ با S و P معلوم برای حل مسائل کاربردی مرتبط.

- محاسبه ماکزیمم یا مینیمم سهمی و استفاده از آن در حل مسائل بهینه سازی.

- تشخیص تعداد صفرهای تابع درجه ۲ و علامت آنها بدون محاسبه مقدار دقیق آنها.

- به دست آوردن ضابطه سهمی به کمک برخی اطلاعات از نمودار آن.

انتظارات پس از مطالعه:

– بتواند با تغییر متغیر مناسب برخی معادلات را به معادله درجه ۲ تبدیل کرده و آن را حل کند.

–بتواند رفتار تابع درجه ۲ را تجزیه و تحلیل کند.

-بتواند مسائل بهینه سازی مرتبط با تابع درجه ۲ را حل کند.

◈ حل معادله درجه ۲ به روش تغییر متغیر:

معادله دو مجذوری: هر معادله درجه چهاربه فرم $ax^۴ + bx^۲ + c = ۰$ را که در آن a ، b و c اعداد حقیقی و $a \neq ۰$ را یک معادله دو مجذوری می نامند.

برای حل چنین معادله هایی با تغییر متغیر $x^۲ = t$ معادله به صورت معادله درجه دو $at^۲ + bt + c = ۰$ در می آید که با حل این معادله مقدار t و درنتیجه مقدار $x^۲$ بدست می آیدکه این مقدار نباید منفی باشد با جذرگیری از طرفین حداکثر چهار مقدار برای x بدست می آید.

مثال: معادله $x^۴ - ۱۳x^۲ + ۳۶ = ۰$ را حل کنید.

راه حل: فرض می کنیم $x^۲ = t$ پس معادله بصورت $t^۲ - ۱۳t + ۳۶ = ۰$ در می آید.

$$t^۲ - ۱۳t + ۳۶ = ۰ \Longrightarrow (t - ۹)(t - ۴) = ۰$$
$$\Longrightarrow t = ۹\,, t = ۴ \Longrightarrow x^۲ = ۹, x^۲ = ۴ \Longrightarrow \mathrm{x} = \pm ۳, x = \pm ۲$$

مثال: معادله $۲x^۶ + ۵x^۳ - ۳ = ۰$ را حل کنید.

راه حل: فرض می کنیم $x^۳ = t$ پس معادله بصورت $۲t^۲ + ۵t - ۳ = ۰$ در می آید.

$$۲t^۲ + ۵t - ۳ = ۰ \Longrightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۵^۲ - ۴ \times ۲ \times (-۳) = ۲۵ + ۲۴ = ۴۹$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۵ \pm ۷}{۴} \Longrightarrow \begin{cases} t = -۳ \\ t = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

دراینصورت $x^۳ = -۳ \Longrightarrow x = \sqrt[۳]{-۳}$ و نیز $x^۳ = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow x = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$

مثال: معادله $\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۲}+\left(x+\frac{۱}{x}\right)-۶=۰$ چند ریشه حقیقی دارد؟

راه حل: با فرض $x+\frac{۱}{x}=u$ معادله بصورت $u^{۲}+u-۶=۰$ در می آید. پس داریم:

$$u^{۲}+u-۶=۰\Rightarrow(u-۲)(u+۳)=۰\Rightarrow u=۲\,,u=-۳$$

اگر $x+\frac{۱}{x}=۲$ باشد داریم:

$$x+\frac{۱}{x}=۲\Rightarrow\frac{x^{۲}+۱}{x}=۲\Rightarrow x^{۲}+۱=۲x\Rightarrow x^{۲}-۲x+۱=۰\Rightarrow(x-۱)^{۲}=۰$$

پس $x-۱=۰$ و یا $x=۱$

همچنین اگر $x+\frac{۱}{x}=-۳$ باشد داریم:

$$x+\frac{۱}{x}=-۳\Rightarrow\frac{x^{۲}+۱}{x}=-۳\Rightarrow x^{۲}+۱=-۳x\Rightarrow x^{۲}+۳x+۱=۰\Rightarrow\Delta=۹-۴=۵$$

پس $x=\frac{-۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$ و معادله سه ریشه حقیقی دارد.

تست: معادله $(x^{۲}-۳x+۳)^{۲}-(x-۱)(x-۲)=۷$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$(x^{۲}-۳x+۳)^{۲}-(x^{۲}-۳x+۲)=۷$$
$$\to(x^{۲}-۳x+۳)^{۲}-(x^{۲}-۳x+۳)-۶=۰$$

با فرض $x^{۲}-۳x+۳=t$ معادله بصورت $t^{۲}-t-۶=۰$ در می آید پس $(t-۳)(t+۲)=۰$ و $t=۳,t=-۲$

اگر $x^{۲}-۳x+۳=۳$ و یا $x^{۲}-۳x=۰$ و $x=۰,x=۳$

اگر $x^{۲}-۳x+۳=-۲$ در اینصورت $x^{۲}-۳x+۵=۰$ و چون $\Delta=-۱۱<۰$ پس معادله جواب ندارد

بنابراین معادله داده شده فقط ۲ جواب دارد.

◈ مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه ۲:

اگر α و β ریشه های معادله درجه دو $ax^{۲}+bx+c=۰$ باشند در اینصورت مجموع و حاصلضرب ریشه ها برابر است با

$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ و $\alpha.\beta=\frac{c}{a}$

اثبات: اگر $\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$ در اینصورت $\alpha+\beta=\frac{(-b+\sqrt{\Delta})+(-b+\sqrt{\Delta})}{۲a}=\frac{-۲b}{-a}=\frac{-b}{a}$ و

$$\alpha.\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)=\frac{b^{۲}-(b^{۲}-۴ac)}{۴a^{۲}}=\frac{۴ac}{۴a^{۲}}=\frac{c}{a}$$

مثال: اگر α و β ریشه های معادله درجه دو $۲x^{۲}+۹x-۱=۰$ باشند در اینصورت $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-۹}{۲}$ و $\alpha.\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۱}{۲}$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری

مثال: اگر α و β ریشه های معادله درجه دو $x^۲-۶x+۴=۰$ باشند حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\alpha^۲+\beta^۲$ ب) $\alpha^۳+\beta^۳$

پ) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ ت) $\alpha^۴+\beta^۴$

ث) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ ج) $\alpha^۲+۶\beta$ د) $\alpha^۳+۳۲\beta$

راه حل: داریم $\alpha+\beta=۶$ و $\alpha.\beta=۴$

الف) $\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=۳۶-۸=۲۸$

ب) $\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۲۱۶-۱۲\times۶=۱۴۴$

پ) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta^۲+\alpha^۲}{\alpha\beta}=\frac{۲۸}{۴}=۷$

ت) $\alpha^۴+\beta^۴=(\alpha^۲+\beta^۲)^۲-۲\alpha^۲\beta^۲=۲۸^۲-۲\times۱۶=۷۵۲$

ث) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲}=\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{۶+۲\times۲}=\sqrt{۱۰}$

ج) چون α ریشه معادله هست پس در معادله صدق می کند یعنی $\alpha^۲-۶\alpha+۴=۰$ و یا $\alpha^۲=۶\alpha-۴$ پس

$$\alpha^۲-۶\beta=۶\alpha-۴+۶\beta=۶(\alpha+\beta)-۴=۳۶-۴=۳۲$$

د) داریم $\alpha^۲=۶\alpha-۴$ پس

$$\alpha^۳=۶\alpha^۲-۴\alpha=۶(۶\alpha-۴)-۴\alpha=۳۶\alpha-۲۴-۴\alpha=۳۲\alpha-۴$$

درنتیجه

$$\alpha^۳+۳۲\beta=۳۲\alpha-۴+۳۲\beta=۳۲\times۶-۴=۱۸۸$$

تست: اگر α و β ریشه های معادله درجه دو $x^۲-۲x-۱=۰$ باشند مقدار $۵\alpha^۴+۱۲\beta^۳$ چقدر است؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۵۸ ۳) ۱۶۹ ۴) ۱۸۲

راه حل: داریم $\alpha+\beta=۲$ و $\alpha.\beta=-۱$

$$\alpha^۲=۲\alpha+۱\rightarrow\alpha^۴=(۲\alpha+۱)^۲=۴\alpha^۲+۴\alpha+۱=۴(۲\alpha+۱)+۴\alpha+۱=۱۲\alpha+۵$$

همچنین $\beta^۲=۲\beta+۱$ پس

$$\beta^۳=\beta(۲\beta+۱)=۲\beta^۲+\beta=۲(۲\beta+۱)+\beta=۵\beta+۲$$

$$۵\alpha^۴+۱۲\beta^۳=۵(۱۲\alpha+۵)+۱۲(۵\beta+۲)=۶۰(\alpha+\beta)۴۹=۶۰\times۲+۴۹=۱۶۹$$

مثال : در معادله درجه دوم $۲mx^۲-(۲m+۱)x+m-۳=۰$ ، مقدار m را طوری تعیین کنید که

الف) معادله دو ریشه قرینه داشته باشد.

ب) یکی از ریشه ها معکوس ریشه دیگر باشد.

راه حل: داریم: $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{۲m+۱}{۲m}$ و $\alpha.\beta=\frac{c}{a}=\frac{m-۳}{۲m}$

الف) $\alpha = -\beta$ و یا $\alpha + \beta = ۰$ پس

$$\frac{۲m + ۱}{۲m} = ۰ \Rightarrow ۲m + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲m = -۱ \Rightarrow m = \frac{-۱}{۲}$$

ب) $\alpha = \frac{۱}{\beta}$ و یا $\alpha.\beta = ۱$ پس $\frac{m-۳}{۲m} = ۱$

$$\frac{m - ۳}{۲m} = ۱ \Rightarrow ۲m = m - ۳ \Rightarrow m = -۳$$

نکته: اگر مجموع دو عدد حقیقی α و β برابر S و حاصل ضرب آنها برابر P باشد این دو عدد ریشه های معادله درجه دو $x^۲ - Sx + P = ۰$ می باشد.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش $۱ + \sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳} - ۱$ باشد.

راه حل: مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را پیدا می کنیم:

$$S = (۱ + \sqrt{۳}) + (۱ - \sqrt{۳}) = ۲$$

$$P = (۱ + \sqrt{۳}) \times (۱ - \sqrt{۳}) = ۱^۲ - (\sqrt{۳})^۲ = ۱ - ۳ = -۲$$

پس معادله بصورت $x^۲ - ۲x - ۲ = ۰$ می باشد.

مثال: اگر α و β ریشه های معادله درجه دو $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ باشند معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش $\alpha - ۳$ و $\beta - ۳$ باشد.

چون $\alpha + \beta = ۳$ و $\alpha.\beta = ۱$ مجموع و حاصل ضرب $\alpha - ۳$ و $\beta - ۳$ را بدست می آوریم

$S = (\alpha - ۳) + (\beta - ۳) = ۳ - ۶ = -۳$ و

$P = (\alpha - ۳).(\beta - ۳) = \alpha\beta - ۳\alpha - ۳\beta + ۹ = ۱ - ۳ \times ۳ + ۹ = ۱$ پس معادله درجه دوم بصورت

$x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$ می باشد.

◈رابطه بین ضرایب و ریشه های معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$:

فرض کنید $\Delta \geq ۰$ باشد

اگر $\frac{c}{a} < ۰$ در اینصورت معادله دو ریشه مختلف العلامت خواهد داشت . اگر $\frac{-b}{a} > ۰$ آنگاه قدرمطلق ریشه منفی از ریشه مثبت کوچکتر خواهد بود و اگر $\frac{-b}{a} < ۰$ آنگاه قدرمطلق ریشه منفی از ریشه مثبت بزرگتر خواهد بود

اگر $\frac{c}{a} > ۰$ در اینصورت معادله دو ریشه هم علامت خواهد داشت . اگر $\frac{-b}{a} > ۰$ آنگاه هر دو ریشه مثبت خواهند بود و اگر $\frac{-b}{a} < ۰$ آنگاه هر دو ریشه منفی خواهند بود

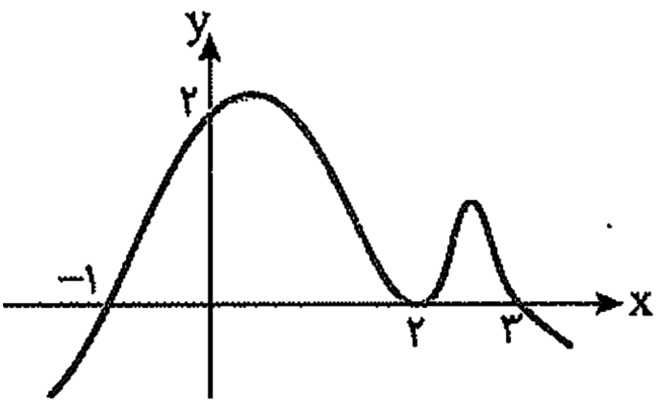
محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری

مثال: اگر معادله $-x^{۲} + (m-۲)x + m + ۱ = ۰$ دو ریشه منفی داشته باشد ، حدود m را تعیین کنید.

راه حل: در این معادله $\Delta = m^{۲} + ۸ > ۰$ پس همواره دو ریشه متمایز دارداگر معادله دو ریشه منفی داشته باشد مجموع آنها منفی و حاصل ضرب آنها مثبت است پس $\frac{-b}{a} < ۰ \to m-۲ < ۰ \to m < ۲$ و $\frac{c}{a} > ۰ \to -m-۱ > ۰ \to m < -۱$ با اشتراک این دو رابطه حدود m یعنی $m < -۱$ بدست می آید.

◈صفرهای یک تابع:

طول نقطه های برخورد نمودار تابع با محور x ها را صفرهای تابع می نامیم.به عبارت دیگر صفرهای تابع f همان ریشه های معادله $f(x) = ۰$ می باشند.



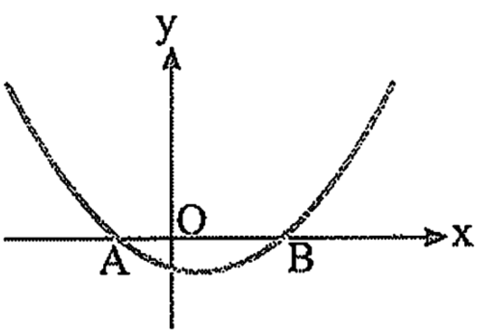
مثال: نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.
نقاط ۱- ، ۲ و ۳ صفرهای تابع f می باشند.

نتیجه: تابع درجه دوم $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ را در نظر بگیریداگر α و β صفرهای این تابع باشند در اینصورت
$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$

اثبات: $f(x) = ax^{۲} + bx + c = a(x^{۲} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$
$= a(x^{۲} - (\alpha+\beta) + \alpha\beta) = a(x-\alpha)(x-\beta)$

تست: در شکل مقابل نمودار سهمی $y = x^{۲} - ۴x + m - ۵$ رسم شده است.
اگرطول OB دوبرابر طول OA باشد مقدار m چقدر است؟

۱) ۴۲-   ۲) ۳۷-   ۳) ۲۷-   ۴) ۳۲-

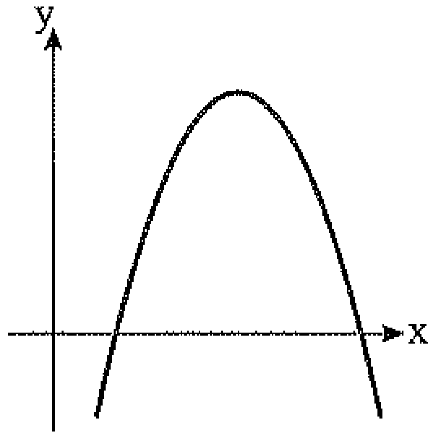


راه حل: اگر طول نقطه A را با α و طول نقطه B را با β نشان دهیم چون $OB = ۲OA$ پس $\beta = -۲\alpha$ از طرفی
$\alpha + \beta = ۴ \to \alpha - ۲\alpha = ۴ \to \alpha = -۴ \to \beta = ۸$
همچنین $\alpha.\beta = m - ۵ \to m - ۵ = -۳۲ \to m = -۲۷$

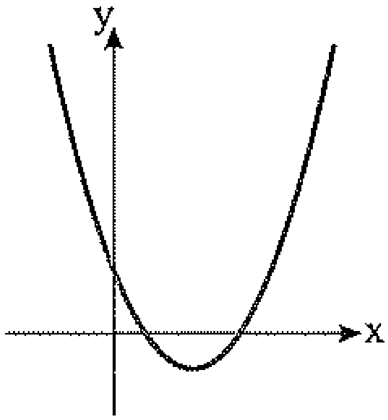
محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری

نکته: نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل یک سهمی است

و مختصات راس سهمی نقطه $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ می باشد.برحسب علامت a نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است



$a < 0$



$a > 0$

اگر $a > 0$ باشد کمترین مقدار تابع به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ بدست می می آید که برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ می باشد و

اگر $a < 0$ باشد بیشترین مقدار تابع به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ بدست می می آید و برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ می باشد.

و علامت b هم بستگی به علامت طول راس سهمی دارد.اگر $a > 0$ باشد علامت b مخالف علامت طول راس سهمی است و اگر $a < 0$ باشد علامت b موافق علامت طول راس سهمی است

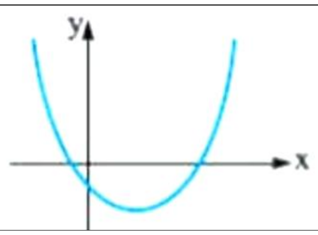
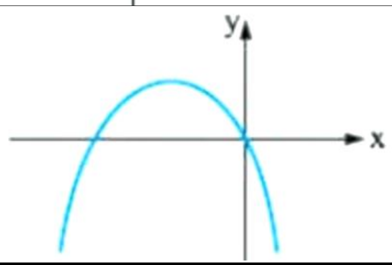
و علامت c هم ، هم علامت عرض نقطه برخورد سهمی با محور y ها است.

اگر نمودار تابع محور x ها را در دو نقطه قطع کند یعنی در معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ ، $\Delta > 0$ است و معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

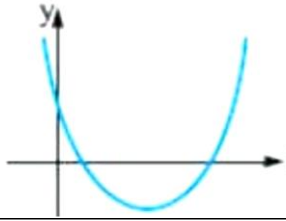
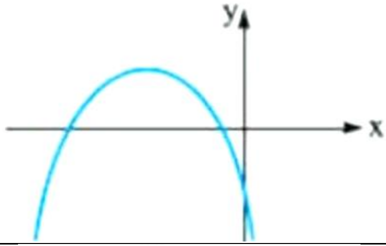
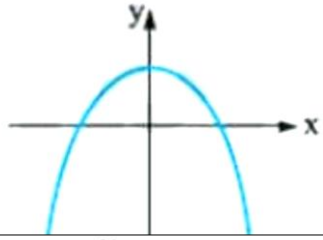
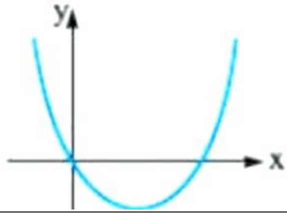
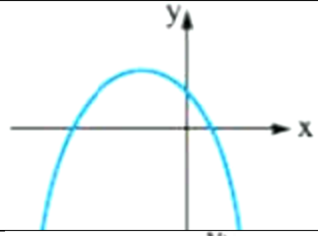
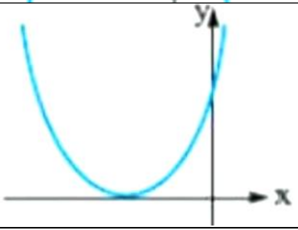
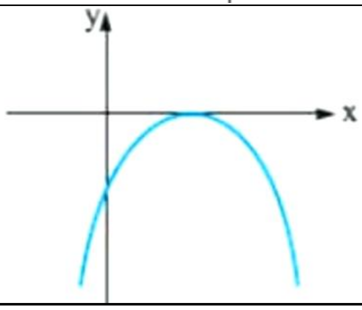
اگر نمودار تابع بر محور x ها مماس باشد یعنی در معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ ، $\Delta = 0$ است و معادله دارای ریشه مضاعف است

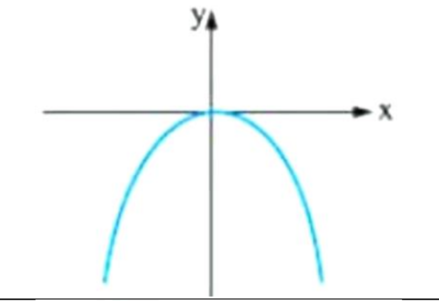
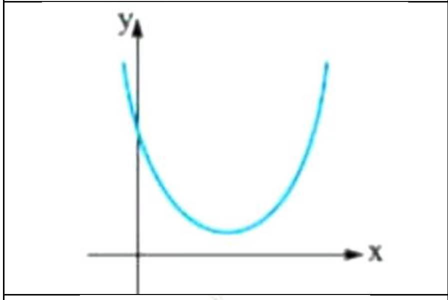
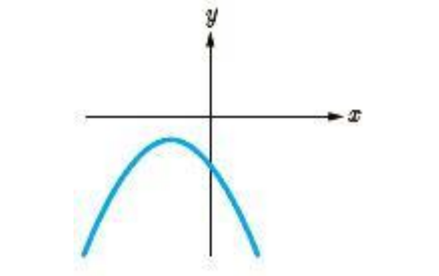
و اگر نمودار تابع محور x ها قطع نکند یعنی در معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ ، $\Delta < 0$ است و معادله ریشه حقیقی ندارد.

حالت های اصلی نمودار سهمی را در شکل های زیر می توان نشان داد.

تعداد و علامت ریشه ها	Δ	c	b	a	نمودار
یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی	+	−	−	+	
یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی	+	صفر	−	−	

محتوای نوشتاری **کتاب ریاضی(۲)** **سال تحصیلی** **۱۴۰۰–۱۴۰۱**	**به نام خدا** **اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی** **معاونت آموزش متوسطه** **اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی** **گروه ریاضی**	**فصل اول** **هندسهٔ تحلیلی و جبر** **درس دوم** **«معادله درجه دوم و تابع درجه۲»** **نام طراح: جواد عسگری**

دو ریشه مثبت	+	+	−	+	
دو ریشه منفی	+	−	−	−	
دو ریشه قرینه	+	+	صفر	−	
یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت	+	صفر	−	+	
یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی	+	+	−	−	
یک ریشه مضاعف منفی	صفر	+	+	+	
یک ریشه مضاعف مثبت	صفر	−	+	−	

یک ریشه مضاعف صفر	صفر	صفر	صفر	−	
ریشه ندارد	−	+	−	+	
ریشه ندارد	−	−	−	−	

مثال: اگر نمودار تابع $y=۲x^۲+ax+۱$ محور x ها را در دو نقطه قطع کند حدود a را بدست آورید.

راه حل: باید $\Delta>۰$ باشد پس

$$\Delta=a^۲-۴(۲)(۱)=a^۲-۴>۰ \Rightarrow a^۲>۴ \Rightarrow a>۲ \text{ یا } a<-۲$$

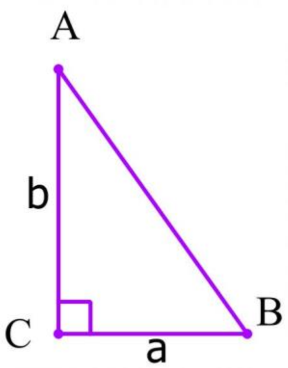
تست: در میان تمام مثلث های قائم الزاویه که مجموع دو ضلع قائمه آنها ۸ است.بیشترین مقدار مساحت ممکن چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

راه حل: اگر a و b اضلاع قائمهٔ مثلث قائم الزاویه ای باشند دراینصورت $a+b=۸$ و $S=\frac{۱}{۲}a.b$

پس خواهیم داشت: $S=\frac{۱}{۲}a.(۸-a)=-\frac{۱}{۲}a^۲+۴a$ چون S تابعی درجه دو می باشد پس به ازای $\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{۲\times\frac{-۱}{۲}}=۴$

دارای بیشترین مقدار است پس $S=\frac{۱}{۲}\times ۱۶+۴\times ۴=۸$



پاسخ فعالیت ها، کاردر کلاس ها و تمرینات کتاب:

روش تغییر متغیر برای حل معادله

در پایهٔ دهم، روش های مختلفی را برای حل معادلهٔ درجه ۲ آموختیم. یکی از دلایل اهمیّت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس سوم به آنها اختصاص یافته است.

در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل دستهٔ خاصّی از معادله ها آشنا می شویم که یک شیوهٔ کارآمد برای حل انواع معادله است.

مثال: معادلهٔ مقابل را حل کنید. $x^۴-۱۰x^۲+۹=۰$

حل: با وجود آنکه این معادله از نوع درجهٔ ۴ است، می توان آن را به روش معادله درجهٔ دوم حل کرد. برای این کار به جای عبارت $x^۲$ ، متغیر (مجهول) جدیدی مثل u قرار می دهیم. به این کار تغییر متغیر می گوییم.

$$x^۲=u\Rightarrow u^۲-۱۰u+۹=۰$$

این معادله را به روش کلی و همچنین به روش تجزیه حل می کنیم:

(روش تجزیه)

$$(u-۱)(u-۹)=۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}u=۱\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=-۱\end{cases}\\ u=۹\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\x=-۳\end{cases}\end{cases}$$

(روش کلی)

$$\Delta=b^۲-۴ac$$
$$=(-۱۰)^۲-۴(۱)(۹)=۶۴$$
$$u=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱۰\pm\sqrt{۶۴}}{۲(۱)}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}u=۱\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=-۱\end{cases}\\ u=۹\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\x=-۳\end{cases}\end{cases}$$

•کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی

معادله های مقابل را حل کنید.

الف) $۲x^۴-۷x^۲-۴=۰$

$$۲x^۴-۷x^۲-۴=۰\Rightarrow x^۲=u\Rightarrow ۲u^۲-۷u-۴=۰$$
$$\Rightarrow\Delta=(-۷)^۲-۴(۲)(-۴)=۸۱\Rightarrow u=\frac{-(-۷)\pm ۹}{۴}\Rightarrow u_۱=۴,u_۲=-\frac{۱}{۲}$$
$$x^۲=u\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm۲,x^۲\neq-\frac{۱}{۲}$$

ب) $x^۴+۳x^۲+۲=۰$

$$x^۴+۳x^۲+۲=۰\Rightarrow x^۲=u\Rightarrow u^۲+۳u+۲=۰$$

$\Rightarrow (u+۱)(u+۲)=۰ \Rightarrow u_۱=-۱$ و $u_۲=-۲$

$x^۲=-۱$ و $x^۲=-۲$ معادله ریشه ندارد

مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادلهٔ درجه ۲

•فعالیت صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی

می دانیم که معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلی به صورت مقابل است: $(۱) ax^۲+bx+c=۰ \; (a\neq ۰)$

۱– می خواهیم بررسی کنیم که چگونه می توان بدون حل این معادله دربارهٔ وجود و تعداد جواب های حقیقی آن اظهار نظر کرد.

الف) در این معادله اگر ضرایب c , a هم علامت نباشند، دربارهٔ علامت Δ چه می توان گفت؟

چون a و c مختلف العلامه هستند بنابراین حاصل ضرب آن ها منفی است در نتیجه در فرمول دلتا مقدار $۴ac$ منفی است یعنی $-۴ac$ مثبت است و $b^۲$ هم که همواره مثبت است پس مجموع دو عبارت مثبت، مثبت می شود، در نتیجه Δ مثبت است.

$ac<۰ \Rightarrow ۴ac<۰ \Rightarrow -۴ac>۰ \Rightarrow b^۲-۴ac>b^۲>۰ \Rightarrow \Delta>۰$

ب) اگر a و c هم علامت نباشند، آنگاه معادلهٔ (۱) دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۲– معادلهٔ مقابل را در نظر می گیریم:

$$۳x^۲+۵x-۱=۰$$

الف) توضیح دهید که چرا این معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

$a=۳$ و $c=-۱$ پس با توجه به بند ۱ قسمت (ب) فعالیت Δ بزرگ تر از صفر است پس معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

ب) آیا بین ضرایب معادله و مجموع ریشه ها (S) رابطه ای وجود دارد؟ برای پاسخ به این سؤال، معادله را حل می کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=۳۷$$

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-۵+\sqrt{۳۷}}{۶} \\ \beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-۵-\sqrt{۳۷}}{۶} \end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-۵+\sqrt{۳۷}}{۶}+\frac{-۵-\sqrt{۳۷}}{۶}=-\frac{۵}{۳}$$

ملاحظه می شود که : $S=-\frac{b}{a}$.

پ) درستی نتیجه فوق را در معادلهٔ زیر هم بررسی می کنیم:

$$۳x^۲-۷x=۰ \Rightarrow x(۳x-۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha=۰ \\ \beta=\dfrac{۷}{۳} \end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=۰+\frac{۷}{۳}=\frac{۷}{۳}=-\frac{b}{a}$$

ت) درستی نتیجهٔ بالا را در حالت کلی ثابت می کنیم. فرض کنیم برای معادلهٔ (۱)، مقدار Δ مثبت باشد. پس معاده دو ریشهٔ حقیقی متمایز مثل β , α دارد:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\\ \beta = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\end{array}\right\} \Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = -\frac{b}{a}$$

ث) با مفروضات قسمت قبل، ثابت کنید: $P = \alpha.\beta = \frac{c}{a}$

$$P = \alpha.\beta = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\right) = \frac{b^۲ - (b^۲ - ۴ac)}{۴a} = \frac{۴ac}{۴a} = \frac{c}{a}$$

با توجه به این فعالیت می توان گفت:

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰ \ (a \neq ۰)$ باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} \quad , \quad \alpha.\beta = P = \frac{c}{a}$$

•کار در کلاس صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی (۱)

در معادلهٔ $-۲x^۲ + x + ۵ = ۰$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را به دست آورید.

$$a = -۲ \,, b = ۱ \,, c = ۵$$
$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow s = -\frac{۱}{-۲} \Rightarrow s = \frac{۱}{۲}$$
$$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow p = \frac{۵}{۲}$$

تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از $P \,, S$

گاهی برای حل یک مسئله، لازم است برای آن معادله ای بنویسیم و سپس آن معادله را حل کنیم. در برخی موارد، این معادله درجه ۲ خواهد بود. مثلاً می خواهیم با مجموع و حاصل ضرب دو عدد، معادلهٔ درجه دومی بسازیم که آن دو عدد ریشه های معادله باشند.

برای این کار فرض می کنیم آن دو عدد (ریشه های معادله)، α, β باشند. معادلهٔ مورد نظر را می توان به شکل زیر نوشت:

$$(x-\alpha)(x-\beta) = ۰ \;\Rightarrow\; x^۲ - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = ۰ \;\Rightarrow\; x^۲ - Sx + P = ۰$$

بنابراین نشان دادیم که:

معادلهٔ درجهٔ دومی که مجموع ریشه های آن S و حاصل ضرب ریشه های آن P باشد، به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ است.

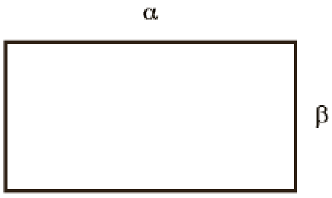
•کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی (۲)

۱– دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها ۱/۵- و حاصل ضربشان ۷- باشد.

$$P = -۱/۵ \,, P = -۷$$
$$\Rightarrow x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۱/۵x - ۷ = ۰$$
$$\Delta = ۲/۲۵ + ۲۸ = ۳۰/۲۵ \Rightarrow x = \frac{-۱/۵ \pm ۵/۵}{۲} \Rightarrow x_۱ = ۲ \,, x_۲ = -۳/۵$$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری

۲– آیا مستطیلی با محیط $۱۱\ cm$ و مساحت $۶\ cm^۲$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید.



حل: اگر ابعاد مستطیل را α و β بنامیم، داریم:

$$\text{محیط} = ۱۱ \Rightarrow ۲(\alpha+\beta) = ۱۱ \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{۱۱}{۲} \Rightarrow \beta = \frac{۱۱}{۲} - \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha\left(\frac{۱۱}{۲}-\alpha\right) = ۶$$

الف) راه حل بالا را کامل کنید و α و β را بیابید.

$$\alpha\left(\frac{۱۱}{۲}-\alpha\right) = ۶ \Rightarrow \alpha^۲ + \frac{۱۱}{۲}\alpha - ۶ = ۰ \Rightarrow \Delta = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow \alpha = \frac{-\frac{۱۱}{۲} \pm \frac{۵}{۲}}{-۲} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۴ \Rightarrow \beta = \frac{۳}{۲} \\ \alpha = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \beta = ۴ \end{cases}$$

البته با توجه به شکل: $\alpha = ۴ \Rightarrow \beta = \frac{۳}{۲}$

ب) با استفاده از S ,P این مسئله را حل کنید.

$$S = ۵/۵, P = ۶ \Rightarrow x^۲ - ۵/۵x + ۶ = ۰$$

$$\Delta = ۳۰/۲۵ - ۲۴ = ۶/۲۵ \Rightarrow x = \frac{۵/۵ \pm ۲/۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۴ \\ \beta = ۱/۵ \end{cases}$$

البته با توجه به شکل: $\alpha = ۴ \Rightarrow \beta = \frac{۳}{۲}$

۳– معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه های آن $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ باشند.

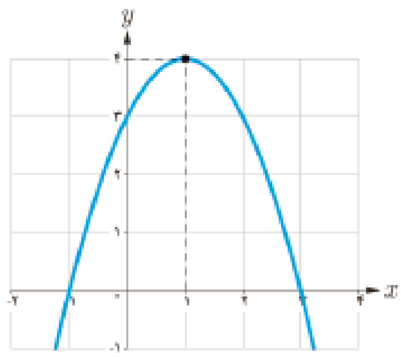
$$s = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} + \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲} = ۳\ ,P = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} \times \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲} = \frac{۹-۵}{۴} = ۱$$

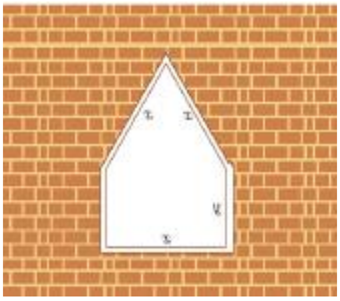
$$\Rightarrow x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$$

- **ماکزیمم و مینیمم سهمی**

مثال: ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطهٔ $f(x) = -x^۲ + ۲x + ۳$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: چون $a = -۱$ منفی است، پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است و این سهمی ماکزیمم دارد. این تابع به ازای $x = -\frac{b}{۲a} = ۱$ بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که برابر است با $f(۱) = ۴$.





مثال: یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره $۴m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

حل:

با توجه به شکل داریم:

$$\text{محیط پنجره} = ۴ \Rightarrow ۳x + ۲y = ۴ \Rightarrow y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$$

از آنجا که مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲}$ است (چرا؟)، می توان نوشت:

$$\text{مساحت پنجره} : \; S = x.y + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲}$$

به جای y معادل آن را برحسب x قرار می دهیم.

$$S = x\left(۲ - \frac{۳}{۲}x\right) + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲} = ۲x - \frac{۳}{۲}x^{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲}$$

$$S = \frac{\sqrt{۳} - ۶}{۴}x^{۲} + ۲x$$

این تابع دارای ماکزیمم است (چرا؟) و بیشترین مقدار آن به ازای $x = -\frac{b}{۲a}$ حاصل می شود.

$a = \frac{\sqrt{۳}-۶}{۴} < ۰$ پس این تابع ماکزیمم دارد.

$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{۲}{\frac{۶ - \sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۴}{۶ - \sqrt{۳}} \simeq ۰/۹۴(m)$$

$$y = ۲ - \frac{۳}{۲}x \simeq ۲ - \frac{۳}{۲}(۰/۹۴) = ۰/۵۹(m)$$

●کار در کلاس صفحه ۱۵ کتاب درسی

۱- تعیین کنید کدام یک از سهمی های زیر ماکزیمم دارند و کدام یک مینیمم. سپس ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

الف) $g(x) = -(x+۱)^۲ + ۳$

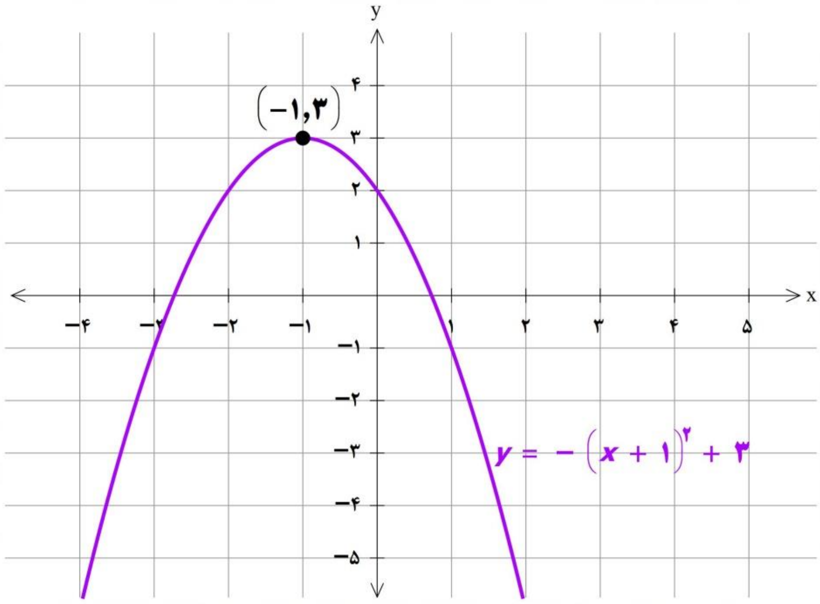
راه اول: این سهمی در $x = -۱$ ماکزیمم دارد.

$$y = -(x+۱)^۲ + ۳ \Rightarrow -x^۲ - ۲x - ۱ + ۳ = ۰ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^۲ - ۲x + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow a = -۱ < ۰ , x = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow x = \frac{-(-۲)}{۲\times(-۱)} = -۱ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = g(-۱) = ۳$$



راه دوم: این سهمی در $x = -۱$ ماکزیمم دارد.

$$y = -(x+۱)^۲ + ۳ , y = a(x-h)^۲ + k \Rightarrow a = -۱ < ۰ , (h,k) = (-۱,۳)$$

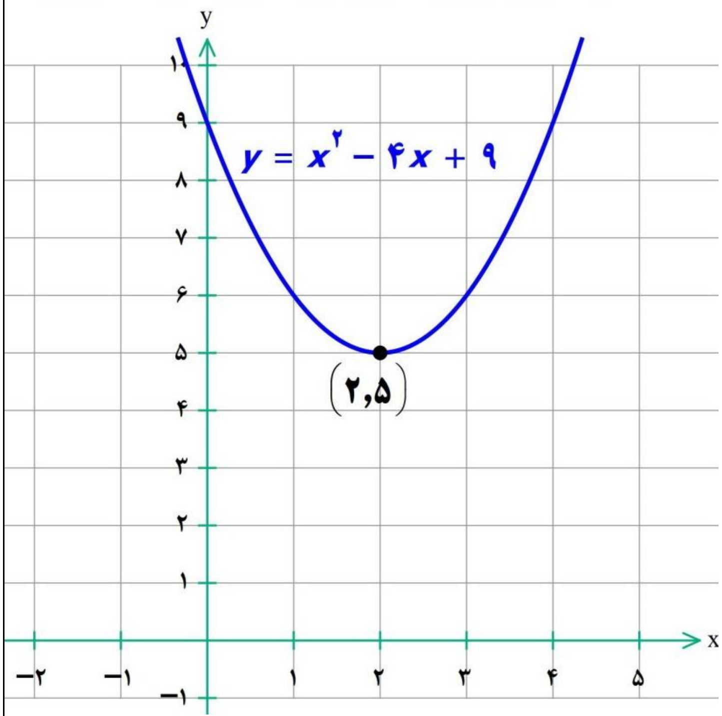
مقدار ماکزیمم ۳ است.

این سهمی در $x = ۲$ مینیمم دارد.

$$y = x^۲ - ۴x + ۹ = ۰ \Rightarrow a = ۱ > ۰ , x = -\frac{b}{۲a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-۴)}{۲\times۱} = ۲ \Rightarrow y = h(۲) = ۵$$

مقدار مینیمم ۵ است.

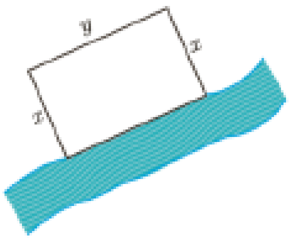


فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰

۲- یک ماهیگیر می خواهد در کنار رودخانه محوطه ای مستطیل شکل را فنس کشی کند. او تنها هزینهٔ ۱۰۰ متر فنس کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

(راهنمایی: $y + ۲x = ۱۰۰ \Rightarrow y = ۱۰۰ - ۲x$

مساحت مستطیل را به صورت تابعی برحسب x بنویسید و ماکزیمم آن را بیابید.)

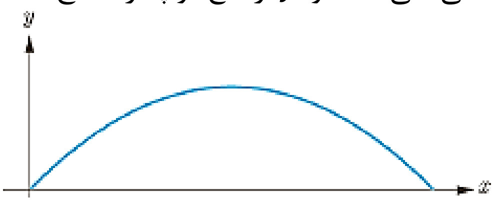


$$S_{\square} = xy \Rightarrow S_{\square} = x(۱۰۰ - ۲x) = -۲x^۲ + ۱۰۰x$$

$$a = -۲ < ۰\ , x = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow x = -\frac{۱۰۰}{۲ \times (-۲)} = ۲۵ \Rightarrow y = ۱۰۰ - ۵۰ = ۵۰$$
$$S = ۲۵ \times ۵۰ = ۱۲۵۰m^۲$$

•صفرهای تابع درجه ۲

همان گونه که می دانیم، نمودار هر تابع درجه دوم، یک سهمی است. به عنوان مثال فرض کنیم فوتبالیستی توپی را با زاویهٔ $۴۵°$ نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیهٔ $۲۰\ m/s$ شوت کند. معادلهٔ مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطهٔ $y = -\frac{۱}{۴۰}x^۲ + x$ است که نمودار آن مانند شکل مقابل است. در این رابطه x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است.



الف) حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید.

ارتفاع توپ

$$x = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow x = -\frac{۱}{-\frac{۲}{۴۰}} = ۲۰\ m \Rightarrow y = -\frac{۱}{۴۰} \times ۴۰۰ + ۲۰ = ۱۰m$$

ب) به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

برای آنکه طول نقاط برخورد نمودار این تابع با محور x ها را به دست آوریم، باید قرار دهیم $y = ۰$.

$$y = ۰ \Rightarrow x\left(-\frac{۱}{۴۰}x + ۱\right) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴۰ \end{cases}$$

این نقاط را روی نمودار نشان دهید و توضیح دهید که این اعداد از نظر فیزیکی چه معنایی می دهند؟

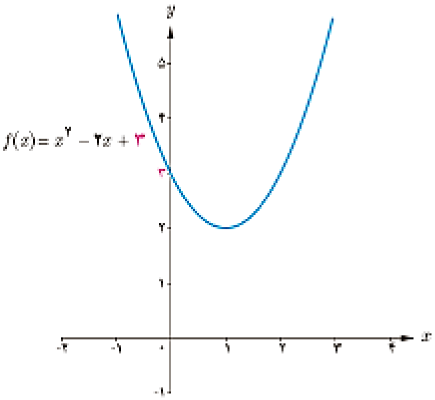
طول نقطه ی (۰ و ۰) زمان شروع پرتاب و طول نقطه ی (۰ و ۴۰) زمان برخورد گلوله با زمین است.

نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور x ها را صفرهای تابع می نامیم که در واقع ریشه های معادلهٔ $f(x) = ۰$ هستند. به

فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱

عبارت دیگر، در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.

همچنین عرض نقطهٔ برخورد نمودار هر تابع مثل f با محور y ها، همان $f(۰)$ است. به عبارت دیگر در تابع درجه ۲ با ضابطهٔ $f(x) = ax^۲ + bx + c$ ، عدد ثابت c نشان دهندهٔ محل برخورد نمودار آن با محور y هاست. به عنوان مثال، به شکل مقابل توجه کنید.

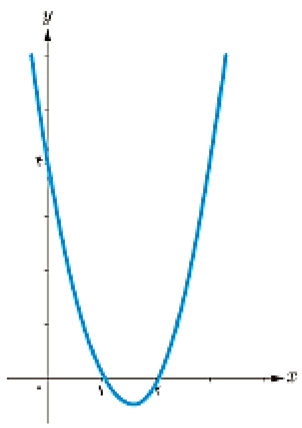


مثال: معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید.

حل: با توجه به شکل دیده می شود که نمودار تابع، محور افقی را در نقاطی با طول های ۱ و ۲ قطع کرده است. پس ضابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$y = a(x-۱)(x-۲)$$

با توجه به نمودار، مقدار a را به دست می آوریم.



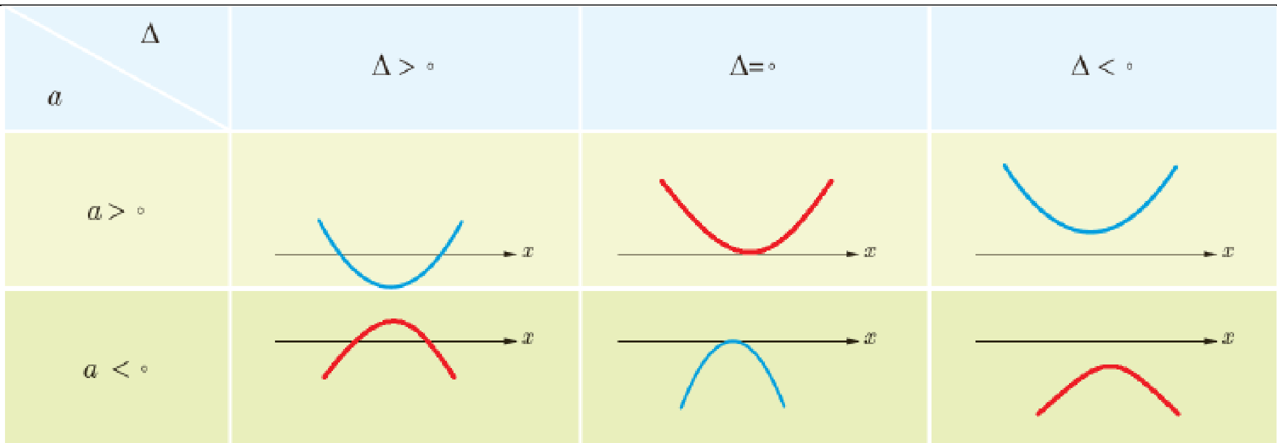
نقطهٔ (۰.۴) روی سهمی است $\Rightarrow ۴ = a(۰-۱)(۰-۲) \Rightarrow a = ۲$

$$\Rightarrow y = ۲(x-۱)(x-۲) \Rightarrow y = ۲x^۲ - ۶x + ۴$$

•کار در کلاس صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی

۱- همچنان که از سال قبل می دانیم، تعداد صفرهای تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ را به کمک علامت Δ می توان تشخیص داد. همچنین رو به بالا بودن یا رو به پائین بودن دهانهٔ سهمی از روی علامت a مشخص می شود. جدول زیر را کامل کنید.

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری



۲- دربارهٔ تابع درجه دوم f، برای تشخیص علامت ریشه های احتمالی معادله $f(x) = ۰$ می توانیم از علامت P ,S کمک بگیریم. در هر یک از موارد زیر، مانند قسمت الف عمل کنید.

الف) $y = x^۲ + ۶x + ۵$

$\Delta = ۱۶ > ۰ \Rightarrow$ معادلهٔ $y = ۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد

$P = \dfrac{c}{a} = ۵ > ۰ \Rightarrow$ ریشه ها هم علامت اند

$S = -\dfrac{b}{a} = -۶ < ۰ \Rightarrow$ هر دو ریشه منفی اند

ب) $y = x^۲ + ۴x - ۵$

$\Delta = ۳۶ > ۰ \Rightarrow$ معادلهٔ $y = ۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد

$P = \dfrac{c}{a} = -۵ < ۰ \Rightarrow$ ریشه ها هم علامت نیستند

$S = -\dfrac{b}{a} = -۴ < ۰ \Rightarrow$ قدر مطلق ریشه منفی بزرگ تر از ریشه مثبت است

پ) $y = ۳x^۲ - ۷x + ۱$

$\Delta = ۳۷ > ۰ \Rightarrow$ معادلهٔ $y = ۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد

$P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{۱}{۳} > ۰ \Rightarrow$ ریشه ها هم علامت اند

$S = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{۷}{۳} > ۰ \Rightarrow$ هر دو ریشه مثبت اند

ت) $y = -x^۲ + ۲x - ۱۵$

$\Delta = ۴ - ۴(-۱)(-۱) = ۰ \Rightarrow$ معادلهٔ $y = ۰$ ریشهٔ مضاعف دارد

$P = \dfrac{c}{a} = ۱ > ۰ \Rightarrow$ ریشه ها هم علامت اند

$S = -\dfrac{b}{a} = ۲ > ۰ \Rightarrow$ هر دو ریشه مثبت اند

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری

۳- هرگاه نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c(a\neq ۰)$ را داشته باشیم، می توانیم به کمک آن علامت ضرایب a, b, c را مشخص کنیم. به عنوان مثال نمودار تابع f از مجموعه توابع داده شدهٔ زیر را در نظر می گیریم:

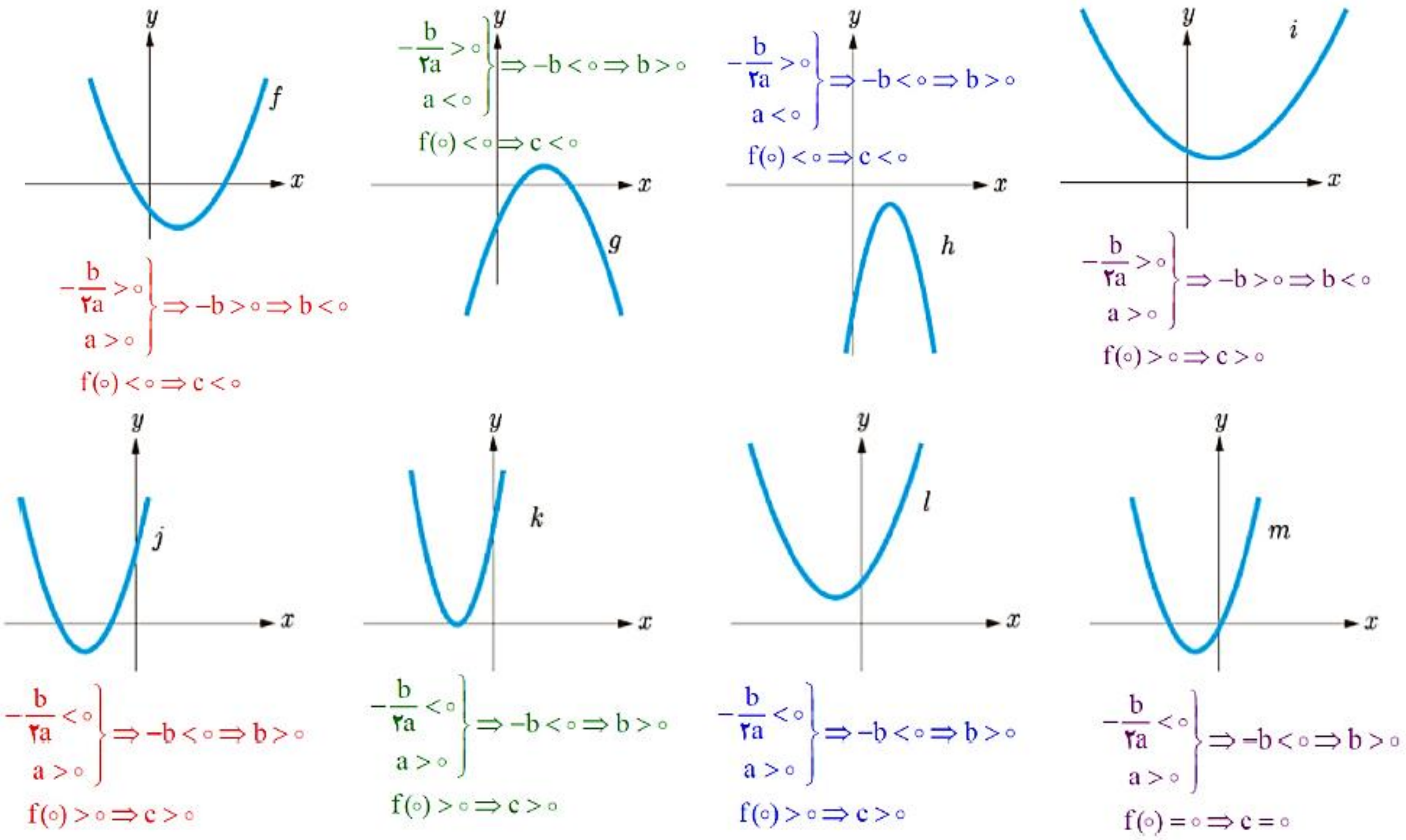
- دهانهٔ سهمی رو به بالاست؛ پس a مثبت است.
- نمودار تابع f محور y ها را در قسمت منفی ها قطع کرده است؛ پس c منفی است.
- رأس سهمی در ربع چهارم قرار گرفته که در آن مقادیر x مثبت اند؛ پس:

$$-\frac{b}{۲a}>۰\ \Rightarrow b<۰$$

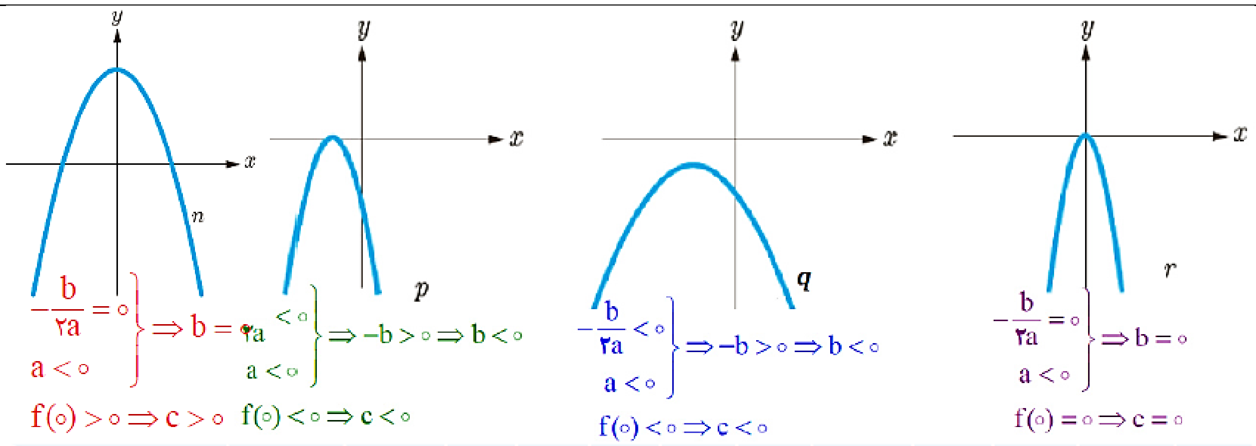
توجه داریم که با توجه به نمودار، مجموع دو ریشه عددی مثبت است (چرا؟) و از این مطلب هم می توان منفی بودن علامت b را نتیجه گرفت.

جواب چرا: زیرا فاصلهٔ ریشهٔ مثبت از مبدأ بیش تر از فاصلهٔ ریشهٔ منفی از مبدأ است به عبارتی قدر مطلق ریشه مثبت بزرگ تر از قدر مطلق ریشهٔ منفی است.

خلاصه این اطلاعات در جدول بعد آمده است. جدول را کامل کنید.



محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری



ویژگی / تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+	−	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−
b	−	+	+	−	+	+	+	+	۰	−	−	۰
c	−	−	−	+	+	+	+	۰	+	−	−	۰
تعداد ریشه‌ها	دو	دو	ندارد	ندارد	دو	یک	ندارد	دو	دو	یک	فاقد ریشه	یک
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت	دو تا مثبت	ریشه ندارد	ریشه ندارد	دو تا منفی	یک منفی	ریشه ندارد	یکی منفی یکی صفر	یکی صفر یکی منفی	یک منفی	ریشه ندارد	یک صفر

●حل تمرینات صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی

۱- معادله های زیر را حل کنید.

الف) $x^{۴} - ۸x^{۲} + ۸ = ۰$

$x^{۲} = u \Rightarrow u^{۲} - ۸u + ۸ = ۰$

$\Delta = ۳۲ \Rightarrow u = \dfrac{۸ \mp ۴\sqrt{۲}}{۲}$

$u = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{۴ + ۲\sqrt{۲}}$

$u = ۴ - ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{۴ - ۲\sqrt{۲}}$

ب) $۴x^{۶} + ۱ = ۵x^{۳}$

$x^{۳} = u \Rightarrow ۴u^{۲} - ۵u + ۱ = ۰$

$\Delta = ۹ \Rightarrow u = \dfrac{۵ \pm ۳}{۸}$

$u = ۱ \Rightarrow x^{۳} = ۱ \Rightarrow x = ۱$

$u = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x^{۳} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow\ x = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}} = \frac{\sqrt[۳]{۲}}{۴}$

۲- معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه های آن $\sqrt{۲} - ۱$ و $\sqrt{۲} + ۱$ باشد.

$\alpha = ۱ - \sqrt{۲}$ و $\beta = ۱ + \sqrt{۲}$

$s = \alpha + \beta\ \Rightarrow s = ۱ - \sqrt{۲} + ۱ + \sqrt{۲} = ۲\ \ ,\ \ p = \alpha.\beta = (۱ - \sqrt{۲})(۱ + \sqrt{۲}) = -۱$

$x^{۲} - ۲x - ۱ = ۰$

۳- مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = -۲x^{۲} + ۸x - ۵$

$a = -۲ < ۰$ دهانهٔ سهمی رو به پایین و نقطهٔ ماکزیمم دارد

$x = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow\ x = ۲$

$f(۲) = -۲ \times ۴ + ۸ \times ۲ - ۵ = ۳\ \Rightarrow\ f(۲) = ۳$

ب) $g(x) = ۳x^{۲} + ۶x + ۵$

$a = ۳ > ۰$ دهانهٔ سهمی رو به بالا و نقطهٔ مینیمم دارد

$x = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow\ x = -۱$

$g(-۱) = ۳ \times ۱ + ۶(-۱) + ۵ = ۲\ \Rightarrow\ f(-۱) = ۲$

۴- راکتی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می گیرد که معادلهٔ آن به صورت مقابل است.

$h(t) = ۱۰۰t - ۵t^{۲}\ \ (t \geq ۰)$

الف) چقدر طول می کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

$h(t) = -۵t^{۲} + ۱۰۰t\ \Rightarrow a = -۵ < ۰$ دهانهٔ سهمی رو به پایین و نقطهٔ ماکزیمم دارد

$t = -\frac{b}{۲a}\ \Rightarrow\ t = -\frac{۱۰۰}{۲(-۵)} \Rightarrow\ t = ۱۰\ \ s$. پس از ۱۰ ثانیه به بالاترین ارتفاع می رسد.

ب) ارتفاع نقطهٔ اوج را بیابید.

$h(۱۰) = -۵ \times ۱۰۰ + ۱۰۰ \times ۱۰ = ۵۰۰\ m$ ارتفاع نقطهٔ اوج

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین باز می گردد؟

پس از ۲۰ راکت به زمین باز می گردد.

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری

$h\,(t)=۰\ \Rightarrow -۵t^۲+۱۰۰t=۰\ \Rightarrow\ t(-۵t+۱۰۰)=۰\ \Rightarrow t=۰\,s\,,t=۲۰\,s$

نکته $t=۰$ لحظهٔ شروع پرتاب است.

۵- استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است.

اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

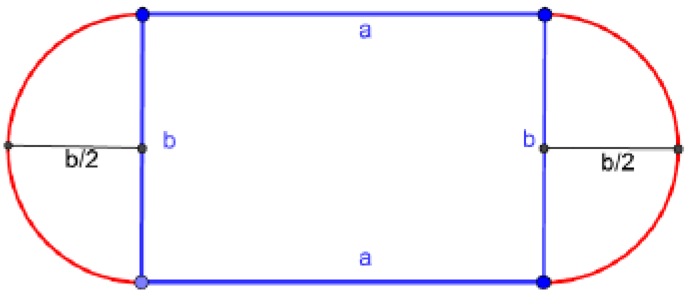
$$P=P_O+۲a\ \Rightarrow\ P=۲\pi\times\frac{b}{۲}+۲a\ \Rightarrow\ \pi b+۲a=۱۵۰۰\ \Rightarrow\ a=۷۵۰-\frac{\pi}{۲}b$$

$-\frac{\pi}{۲}<۰$ دهانهٔ سهمی رو به پایین است و نقطهٔ ماکزیمم دارد.

$$S_{\square}=ab\ \Rightarrow\ S_{\square}=\left(۷۵۰-\frac{\pi}{۲}b\right)b\Rightarrow S_{\square}=-\frac{\pi}{۲}b^۲+۷۵۰b$$

$$\Rightarrow b=-\frac{۷۵۰}{۲\left(\frac{\pi}{۲}\right)}=\frac{۷۵۰}{\pi}\xrightarrow{\pi=۳}b=۲۵۰m\,,a=۷۵۰-\frac{\pi}{۲}\times\frac{۷۵۰}{\pi}=۳۷۵\,m$$

$$S_{\square}=۲۵۰\times۳۷۵=۹۳۷۵۰m^۲\ \ ,\ \ S=S_{\square}+S_O=۹۳۷۵۰+۳(۱۲۵)^۲=۱۴۰۶۲۵\,m^۲$$



ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

$$a=۷۵۰-\frac{\pi}{۲}b$$

$$S=S_{\square}+S_O\ \Rightarrow\ S=-\frac{\pi}{۲}b^۲+۷۵۰b+\left(\frac{b}{۲}\right)^۲\pi\Rightarrow S=-\frac{\pi}{۴}b^۲+۷۵۰b$$

$-\frac{\pi}{۴}<۰$ دهانهٔ سهمی رو به پایین است و نقطهٔ ماکزیمم دارد.

$$b=\frac{-۷۵۰}{۲\left(-\frac{\pi}{۴}\right)}=\frac{۱۵۰۰}{\pi}\ \Rightarrow a=۷۵۰-\frac{\pi}{۲}\times\frac{۱۵۰۰}{\pi}=۰$$

$$S=۳\times(۲۵۰)^۲=۱۸۷۵۰۰\ \ m^۲$$

محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل اول
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسهٔ تحلیلی و جبر
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس دوم
۱۴۰۰–۱۴۰۱	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	«معادله درجه دوم و تابع درجه۲»
	گروه ریاضی	نام طراح: جواد عسگری

۶- معادلهٔ سهمی های زیر را بنویسید.

راه اول:

$f(۰) = c \Rightarrow c = ۰$
$f(۲) = ۰ \Rightarrow ۴a + ۲b = ۰$
$f(۰) = ۰$

با توجه به این که دو نقطهٔ ۰ و ۲ دارای عرض های برابر هستند پس می توانیم طول رأس سهمی را به صورت زیر به دست آوریم:

$\frac{۱+۰}{۲} = ۱$

$f(۱) = -۴ \Rightarrow a + b = -۴$

$\begin{cases} a+b=-۴ \\ ۴a+۲b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a-۲b=۸ \\ ۴a+۲b=۰ \end{cases} \Rightarrow ۲a = ۸$

$\Rightarrow a = ۴ \Rightarrow b = -۸$

$$f(x) = ۴x^۲ - ۸x$$

راه دوم:

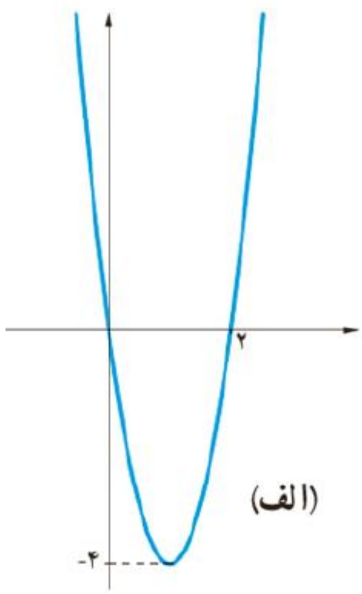
$f\left(-\frac{b}{۲a}\right) = -۴ \Rightarrow a\left(-\frac{b}{۲a}\right)^۲ + b\left(-\frac{b}{۲a}\right) = -۴$

$\Rightarrow \frac{b^۲}{۴a} - \frac{b^۲}{۲a} = -۴ \Rightarrow b^۲ = ۱۶a$

$\begin{cases} b^۲ = ۱۶a \\ ۴a+۲b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^۲ = ۱۶a \\ ۱۶a+۸b=۰ \end{cases}$

$\Rightarrow b^۲ + ۸b = ۰ \Rightarrow b(b+۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} b=۰ & \Rightarrow a=۰ \\ b=-۸ & \Rightarrow a=۴ \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = ۴x^۲ - ۸x$



(الف)

راه سوم:

$y = f(x) = a(x-h)^۲ + k$

$k = -۴$

$f(۰) = ۰ \Rightarrow a(۰-h)^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow ah^۲ = ۴$

$f(۲) = ۰ \Rightarrow a(۲-h)^۲ - ۴ = ۰$

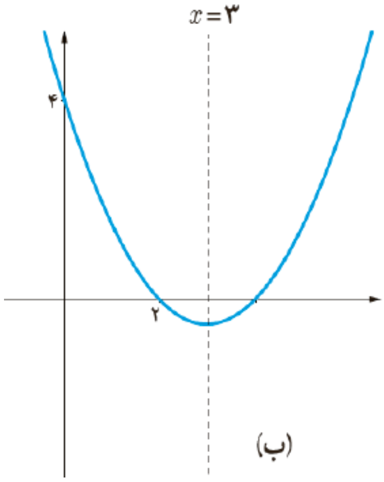
$۴a - ۴ah + ah^۲ - ۴ = ۰ \xrightarrow{ah^۲=۴} ۴a - ۴ah + ۴ - ۴ = ۰$

$۴a - ۴ah = ۰ \Rightarrow ۴a(۱-h) = ۰ \xrightarrow{a\neq۰} ۱-h=۰ \Rightarrow h=۱$

$ah^۲ = ۴ \xrightarrow{h=۱} a = ۴ \Rightarrow y = f(x) = ۴(x-۱)^۲ - ۴$

$$\Rightarrow f(x) = ۴x^۲ - ۸x$$

محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل اول
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسهٔ تحلیلی و جبر
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس دوم
۱۴۰۰-۱۴۰۱	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	«معادله درجه دوم و تابع درجه۲»
	گروه ریاضی	نام طراح: جواد عسگری



(ب)

$x = 3 \Rightarrow -\dfrac{b}{2a} = 3 \Rightarrow b = -6a$

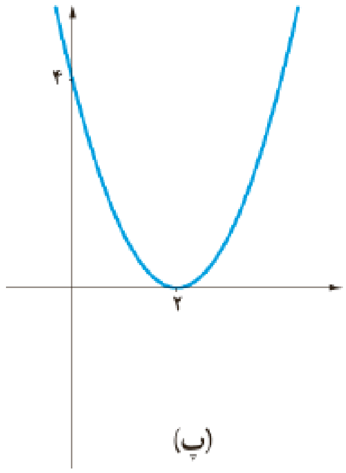
$f(0) = 4 \Rightarrow c = 4$

$f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b + 4 = 0$

$\begin{cases} b = -6a \\ 4a + 2b + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4a - 12a + 4 = 0$

$\Rightarrow -8a + 4 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow b = -3$

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 4$



(پ)

$x = 2 \Rightarrow -\dfrac{b}{2a} = \quad \Rightarrow b = -4a$

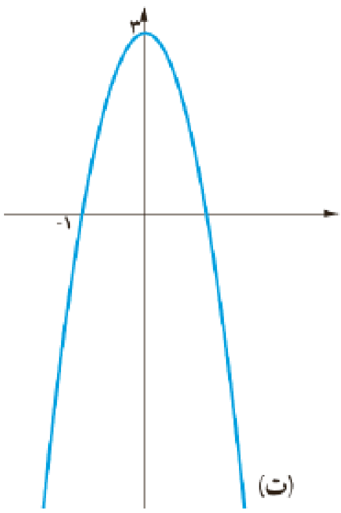
$f(0) = 4 \Rightarrow c = 4$

$f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b + 4 = 0$

$\begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4a - 8a + 4 = 0$

$\Rightarrow -4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -4$

$f(x) = x^2 - 4x + 4$



(ت)

$f(0) = 3 \Rightarrow c = 3$

$x = 0 \Rightarrow -\dfrac{b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$

$f(-1) = 0 \Rightarrow a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$

$f(x) = -3x^2 + 3$

راه اول

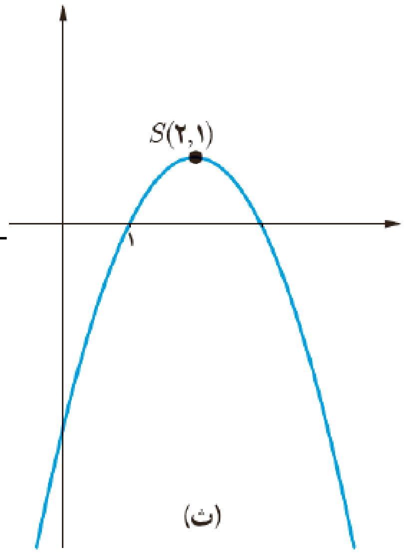
$y = f(x) = a(x-h)^2 + k$ و $s(2,1) \Rightarrow h = 2, k = 1$

$f(1) = 0 \Rightarrow a(1-2)^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

$f(x) = -(x-2)^2 + 1 = -x^2 + 4x - 3$

محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل اول
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسهٔ تحلیلی و جبر
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس دوم
۱۴۰۰–۱۴۰۱	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	«معادله درجه دوم و تابع درجه۲»
	گروه ریاضی	نام طراح: جواد عسگری

راه دوم



$x = ۲ \Rightarrow -\dfrac{b}{۲a} = \ \Rightarrow b = -۴a$

$f(۱) = ۰ \Rightarrow a + b + c = ۰ \xrightarrow{b=-۴a} -۳a + c = ۰$

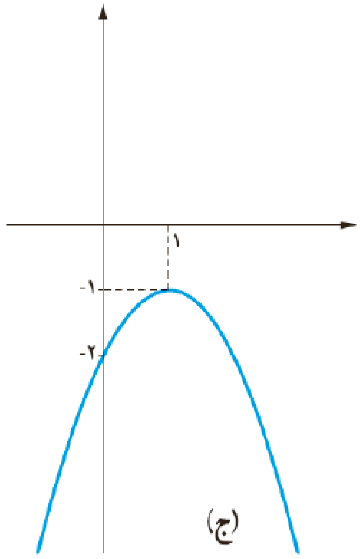
$f(۲) = ۱ \Rightarrow ۴a + ۲b + c = ۱ \xrightarrow{b=-۴a} -۴a +$

$\begin{cases} -۳a + c = ۰ \\ -۴a + c = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳a + c = ۰ \\ ۴a - c = -۱ \end{cases} \Rightarrow a = -۱$

$\Rightarrow b = ۴ \,, c = -۳$

$f(x) = -x^{۲} + ۴x - ۳$

راه اول:



$S(۱\,,-۱)$

$f(۰) = -۲ \Rightarrow c = -۲$

$f(۱) = -۱ \Rightarrow a + b - ۲ = -۱ \Rightarrow a + b = ۱$

$x = ۱ \Rightarrow -\dfrac{b}{۲a} = ۱ \Rightarrow b = -۲a$

$\begin{cases} b = -۲a \\ a + b = ۱ \end{cases} \Rightarrow a - ۲a = ۱ \Rightarrow a = -۱ \,, b = ۲$

$f(x) = -x^{۲} + ۲x - ۲$

راه دوم:

$y = f(x) = a(x-h)^{۲} + k$ و $s(۱\,,-۱) \Rightarrow h = ۱ \,, k = -۱$

$f(۰) = -۲ \Rightarrow a(۰-۱)^{۲} - ۱ = -۲ \Rightarrow a = -۱$

$f(x) = -(x-۱)^{۲} - ۱ = -x^{۲} + ۲x - ۲$

سوالات امتحانی پر تکرارو مهم (نهایی/ کنکور/داخلی):

۱- معادله $x^{۴} - ۱۳x^{۲} + ۳۶ = ۰$ را حل کنید.

۲- معادله $(x^{۲} - ۲x)^{۲} - (x^{۲} - ۲x) = ۰$ را حل کنید.

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری

۳- مقدار m را طوری بیابید که در معادله $x^۲ + ۶x + m + ۳ = ۰$ یکی از ریشه ها دو برابر دیگری باشد.

۴- در معادله ی $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ اگر $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = ۲m$ مقدار m را بیابید.

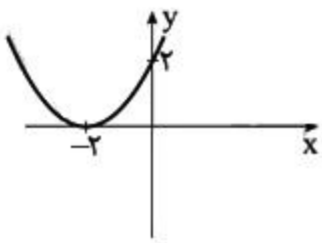
۵- معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\sqrt{۵} + ۱$ و $\sqrt{۵} - ۱$ باشد.

۶- تعیین کنید کدام یک از سهمی های زیر ماکزیمم دارند و کدام یک مینیمم، سپس ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

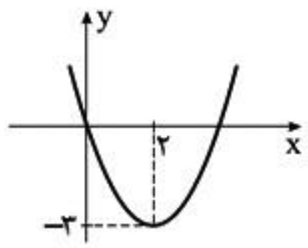
الف) $f(x) = -(x+۲)^۲ + ۳$ ب) $g(x) = ۲x^۲ + ۴x - ۵$

۷- معادله های سهمی های زیر را بنویسید.

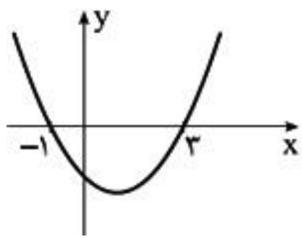
۱)



۲)



۳)



سوالات تستی و کنکور:

۱-فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ جواب های معادله $\left(\sqrt[۳]{x^۲} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} + ۱\right)\left(\sqrt[۳]{x^۲}\right) - ۱ = ۲\sqrt[۳]{x}$ باشند مقدار $x_۱ + x_۲$ ، کدام است؟(تجربی ۱۴۰۰)

۱) -۱ ۲)صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲- فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه های معادله $x = ۵ - x^۲$ باشند، $\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}$ و $\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}$ ریشه های کدام معادله هستند؟ (تجربی ۱۴۰۰)

۱) $۱۲۵x^۲ + ۱۶x = ۱$ ۲) $۱۲۵x^۲ = ۱۶x + ۱$

۳) $۱۲۵x^۲ = ۱۲x + ۱$ ۴) $۱۲۵x^۲ + ۱۲x = ۱$

۳- فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه های معادله $x = x^۲ - ۴$ باشند، $x_۱{}^۳ + \frac{۱}{x_۲}$ و $x_۲{}^۳ + \frac{۱}{x_۱}$ ریشه های کدام معادله هستند؟ (تجربی

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری

خارج ۱۴۰۰)

۱) $۴x^۲ = ۵۱x + ۲۲۱$ ۲) $۴x^۲ + ۵۱x = ۲۲۱$

۳) $۴x^۲ = ۵۱x + ۱۹۷$ ۴) $۴x^۲ + ۵۱x = ۱۹۷$

۴- معادله ی درجه دوم $۳x^۲ + (۲m - ۱)x + ۲ - m = ۰$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟(تجربی ۹۹)

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) ۳   ۳) -۱ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

۵-معادله ی درجه دوم $۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰$ دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر m کدام است؟(تجربی خارج ۹۹)

۱) $(-۴,۰)$ ۲) $(-۴,-۲)$ ۳) $(-۶,۰)$ ۴) $(-۶,-۴)$

۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله ی درجه دوم $(۲m - ۱)x^۲ + ۶x + m - ۲ = ۰$ دارای دو ریشه حقیقی است؟ (ریاضی۹۸)

۱) $-۲ < m < ۲/۵$ ۲) $-۲ < m < ۳/۵$

۳) $-۱ < m < ۳/۵$ ۴) $-۱ < m < ۲/۵$

۷- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله ی درجه دوم $x^۲ + (m - ۲)x + m + ۱ = ۰$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟ (تجربی۹۷)

۱) $-۱ < m < ۰$ ۲) $m < ۰$ ۳) $۲ < m < ۸$ ۴) $m > ۸$

۸- به ازای کدام مقدار m مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $۲x^۲ - (m + ۱)x + \frac{۱}{۸} = ۰$ برابر ۲ می باشد؟(ریاضی۹۶)

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

۹- به ازای کدام مقادیر a معادله $x^۳ + (a - ۱)x^۲ + (۴ - a)x = ۴$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟ (خارج تجربی۹۴)

۱) $a < -۴$ ۲) $a > -۴$ ۳) $a < ۴$ ۴) $a > ۴$

۱۰- به ازای کدام مقدار m مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله ی $mx^۲ - (m + ۳)x + ۵ = ۰$ برابر ۶ می باشد ؟

محتوای نوشتاری	**به نام خدا**	**فصل اول**
کتاب ریاضی(۲)	**اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی**	**هندسهٔ تحلیلی و جبر**
سال تحصیلی	**معاونت آموزش متوسطه**	**درس دوم**
۱۴۰۰-۱۴۰۱	**اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی**	**«معادله درجه دوم و تابع درجه۲»**
	گروه ریاضی	**نام طراح: جواد عسگری**

(تجربی۹۳)

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ ۴) -1 و $\frac{9}{5}$

۱۱- به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات مماس است؟ (تجربی خارج۹۳)

۱) -4 ۲) -12 و ۴ ۳) -4 و ۱۲ ۴) ۱۲

۱۲- به ازای کدام مقدار m ریشه های حقیقی معادله ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$، معکوس یکدیگرند؟ (خارج تجربی۹۰)

۱) -2 ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

۱۳- ریشه های کدام معادله ، از معکوس ریشه های معادله ی درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کمتر است؟ (تجربی۹۴)

۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ ۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ ۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ ۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

۱۴- اگر β و α ریشه های معادله ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند مجموعه جواب کدام معادله به صورت $\{1+\frac{1}{\beta}$ و $1+\frac{1}{\alpha}\}$ است؟ (ریاضی۹۲)

۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ ۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$

۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ ۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

۱۵- اگر β و α ریشه های معادله ی $2x^2 - 3x = 1$ باشند به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب معادله ی $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\left\{\alpha\beta^2 \text{ و } \alpha^2\beta\right\}$ است؟ (ریاضی خارج۹۰)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر m منحنی به معادله $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ محور x ها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟ (ریاضی۹۵)

۱) $m > 2$ ۲) $-1 < m < 2$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری

۱۷- به ازای کدام مجموعه مقادیر m منحنی به معادله $y=(m+۲)x^{۲}+۳x+۱-m$ محور x ها را در دو طرف مبدا مختصات قطع می کند؟ (ریاضی خارج۹۵)

۱) $m>۱$ یا $m<-۲$ ۲) $-۲<m<۱$ ۳) فقط $m<-۲$ ۴) فقط $m>۱$

۱۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $y=(a-۳)x^{۲}+ax-۱$ از ناحیه ی اول محورهای مختصات نمی گذرد؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $a\le ۲$ ۲) $۰<a\le ۲$ ۳) $۲<a<۳$ ۴) $۰<a<۳$

۱۹- به ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادله ی $y=ax^{۲}-(a+۲)x$ از ناحیه ی دوم محورهای مختصات نمی گذرد؟ (ریاضی۸۹)

۱) $a\le ۲$ ۲) $a>۰$ ۳) $a\le -۲$ ۴) $-۲\le a<۰$

۲۰- با کدام مقادیر m، منحنی به معادله ی $y=(m+۲)x^{۲}-۲x+۱$ از هر چهار ناحیه ی محورهای مختصات می گذرد؟(ریاضی ۸۷)

۱) $m<-۲$ ۲) $m<-۱$

۳) $-۲<m<-۱$ ۴) $-۴<m<-۲$

۲۱- به ازای چه حدودی از ***a***، نمودار تابع درجه دوم $y=ax^{۲}-(a-۴)x+\frac{۹}{۴}$ فقط از ناحیه چهارم محورهای مختصات نمی گذرد؟

۱) $-۱<a<۰$ **۲)** $-۲<a<-۱$

۳) $۱<a<۲$ **۴)** $۰<a<۱$

۲۲- معادله ی درجه دومی که ریشه های آن ۳ برابر معکوس ریشه های معادله ی $x^{۲}-۳x+۱=۰$ باشد، کدام است؟

۱) $x^{۲}-۹x+۹=۰$ ۲) $x^{۲}-۹x+۳=۰$

۳) $x^{۲}+۹x-۳=۰$ ۴) $x^{۲}-۹x-۹=۰$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری

•پاسخ تشریحی سوالات امتحانی

۱- فرض می کنیم $x^۲ = u$ در نتیجه معادله بصورت $u^۲ - ۱۳u + ۳۶ = ۰$ در می آید.

$$u^۲ - ۱۳u + ۳۶ = ۰ \Longrightarrow (u-۴)(u-۹) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} u-۴=۰ \\ u-۹=۰ \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} u=۴ \\ u=۹ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^۲=۴ \\ x^۲=۹ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\pm۲ \\ x=\pm۳ \end{cases}$$

۲- با تغییر متغیر $x^۲ - ۲x = u$ داریم:

$$u^۲ - u = ۰ \Longrightarrow u(u-۱) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} u=۰ \\ u-۱=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u=۰ \\ u=۱ \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x^۲-۲x=۰ \\ x^۲-۲x=۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(x-۱)=۰ \\ x^۲-۲x-۱=۰ \end{cases}$$

از $x(x-۱) = ۰$ جواب ها $x = ۰$ و $x = ۱$ بدست می آیند.

همچنین از $x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$ خواهیم داشت:

$$\Delta = (-۲)^۲ - ۴(۱)(-۱) = ۸$$

و $x = \frac{۲\pm\sqrt{۸}}{۲} = \frac{۲\pm۲\sqrt{۲}}{۲} = ۱ \pm \sqrt{۲}$

۳- اگر α و β ریشه های معادله درجه دو $x^۲ + ۶x + m + ۳ = ۰$ باشند در اینصورت:

$$\alpha + \beta = -۶ \ , \alpha.\beta = m + ۳$$

همچنین $\alpha = ۲\beta$ در معادله اول جاگذاری می کنیم:

$$۲\beta + \beta = -۶ \Longrightarrow ۳\beta = -۶ \Longrightarrow \beta = -۲ \Longrightarrow \alpha = -۴$$
$$\alpha.\beta = m + ۳ \Longrightarrow (-۴)(-۲) = m + ۳ \Longrightarrow m = ۵$$

۴- اگر α و β ریشه های معادله درجه دو $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ باشند در اینصورت:

$$\alpha + \beta = ۴ \ , \alpha.\beta = ۱$$
$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = ۲m \Longrightarrow \left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right)^۲ = ۴m^۲ \Longrightarrow \alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha\beta} = ۴m^۲$$
$$\Longrightarrow ۴ + ۲\sqrt{۱} = ۴m^۲ \Longrightarrow m^۲ = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} \Longrightarrow m = \pm\sqrt{\frac{۳}{۲}} \Longrightarrow = m = \sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

۵- $S = (۱+\sqrt{۵}) + (۱-\sqrt{۵}) = ۲$ و $P = (۱+\sqrt{۵})(۱-\sqrt{۵}) = ۱ - ۵ = -۴$

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Longrightarrow x^۲ - ۲x - ۴ = ۰$$

۶- الف) $f(x) = -\left(x+۲\right)^۲ + ۳$ سهمی رو به پایین است پس دارای ماکزیمم است و ماکزیمم آن عرض راس سهمی است پس:

$$S(-۲,+۳) \Rightarrow max = ۳$$

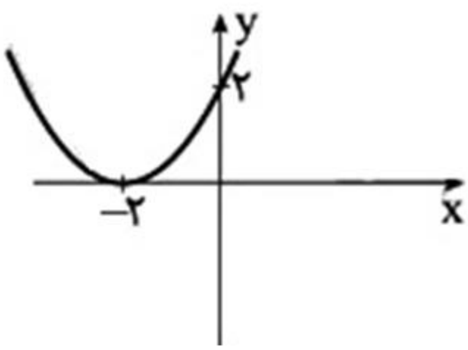
ب) $g(x) = ۲x^۲ + ۴x - ۵$

سهمی رو به بالا است پس دارای مینیمم است و مینیمم آن عرض راس سهمی است پس:

$$x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۴} = -۱ \Rightarrow S(-۱,-۷) \Rightarrow min = -۷$$

-۷

۱)



راس سهمی $S(-۲,۰)$ هست پس در $y = a(x-h)^۲ + k$ به جای h و k جاگذاری کنیم: $y = a(x+۲)^۲ + ۰$

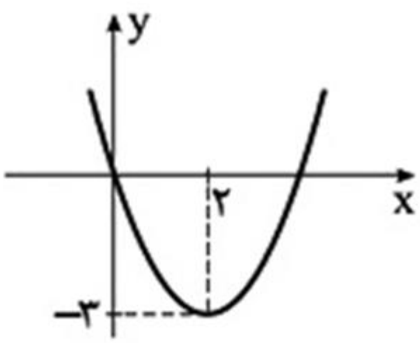
همچنین از نقطه $(۰,۲)$ عبور می کند پس

$$۲ = a(۰+۲)^۲ + ۰ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

و معادله سهمی برابر است با:

$$y = \frac{۱}{۲}(x+۲)^۲$$

۲)



راس سهمی $S(۲,-۳)$ هست پس در $y = a(x-h)^۲ + k$ به جای h و k جاگذاری کنیم: $y = a(x-۲)^۲ - ۳$

همچنین از نقطه $(۰,۰)$ عبور می کند پس

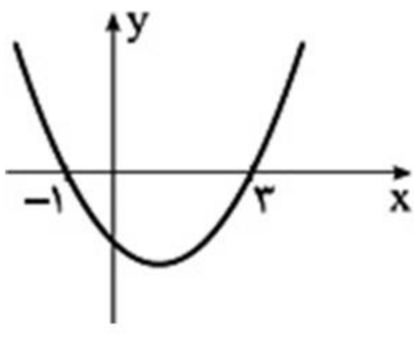
$$۰ = a(۰-۲)^۲ - ۳ \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

و معادله سهمی برابر است با:

$$y = \frac{۳}{۴}(x-۲)^۲ - ۳$$

سهمی محور x ها را در نقاط ۳ و ۱− قطع کرده است.پس صفرهای تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ این دو نقطه هستند. و داریم:

۳)



$$S = (-۱) + ۳ = ۲ \,,\, P = (-۱).۳ = -۳$$

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow y = x^۲ - ۲x - ۳$$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱—۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس دوم «معادله درجه دوم و تابع درجه۲» نام طراح: جواد عسگری

•منابع استفاده شده:

۱- کتاب درسی ریاضی ۲ چاپ پنجم ۱۴۰۰.

۲- کتاب معلم ریاضی (۲)پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه چاپ اول ۱۳۹۶

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس سوم «معادلات گویا و معادلات رادیکالی» نام طراح: جواد عسگری

اهداف یادگیری:

-توانایی حل معادلات گویا

- توانایی حل معادلات رادیکالی

- مهارت حل مسائل مرتبط با معادلات گویا و معادلات گنگ

انتظارات پس از مطالعه:

–بتواند معادلات گویا و معادلات گنگ را تشخیص داده و حل کند.

–بتواند از معادلات گویا و معادلات گنگ در حل مسائل کاربردی استفاده کند.

◈معادلات گویا:

برای حل یک معادله گویا می توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج ها،در کوچک ترین مضرب مشترک(ک م م)مخرج ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود .جواب های به دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنندو این جواب ها باید در معادله اولیه صدق کنند.

مثال: معادله $\frac{۴x-۱۲}{x^۲-۴x}=\frac{۲}{x-۲}+\frac{۳}{x}$ را حل کنید.

ک.م.م مخرج ها برابر $x(x-۲)(x-۴)$ می باشد که اگر به طرفین معادله ضرب شود بصورت زیر در می آید:

$$۳(x-۲)(x-۴)+۲x(x-۴)=(۴x-۱۲)(x-۲)$$
$$\rightarrow ۳x^۲-۱۸x+۲۴+۲x^۲-۸x=۴x^۲-۲۰x+۲۴$$
$$\rightarrow x^۲+۶x=۰\rightarrow x=۰,x=-۶$$

$x=۰$ مخرج را صفر می کند پس قابل قبول نیست لذا تنها جواب معادله $x=۶$ می باشد.

مثال: معادله $\frac{۱۵}{x^۲+x+۱}=۲(x^۲+x)+۱$ را حل کنید.

سمت راست معادله داده شده را بصورت زیر می نویسیم

$\frac{۱۵}{x^۲+x+۱}=۲(x^۲+x+۱)-۱$ با فرض $x^۲+x+۱=t$ معادله بصورت $\frac{۱۵}{t}=۲t-۱$ در می آید پس

$$۲t^۲-t-۱۵=۰\rightarrow t=\frac{۱\pm\sqrt{۱۲۱}}{۴}\rightarrow t=۳,t=-\frac{۵}{۲}$$

اگر $x^۲+x+۱=-\frac{۵}{۲}$ و یا $۲x^۲+۲x+۷=۰$ و $\Delta=-۵۲<۰$

و اگر $x^۲+x+۱=۳$ و یا $x^۲+x-۲=۰$ و جواب ها برابر $x=-۲\,,x=۱$ می باشد.

تست: اگرحاصل ضرب جوابهای معادله ی $\frac{a}{x^۲-۴}=\frac{x+۱}{x+۲}+\frac{x}{x-۲}$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ باشد، قدر مطلق تفاضل جواب های معادله کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

راه حل: گزینه(۴)

$$\frac{x}{x-۲}+\frac{x+۱}{x+۲}=\frac{a}{x^۲-۴}\xrightarrow{\times(x-۲)(x+۲)}x(x+۲)+(x-۲)(x+۱)=a$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+x-۲-a=۰$$

$$\alpha.\beta=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{-۲-a}{۲}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲+a=۳\Rightarrow a=۱$$

و معادله به صورت $۲x^۲+x-۳=۰$ می باشد

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۱-۴\times۲\times(-۳)}}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

تست: سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است.این قایق فاصله ۱۲۰۰ در رودخانه را رفته و برگشته است.اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است.سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟(تجربی۹۸)

۱۲(۱   ۱۵(۲   ۲۰(۳   ۲۵(۴

می دانیم $x=v.t$ پس

$$t_۲-t_۱=۵\rightarrow\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-v}-\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+v}=۵$$

$$\rightarrow ۲۴۰(۱۰۰+v)-۲۴۰(۱۰۰-v)=(۱۰۰۰۰-v^۲)$$

$$\rightarrow v^۲+۴۸۰v-۱۰۰۰۰=۰\rightarrow(v+۵۰۰)(v-۲۰)=۰$$

$\rightarrow v=-۵۰۰, v=۲۰$ پس جواب گزینه ۳ می باشد.

◈نکته(مستطیل طلایی):

مستطیلی است که نسبتِ مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. اگر طول مستطیل را با x و عرض آن را با y نشان دهیم دراینصورت $\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}$ و نسبت طول به عرض این مستطیل را نسبت طلایی می گویند.

مثال: عرض مستطیل را۱ $y=$ فرض می کنیم تا مقدار نسبت طلایی را محاسبه کنیم:

$$\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}\rightarrow x^۲-x-۱=۰\rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

برای $x=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ چون مقدارش منفی است غیرقابل قبول می باشد و $x=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ به عدد طلایی معروف است.

◈معادلات شامل عبارات اصم(گنگ):

برای حل یک معادله رادیکالی می توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه جاکرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد .سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد . پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب های حاصل در معادله اولیه صدق می کنند.

مثال: معادله $\sqrt{5x-6}+x=4$ را حل کنید

$$\sqrt{5x-6}=4-x \to 5x-6=(4-x)^2 \to x^2-13x+22=0$$
$$\to (x-2)(x-11)=0 \to x=2, x=11$$

اگر هر دو جواب را در معادله اولیه جاگذاری کنیم فقط $x=2$ قابل قبول می باشد.

مثال: معادله $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$ را حل کنید.

دو طرف معادله داده شده را به توان ۲ می رسانیم پس خواهیم داشت:

$$x+3+2x-1-2\sqrt{(x+3)(2x-1)}=3x-2$$
$$\to -2\sqrt{(x+3)(2x-1)}=-4 \to \sqrt{2x^2+5x-3}=2$$

دوباره طرفین معادله را به توان دو می رسانیم:

$$2x^2+5x-3=4 \to 2x^2+5x-7=0$$

مجموع ضرایب صفر است پس جواب ها عبارتند از $x=1\ , x=-\frac{7}{2}$

چون به ازای $x=-\frac{7}{2}$ عبارت های زیر رادیکال $2x-1$ و $x+3$ منفی است پس فقط $x=1$ قابل قبول است.

تست:حاصل ضرب جواب های معادله $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+3}+1=0$ کدام است؟

۱) 2 ۲) -1 ۳) 4 ۴) -3

راه حل: گزینه(۴) صحیح است.

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+3}+1=0 \Longrightarrow \sqrt{x+1}+1=\sqrt{2x+3}$$
$$\Longrightarrow x+1+2\sqrt{x+1}+1=2x+3 \Longrightarrow 2\sqrt{x+1}=x+1$$
$$\Longrightarrow 4(x+1)=x^2+2x+1 \Longrightarrow x^2-2x-3=0 \Longrightarrow (x-3)(x+1)=0$$
$$\Longrightarrow x=-1\ , x=3$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند و حاصل ضرب جوابها ۳− می باشد.

تست: معادله $\sqrt{x-۳}+\sqrt{x-۴\sqrt{x-۳}}=۱$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۳ ۲(۲ ۳) ۱ ۴) صفر

راه حل: گزینه(۳)

$$\sqrt{x-۳}+\sqrt{x-۴\sqrt{x-۳}}=۱ \Rightarrow \sqrt{x-۴\sqrt{x-۳}}=۱-\sqrt{x-۳}$$
$$\Longrightarrow x-۴\sqrt{x-۳}=۱-۲\sqrt{x-۳}+x-۳ \Longrightarrow ۲\sqrt{x-۳}=۲$$
$$\Longrightarrow \sqrt{x-۳}=۱ \Longrightarrow x-۳=۱ \Longrightarrow x=۴$$

پس معادله فقط یک ریشه دارد.

پاسخ کار در کلاس ها و تمرینات کتاب درسی:

•کاردرکلاس صفحه ی ۲۱:

۱-معادلات زیر را حل کنید .آیا تمام جواب های به دست آمده مورد قبول هستند؟

الف) $\frac{۳}{x^۲}-۱۲=۰$

$$\xRightarrow{\times x^۲} ۳-۱۲x^۲=۰ \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۴} \Rightarrow x=\pm\frac{۱}{۲}$$

هردو جواب مخرج را صفر نمی کنند و در معادله صدق می کنند پس قابل قبول هستند.

ب)

$$\frac{۲}{k}-\frac{۳k}{k+۲}=\frac{k}{k^۲+۲k}$$
$$\xRightarrow{\times k(k+۲)} ۲k+۴-۳k^۲=k \Rightarrow ۳k^۲-k-۴=۰ \Rightarrow k=-۱\,,k=\frac{۴}{۳}$$

هردو جواب مخرج را صفر نمی کنند و در معادله صدق می کنند پس قابل قبول هستند.

پ)

$$\frac{۳}{x}-\frac{۲}{x-۳}=\frac{۱۲}{۹-x^۲}$$

طرفین معادله را در $x(x-۳)(x+۳)$ ضرب می کنیم:

$$\Rightarrow ۳(x-۳)(x+۳)-۲x(x+۳)=-۱۲x$$
$$\Rightarrow ۳x^۲-۲۷-۲x^۲-۶x+۱۲x=۰ \Rightarrow x^۲+۶x-۲۷=۰$$

$$\Longrightarrow (x+۹)(x-۳)=۰ \Longrightarrow x=-۹ \ , x=۳$$

$x=۳$ مخرج را صفر می کند پس قابل قبول نیست.

۲- دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفته اول به صورت زیر بود: $\frac{۳۶}{۵}=۷.۲$

او از هفته ششم به بعد در تمام آزمون ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون هایش برابر ۸ شد. می خواهیم بدانیم از هفته ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمره ۹ گرفته است. برای حل مسئله می توان به روش زیر عمل کرد:

الف) اگر تعداد آزمون ها از هفته ششم به بعد برابر n باشد، مجموع امتیازات او در این مدت $۹n$ خواهد شد. عبارتی کسری بر حسب n بنویسید که نشان دهنده میانگین امتیاز تمام آزمون های ریاضی هفتگی آرمان باشد.

$$\frac{۹n+۳۶}{۵+n}$$

ب) کسر مربوط به قسمت الف را برابر ۸ قرار دهید و n را بیابید. سپس جواب به دست آمده را امتحان کنید.

$$\frac{۹n+۳۶}{۵+n}=۸ \Longrightarrow ۹n+۳۶=۴۰+۸n \Longrightarrow n+۴$$

$$\frac{۹\times۴+۳۶}{۵+۴}=\frac{۷۲}{۹}=۸$$

• کاردرکلاس صفحه ی ۲۳:

۱- معادلات زیر را مانند نمونه حل کنید. آیا تمام جواب های حاصل، قابل قبول اند؟

الف)

$$۲\sqrt{۲t-۱}-t=۱$$

$$\left(۲\sqrt{۲t-۱}\right)^۲=(t+۱)^۲ \Rightarrow ۸t-۴=t^۲+۲t+۱$$

$$\Rightarrow t^۲-۶t+۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۵ & \text{ق ق} \\ t=۱ & \text{ق ق} \end{cases}$$

ب)

$$۲x=۱-\sqrt{۲-x}$$

$$(۲x-۱)^۲=\left(-\sqrt{۲-x}\right)^۲ \Rightarrow ۴x^۲-۴x+۱=۲-x$$

$$\Rightarrow ۴x^۲-۳x-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \text{غ ق ق} \\ x=-\frac{۱}{۴} & \text{ق ق} \end{cases}$$

پ)

$$\sqrt{x+۷}=\sqrt{x}+۱$$

$$\left(\sqrt{x+۷}\right)^۲=\left(\sqrt{x}+۱\right)^۲ \Rightarrow\ x+۷=x+۲\sqrt{x}+۱ \Rightarrow\ \sqrt{x}=\ ۳ \Rightarrow x=۹$$ ق ق

ت)

$$\frac{۱}{\sqrt{u-۳}}-\frac{۲}{\sqrt{u}}=۰$$

$$\left(\frac{۱}{\sqrt{u-۳}}\right)^۲=\left(\frac{۲}{\sqrt{u}}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۱}{u-۳}=\frac{۴}{u}\ \Rightarrow ۴u-۱۲=u \Rightarrow ۳u=۱۲\ \Rightarrow u=۴$$ ق ق

ث)

$$۲+\sqrt{۲x^۲-۵x+۲}=x$$

$$\left(\sqrt{۲x^۲-۵x+۲}\right)^۲=\left(x-۲\right)^۲ \Rightarrow\ ۲x^۲-۵x+۲=x^۲-۴x+۴$$

$$\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\Rightarrow\begin{cases} x=۲ & \text{ق ق} \\ x=-۱ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۲- توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی اند.

الف) $\sqrt{t}+۲=۰$

الف) $\sqrt{t}+۲=۰$ در مجموعه ی اعداد حقیقی $\sqrt{t}$ اگر با معنی باشد مقدارش همواره بزرگتر یا مساوی عدد صفر است و اگر با عدد دو جمع شود حاصلی بزرگتر یا مساوی دو خواهد داشت یعنی : $\left(\sqrt{t}+۲\geq ۲\right)$ و این عبارت هرگز برابر صفر نخواهد شد لذا معادله ی مورد نظر فاقد جواب می باشد.

ب) $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲x+۳}+۱=۰$

ب) در مجموعه ی اعداد حقیقی هر یک از رادیکال های $\sqrt{x-۲}$ و $\sqrt{۲x+۳}$ عبارت هایی نامنفی هستند یعنی حاصلشان همواره بزرگتر یا مساوی صفر است و اگر با هم جمع شوند باز هم مقداری بزرگتر یا مساوی صفر خواهند داشت وبا جمع عدد یک با آنها حاصل کل عبارت بزرگتر یا مساوی یک خواهد بود لذا معادله ی مورد نظر فاقد جواب می باشد.

پ) $\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۲}=۰$

پ) بازهم رادیکال های $\sqrt{۱-x}$ و $\sqrt{x-۲}$ هر دو بزرگتر یا مساوی با صفر هستند و مجموع آن ها زمانی صفر خواهد شد که هر دو عبارت همزمان به ازای یک x برابر صفر شوند و این امکان پذیر نیست چون چنین x ای وجود ندارد.

• تمرینات صفحه۲۳ کتاب درسی:

۱-هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف)

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۲}=۵$$

طرفین معادله را در $x(x-۲)$ ضرب می کنیم:

$$\Rightarrow x-۲+x=۵x(x-۲)\Rightarrow ۵x^۲-۱۲x+۲=۰$$

$$\Delta=۱۰۴\Rightarrow x=\frac{۱۲\pm ۲\sqrt{۲۶}}{۱۰}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا هیچ یک مخرج را صفر نمی کنند.

ب)

$$\frac{۱۰}{r}-\frac{۱۵}{۲}=\frac{۲۰}{۳r}-۵$$

$$\xRightarrow{\times ۶r} ۶۰-۴۵r=۴۰-۳۰r\Rightarrow ۲۰=۱۵r\Rightarrow r=\frac{۴}{۳}$$ ق ق

پ)

$$\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳}$$

طرفین معادله را در $(x-۳)(x+۴)$ ضرب می کنیم:

$$\Rightarrow ۲x(x+۴)+(x-۳)(x+۱)=(x+۴)(x-۱)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۸x+x^۲-۲x-۳=x^۲+۳x-۴\Rightarrow ۲x^۲+۳x+۱=۰$$

$$\Delta=۱\Rightarrow x=-۱\,,x=\frac{-۱}{۲}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا هیچ یک مخرج را صفر نمی کنند.

ت)

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس سوم «معادلات گویا و معادلات رادیکالی» نام طراح: جواد عسگری

$$\sqrt{t+4}=3$$

$$\left(\sqrt{t+4}\right)^2 = 9 \Rightarrow t+4=9 \Rightarrow t=5$$

ث)

$$k=\sqrt{6k-8}$$

$$k^2=\left(\sqrt{6k-8}\right)^2 \Rightarrow k^2=6k-8 \Rightarrow (k-2)(k-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=2 & \text{ق ق} \\ k=4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

ج)

$$x+\sqrt{x}=6$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=(6-x)^2 \Rightarrow x=x^2-12x+36 \Rightarrow x^2-13x+36=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 & \text{ق ق} \\ x=9 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

چ)

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=1$$

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(1+\sqrt{2x-5}\right)^2 \Rightarrow x+1=2x-5+1+2\sqrt{2x-5}=0 \quad \left(2\sqrt{2x-5}\right)^2=(-x+5)^2$$

$$8x-20=x^2-10x+25 \Rightarrow x^2-18x+45=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 & \text{ق ق} \\ x=15 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

ح)

$$\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=2$$

$$\left(\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2=4 \Rightarrow m+2+\frac{1}{m}=4 \Rightarrow \frac{m^2+1}{m}=2 \Rightarrow m^2-2m+1=0 \Rightarrow m=1 \ \text{ق ق}$$

۲-علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه ای منتشر می کنند .پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می کند .اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می انجامد .حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، **نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟**

زمانی که علی برای ۱۶ صفحه صرف می کند ۲ ساعت یا ۱۲۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه $\frac{16}{120}$ صفحه ویرایش می کند.

و زمانی که علی و رضا با هم برای ۱۶ صفحه صرف می کند ۸۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه $\frac{16}{80}$ صفحه ویرایش می کنند.

و اگر زمانی را که رضا به تنهایی برای ۱۶ صفحه صرف می کند x دقیقه درنظر بگیریم پس در ۱ دقیقه $\frac{16}{x}$ صفحه ویرایش می کند.

درنتیجه:

$$\frac{۱۶}{۱۲۰}+\frac{۱۶}{x}=\frac{۱۶}{۸۰}\xRightarrow{\div ۱۶}\frac{۱}{۱۲۰}+\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۸۰}\xRightarrow{\times ۲۴۰x}۲x+۲۴۰=۳x\Rightarrow x=۲۴۰$$

۳-اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به طوری که $t=\sqrt{۱۰-\frac{h}{۵}}$.

این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

کافیست در معادله ی $t=\sqrt{۱۰-\frac{h}{۵}}$ مقدار $t=۲$ را جاگذاری کرده مقدار ارتفاع (h) را بدست بیاریم ...

$$t=۲\Rightarrow ۲=\sqrt{۱۰-\frac{h}{۵}}\Rightarrow ۱۰-\frac{h}{۵}=۴\Rightarrow \frac{h}{۵}=۶\Rightarrow h=۳۰$$

۴- الف)عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد .مسئله چند جواب دارد؟

الف)

$$\sqrt{x}-x=\frac{x}{۲}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^۲=\left(x+\frac{x}{۲}\right)^۲\Rightarrow x=x^۲+x^۲+\frac{x^۲}{۴}\Rightarrow ۹x^۲-۴x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{ق ق}\\ x=\frac{۲}{۳} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

ب)عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد .مسئله چند جواب دارد؟

ب)

$$x-\sqrt{x}=\frac{x}{۲}$$

$$\left(x-\frac{x}{۲}\right)^۲=\left(\sqrt{x}\right)^۲\Rightarrow x^۲-x^۲+\frac{x^۲}{۴}=x\Rightarrow x^۲-۴x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{ق ق}\\ x=۴ & \text{ق ق}\end{cases}$$

۵- معادله ای شاملِ مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه های آن باشد .پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

برای این تمرین می توان نامتناهی معادله نوشت که دو مورد را بیان می کنیم....

$$\sqrt{x^۲+۳x+۵}+\sqrt{x^۲+۳}=۵ \qquad \sqrt{۲x-x}+\sqrt{x}=۲$$

سوالات امتحانی پر تکرارو مهم (نهایی/ کنکور/داخلی):

۱- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۳}{x}+\frac{۵}{x+۲}=۲$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس سوم «معادلات گویا و معادلات رادیکالی» نام طراح: جواد عسگری

ب) $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{x-2}{x+1}$

پ) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=3$

ت) $\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{x^2-2x+3}=\frac{6}{x^2-2x+4}$

ث) $\sqrt{x+1}=x-1$

ج) $\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{2x-4}$

چ) $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-6}=1$

۲- دو کارگر کاری را با هم در ۶ روز انجام می دهند. اگر هر دو کارگر به تنهایی بخواهند کل کار را انجام دهند. کارگر اول ۵ روز زودتر از کارگر دوم کل کار را تمام کرد.کارگر دوم به تنهایی کار را چند روزه تمام می کند؟

۳- اگر $x=4$ یکی از جواب های معادله ی $x+a=\sqrt{5x-x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۴- بدون حل معادله توضیح دهید که چرا معادله زیر فاقد ریشه ی حقیقی هست؟

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}+2=0$$

سوالات کنکور

۱-فاصله نقطه تلاقی منحنی های $2y=x^2$ و $x=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3}$ با مبدا مختصات، کدام است؟(تجربی ۱۴۰۰)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{15}$

۲-اگر $3a+\sqrt{2a^2+4a}=2$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

۲-سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است.این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است.اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است.سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟(تجربی۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل اول
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسهٔ تحلیلی و جبر
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس سوم
۱۴۰۱-۱۴۰۰	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	«معادلات گویا و معادلات رادیکالی»
	گروه ریاضی	نام طراح: جواد عسگری

۳- پرنده ای فاصله یک کیلومتر رادرجهت موافق باد رفته و درجهت مخالف باد برگشته است.اگر سرعت باد ۵ کیلومتر بر ساعت و مدت زمان رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چندکیلومتر بر ساعت است؟ (تجربی خارج۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳/۵ ۴) ۱۵

۴- اگر $۲a + \sqrt{۳a + ۱۶} = ۱$ باشد عدد $۴a + ۹$ کدام است؟(تجربی خارج۹۸)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

۵-به ازای کدام مقدار a، معادله $\frac{x-۲}{ax-۵} = \frac{a+۲}{x-۱} - ۱$، دارای جواب $x = ۳$ است؟(انسانی۹۸)

۱) $-۲ , \frac{۱}{۳}$ ۲) $۲ , -\frac{۱}{۳}$ ۳) $۱ , -\frac{۲}{۳}$ ۴) $۱ , \frac{۲}{۳}$

۶- به ازای کدام مقدار a، معادله $\frac{۴}{a-۲x} + \frac{a}{x+۱} = \frac{a}{x}$، دارای جواب $x = ۱$ است؟(انسانی خارج ۹۸)

۱) $-۴, ۲$ ۲) $-۲ , ۴$ ۳) $۲ , ۴$ ۴) $-۲ , ۳$

۷-بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می کند. اگر هر دو باهم کار کنند در ۲۰ ساعت این کار انجام می شود.بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می دهد؟(ریاضی۹۸)

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

۸- در معادله $x + \frac{۲x-۱}{x-۴} = -۲$ ریشه ها چگونه اند؟(انسانی۹۶)

۱)فقط یک جواب قابل قبول ۲) دو جواب وارون هم

۳)دو جواب مساوی هم ۴) دو جواب قرینه

۹-ریشه های معادله $\frac{x^۲+۱}{x+۴} - \frac{۱۱x-۱}{x+۴} + x = ۰$ چگونه اند؟(انسانی خارج۹۶)

۱) یک جواب مورد قبول ۲)دو جواب مساوی ۳) دو جواب قرینه ۴) دو جواب وارون هم

۱۰-حاصل ضرب ریشه های $\sqrt{x^۲ + ۴x + ۵} = x^۲ + ۴x + ۳$ کدام است ؟ (ریاضی۹۴)

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۱-یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده اند. با تبخیر چند کیلوگرم از این محلول، غلظت به ۵۰ درصد می رسد؟(ریاضی خارج۹۲)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

• پاسخ تشریحی سوالات امتحانی

۱- الف)

$$\frac{۳}{x} + \frac{۵}{x+۲} = ۲ \xrightarrow{\times x(x+۲)} ۳(x+۲) + ۵x = ۲x(x+۲)$$
$$\Rightarrow ۲x^۲ + ۴x - ۳x - ۶ - ۵x = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۴x - ۶ = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۱) = ۰ \Rightarrow x = ۳ , x = -۱$$

ب)

$$\frac{x}{x-۱} + \frac{۳}{x^۲-۱} = \frac{x-۲}{x+۱} \xrightarrow{\times(x-۱)(x+۱)} x(x+۱) + ۳ = (x-۱)(x-۲)$$
$$\Rightarrow x^۲ + x + ۳ = x^۲ - ۳x + ۲ \Rightarrow ۴x = -۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۴}$$

پ)

$$\frac{x^۲+۱}{x} + \frac{x}{x^۲+۱} = ۳ \xrightarrow{\times x(x^۲+۱)} (x^۲+۱)^۲ + x^۲ = ۳(x^۲+۱)$$
$$\Rightarrow x^۴ + ۲x^۲ + ۱ + x^۲ = ۳x^۲ + ۳ \Rightarrow x^۴ = ۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt[۴]{۲}$$

ت) با فرض $x^۲ - ۲x + ۲ = u$ داریم:

$$\frac{۱}{u} + \frac{۲}{u+۱} = \frac{۶}{u+۲} \xrightarrow{\times u(u+۱)(u+۲)} (u+۱)(u+۲) + ۲u(u+۲) = ۶u(u+۲)$$

$$\Rightarrow u^{۲}+۳u+۲+۲u^{۲}+۴u=۶u^{۲}+۱۲u\Rightarrow ۳u^{۲}+۵u-۲=۰$$

$$\Rightarrow (۳u-۱)(u+۲)=۰\Rightarrow u=\frac{۱}{۳}\ ,\qquad u=-۲$$

$$x^{۲}-۲x+۲=-۲\Rightarrow x^{۲}-۲x+۴=۰\Rightarrow (x-۲)^{۲}=۰\Rightarrow x=۲$$

$$x^{۲}-۲x+۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳x^{۲}-۶x+۵=۰\Rightarrow \Delta<۰\Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد}$$

ث)

$$\sqrt{x+1}=x-1\xrightarrow{\text{به توان دو}}x+۱=x^{۲}-۲x+۱\Rightarrow x^{۲}-۳x=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{غیر قابل قبول}\\ x=۳\end{cases}$$

ج)

$$\sqrt{۲x+۱}=۱+\sqrt{۲x-۴}\xrightarrow{\text{به توان دو}}۲x+۱=۱+۲x-۴+۲\sqrt{۲x-۴}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۲x-۴}=۴\Rightarrow \sqrt{۲x-۴}=۲\Rightarrow ۲x-۴=۴\Rightarrow ۲x=۸\Rightarrow x=۴$$

چ)

$$\sqrt{x+۴}=۱+\sqrt{۲x-۶}\xrightarrow{\text{به توان دو}}x+۴=۱+۲x-۶+۲\sqrt{۲x-۶}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۲x-۶}=۹-x\xrightarrow{\text{به توان دو}}۴(۲x-۶)=۸۱-۱۸x+x^{۲}$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۲۶x+۱۰۵=۰\Rightarrow (x-۵)(x-۲۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲۱ & \text{غیر قابل قبول}\\ x=۵\end{cases}$$

۲- اگر دو کارگر کار را با هم در ۶ روز انجام دهند پس در یک روز $\frac{۱}{۶}$ کار را انجام خواهند داد.

همچنین اگر کارگر A کار را به تنهایی در x روز انجام دهد پس در یک روز $\frac{۱}{x}$ کار را انجام خواهد داد:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۵}=\frac{۱}{۶}$$

$$\xrightarrow{\times ۶x(x+۵)}۶(x+۵)+۶x=x(x+۵)\Rightarrow x^{۲}+۵x=۱۲x+۳۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۷x-۳۰=۰\Rightarrow (x-۱۰)(x+۳)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-۳ & \text{غیر قابل قبول}\\ x=۱۰\end{cases}$$

پس کارگر A کار را به تنهایی در ۱۰ روز انجام می دهد و کارگر B کار را به تنهایی در ۱۵ روز انجام خواهد داد.

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل اول هندسهٔ تحلیلی و جبر درس سوم «معادلات گویا و معادلات رادیکالی» نام طراح: جواد عسگری

-۳ $x = ۴ \Longrightarrow ۴ + a = \sqrt{۲۰ - ۱۶} \Longrightarrow a = ۲ - ۴ = -۲$

$$x - ۲ = \sqrt{۵x - x^۲} \xrightarrow{\text{به توان دو}} x^۲ - ۴x + ۴ = ۵x - x^۲$$

$$\Longrightarrow ۲x^۲ - ۹x + ۴ = ۰ \ , \Delta = ۸۱ - ۳۲ = ۴۹$$

$$x = \frac{۹ \pm ۷}{۴} \Longrightarrow \mathrm{x} = ۴ \ , \mathrm{x} = \frac{۱}{۲}$$

-۴ در معادله $\sqrt{۲x + ۱} + \sqrt{x - ۳} + ۲ = ۰$ دو رادیکال همیشه نامنفی هستند که با عدد۲ جمع شوند حاصل عددی مثبت می شود و هیچ وقت صفر نخواهد شد.پس معادله جواب ندارد.

منابع استفاده شده:

۱- کتاب درسی ریاضی ۲ چاپ پنجم ۱۴۰۰.

۲- کتاب معلم ریاضی (۲)پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه چاپ اول ۱۳۹۶

۳-جبر، حساب و آنالیز نویسنده : احمد قندهاری انتشارات مدرسه چاپ : پنجم ۱۳۷۸

محتوای نوشتاری **کتاب ریاضی(۲)** **سال تحصیلی** **۱۴۰۰–۱۴۰۱**	**به نام خدا** **اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی** **معاونت آموزش متوسطه** **اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی** **گروه ریاضی**	**فصل دوم** **هندسه** **درس اول «ترسیم های هندسی »** **نام طراح: جواد عسگری**

اهداف یادگیری:

- توانایی رسم مثلث، با مشخص بودن اندازه سه ضلع آن
- توانایی رسم عمود منصف یک پاره خط
- درک خاصیت مشترک همه نقاط واقع بر عمود منصف یک پاره خط(یکسان بودن فاصله شان از دو سر پاره خط)
- توانایی رسم نیمساز یک زاویه
- درک خاصیت مشترک همه نقاط واقع بر نیمساز یک زاویه(یکسان بودن فاصله شان از دو ضلع زاویه)
- توانایی رسم خط موازی با یک خط داده شده، از نقطه ای خارج آن خط
- توانایی رسم خط عمود بر یک خط داده شده، از نقطه ای غیرواقع بر آن خط
- توانایی رسم خط عمود بر یک خط داده شده، از نقطه ای واقع بر آن خط

انتظارات پس از مطالعه:

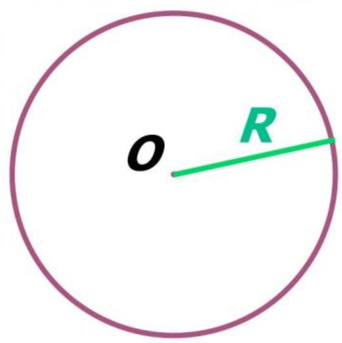
-بتواند مثلثی را با مشخص بودن اندازه سه ضلع آن رسم کنید.

- بتواند از ویژگی های عمودمنصف یک پاره خط و یا نیمساز یک زاویه در حل مسائل استفاده کند.

-بتواند از یک نقطه خط عمود بر یک خط رسم کند.

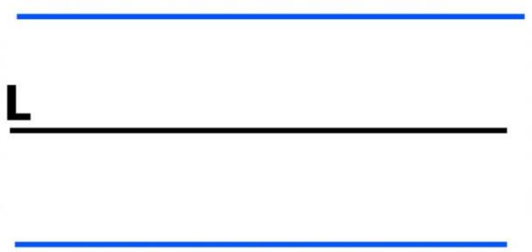
- بتواند از یک نقطه خط موازی یک خط دیگر رسم کند.

ترسیم های هندسی



دایره: مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله شان از نقطه ثابتی واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد .نقطه ثابت مرکز دایره ومقدار ثابت اندازه شعاع دایره نامیده می شود.

نکته:برای پیدا کردن نقطه یا نقاط به فاصله معلوم از نقطه O ، دایره ای به مرکز نقطه O و به شعاع فاصله معلوم رسم می کنیم

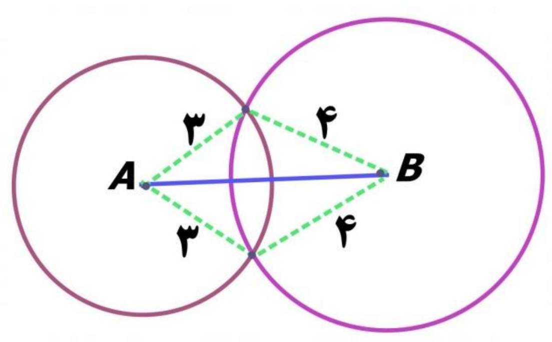


دو خط موازی با یک خط: مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله آن نقاط از خط معلوم L برابر باشند دو خط موازی و در دو طرف خط L می باشد

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس اول «ترسیم های هندسی » نام طراح: جواد عسگری

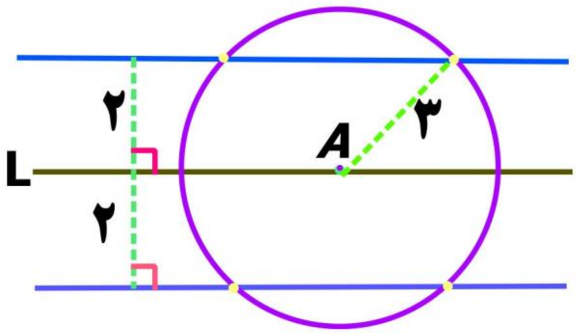
مثال: پاره خط AB به طول ۵ سانتی متر داده است.چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصله آن نقاط از نقطه A ۳ سانتی متر و از نقطه B ، ۴ سانتی متر باشد.

راه حل: دایره ای به مرکز A و به شعاع ۳ سانتی متر همچنین دایره دیگری به مرکز B و به شعاع ۴ سانتی متر رسم می کنیم این دو دایره همدیگر را در دو نقطه قطع می کنند که آن دو نقطه جواب مسئله هستند.



مثال: نقطه A روی خط L داده شده است. چند نقطه در صفحه وجود دارند که فاصله آن نقاط از نقطه A برابر ۳ و از خط L برابر ۲ باشد؟

راه حل:نقاطی از صفحه که فاصله آن نقاط از نقطه A برابر ۳ باشد دایره ای به مرکز A و به شعاع ۳می باشد همچنین نقاطی از صفحه که فاصله آن نقاط از خط L برابر ۲ باشد دو خط موازی به فاصله ۲ و در دو طرف خط L می باشد این دو خط دایره را در ۴ نقطه قطع می کند که این ۴ نقطه جواب مسئله هستند.



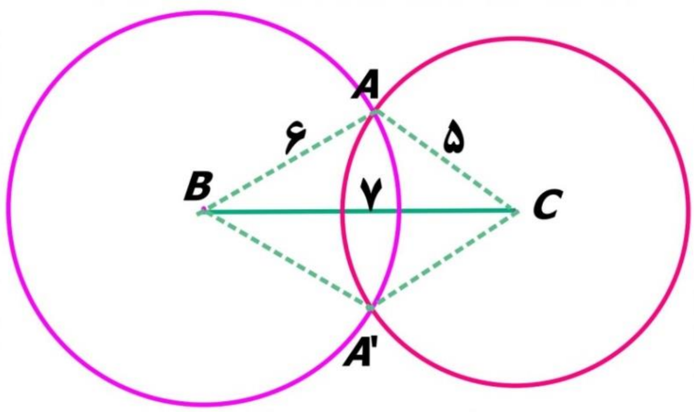
نکته(نامساوی مثلثی) : اگر a ، b و c سه عدد حقیقی باشند بطوریکه $a < b + c\ ,b < a + c\ ,c < a + b$ آنگاه مثلثی وجود دارد که این سه عدد طول های اضلاع آن مثلث هستند.

رسم یک مثلث با معلوم بودن طول سه ضلع آن :

مثال:مثلثی رسم کنید که طول اضلاع آن ۵ ، ۶ و ۷ باشد.

راه حل: چون این سه عدد در نامساوی مثلثی صدق می کند پس چنین مثلثی را می توان رسم کرد.

برای رسم ابتدا پاره خط BC را به طول ۷ رسم می کنیم سپس دایره یا کمانی به مرکز B و به شعاع ۶ سانتی متر همچنین دایره یا کمان دیگری به مرکز C و به شعاع ۵ سانتی متر رسم می کنیم این دو دایره همدیگر را در نقطه A قطع می کند تا مثلث ABC بدست آید.(دو دایره همدیگر را در دو نقطه قطع می کند ولی چون دو مثلث بدست آمده هم نهشت هستند پس فقط یک جواب داریم)

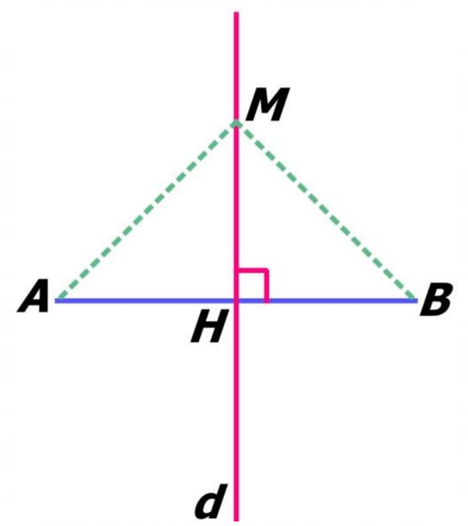


محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس اول «ترسیم های هندسی » نام طراح: جواد عسگری

عمودمنصف یک پاره خط :عمودمنصف پاره خط AB خطی است که در وسط پاره خط AB بر آن پاره خط عمود باشد.

ویژگی عمودمنصف یک پاره خط:

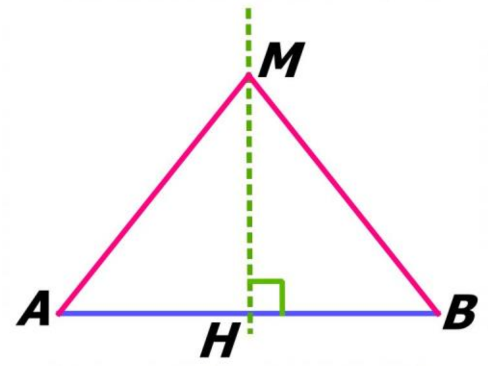
۱)هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط ، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله می باشد.



اثبات: فرض کنید نقطه M روی خط d عمودمنصف پاره خط AB باشد با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{array}{r} AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ MH = MH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta MAH \cong \Delta MBH \Longrightarrow MA = MB$$

۲) هر نقطه از صفحه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

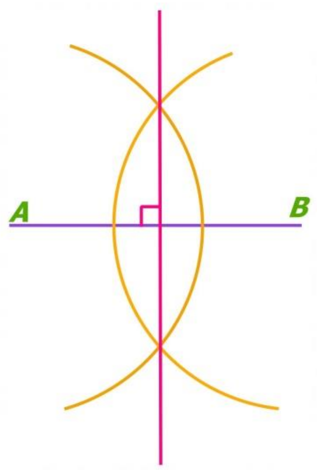


فرض کنید نقطه دلخواه M درصفحه طوری قرار دارد که فاصله اش از دو سر پاره خط AB برابر باشد $MA = MB$

از M خطی عمود بر پاره خط AB رسم کرده تا آن را درنقطه H قطع کند پس داریم

$$\left.\begin{array}{r} AM = MB \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ MH = MH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{و ض}} \Delta MAH \cong \Delta MBH \Longrightarrow AH = BH$$

روش رسم عمودمنصف پاره خط AB:

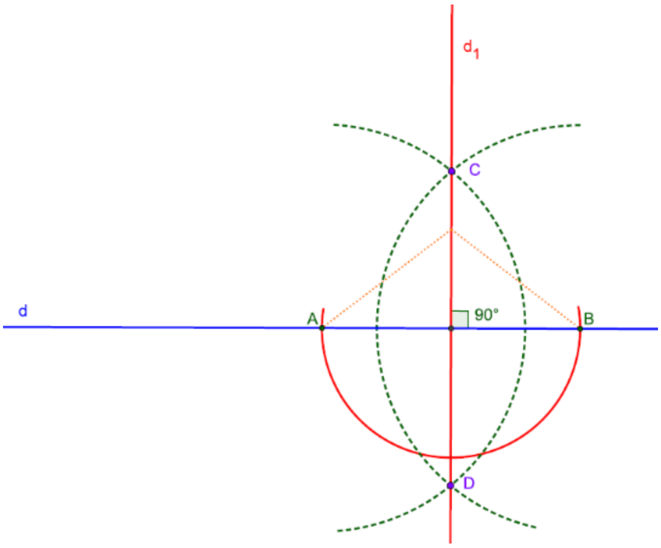


دهانه پرگار به اندازه بیشتر از نصف پاره خط AB باز کرده دایره ای به مرکز A و با همان شعاع دایره دیگری به مرکز B رسم می کنیم تا همدیگر را در دو نقطه قطع کنند این دو نقطه را به همدیگر رسم کرده و امتداد می دهیم تا عمودمنصف پاره خط AB بدست آید.چون این دو نقطه از دوسر پاره خط AB فاصله شان برابر است.

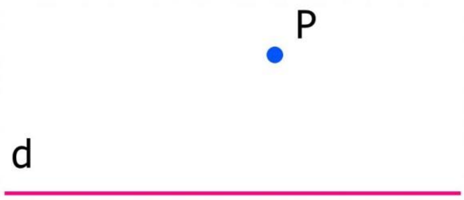
محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس اول «ترسیم های هندسی » نام طراح: جواد عسگری

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه ای روی آن

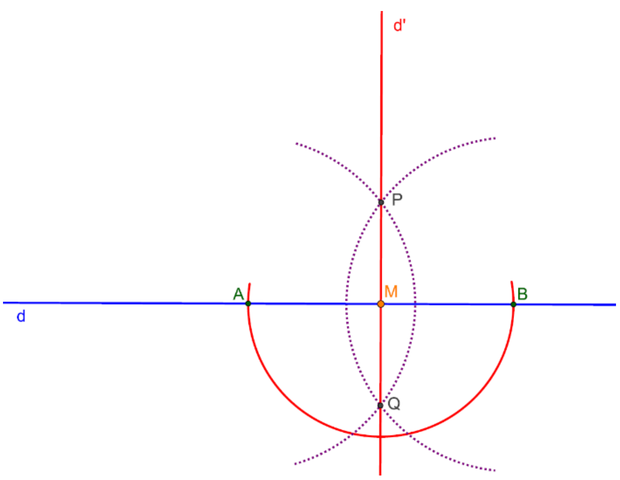
خط d و نقطه M روی آن مانند شکل مشخص شده اند.
می خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد
و بر خط d عمود باشد. به مرکز M و به شعاع دلخواه کمانی
می زنیم تا خط d را در دو نقطه A و B قطع کند$(MA = MB)$
عمودمنصف پاره خط AB را رسم می کنیم
چون M وسط پاره خط AB است
پس عمودمنصف پاره خط AB همان خطی است
که در نقطه M بر خط d عمود رسم شده است.



رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه ای غیر واقع بر آن



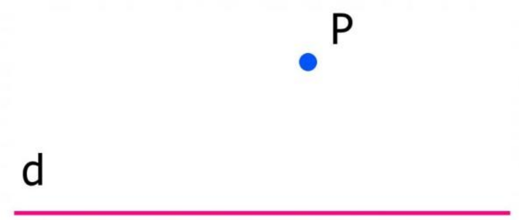
خط d و نقطه P مانند شکل مشخص شده اند. می خواهیم خطی رسم کنیم که از P بگذرد
و بر خط d عمود باشد.
به مرکز P و به شعاع بیشتر از فاصله نقطه P تا خط dکمان یا دایره ای رسم می کنیم
تا خط dرا در دو نقطه A و B قطع کند$(PA = PB)$ عمودمنصف پاره خط AB را
رسم می کنیم چون P روی عمودمنصف پاره خط AB است
پس عمودمنصف پاره خط AB همان خطی است که در نقطه P بر خط d
عمود رسم شده است.



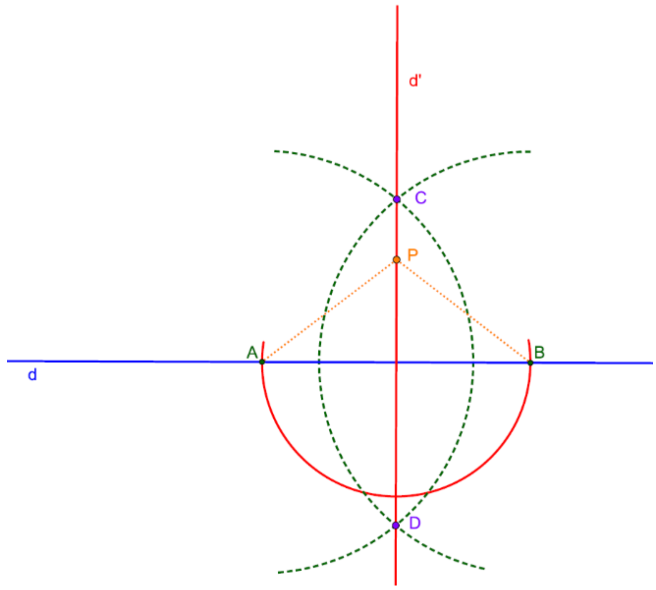
محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل دوم
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسه
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس اول «ترسیم های هندسی »
۱۴۰۰–۱۴۰۱	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	نام طراح: جواد عسگری
	گروه ریاضی	

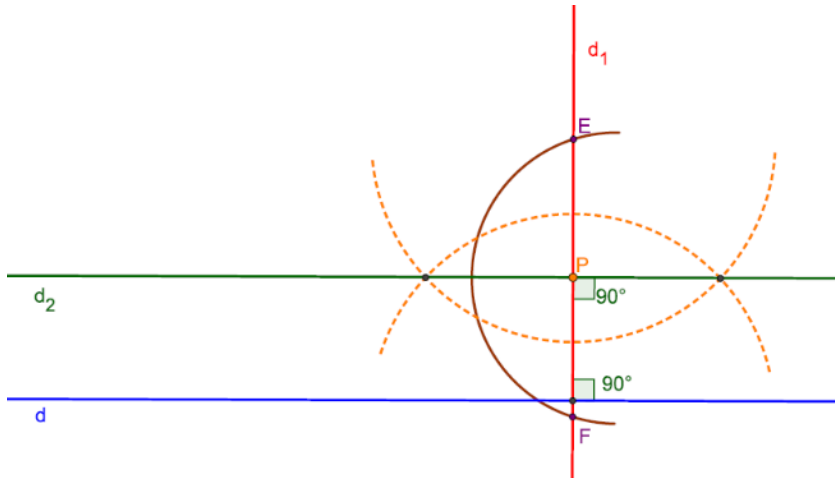
رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطه P مانند شکل مشخص شده اند. میخواهیم خطی رسم کنیم که از P بگذرد و با خط d موازی باشد



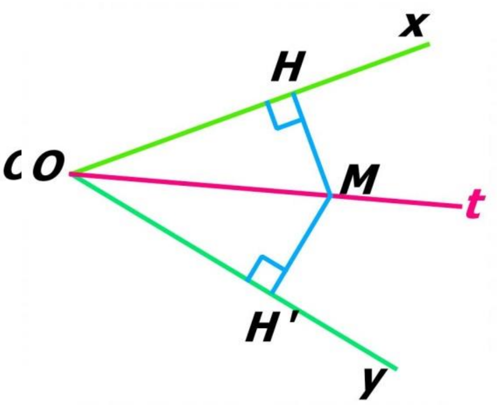
به روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه خارج آن ، از نقطه P خط d_1 را بر خط d عمود رسم می کنیم
همچنین به روش رسم خط عمودبر یک خط از نقطه.
روی آن خط، از نقطه P خط d_2 راعمود بر خط d_1 رسم می کنیم.چون دو خط عمود بر یک خط باهم موازی هستند.پس خط d_2 با خط d موازی است.





محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس اول «ترسیم های هندسی » نام طراح: جواد عسگری

ویژگی نیمساز یک زاویه:



۱) هر نقطه روی نیمسازیک زاویه ، فاصله اش از دو ضلع آن زاویه برابر می باشد.

اثبات: فرض کنید Ot نیمساز زاویه xOy و M نقطه دلخواهی روی Ot باشد.
دراینصورت:

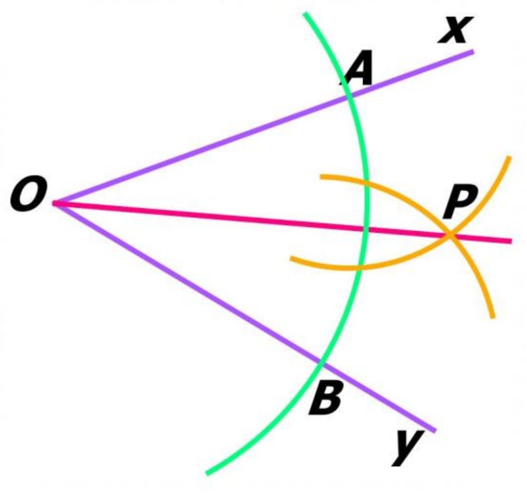
$$\left.\begin{array}{c}\widehat{O_۱}=\widehat{O_۲}\\ \widehat{H}=\widehat{H'}\\ OM=OM\end{array}\right\}\overset{\text{وز}}{\Rightarrow}\Delta OMH\cong\Delta OMH'\Longrightarrow MH=MH'$$

۲) اگر نقطه ای از صفحه فاصله اش از دو ضلع یک زاویه برابر باشد آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد

اثبات: فرض کنید نقطه دلخواه M درصفحه طوری قرار دارد که فاصله اش از دو ضلع زاویه xOy برابر باشد یعنی $MH=MH'$
M را به O وصل می کنیم دراینصورت:

$$\left.\begin{array}{c}MH=MH'\\ \widehat{H}=\widehat{H'}\\ OM=OM\end{array}\right\}\overset{\text{وض}}{\Longrightarrow}\Delta OMH\cong\Delta OMH'\Longrightarrow\widehat{O_۱}=\widehat{O_۲}$$

روش رسم نیمساز زاویه xOy:

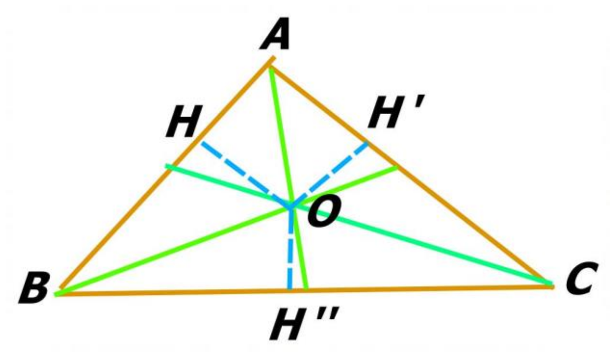


به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی می زنیم تا اضلاع زاویه را در نقاط A و B قطع کند به مرکز های A و B کمان هایی با شعاع برابر می زنیم تا همدیگر را در نقطه ای مانند P قطع کند O را به P وصل می کنیم OP نیمساز مورد نظر می باشد.چون فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه برابر می باشد.

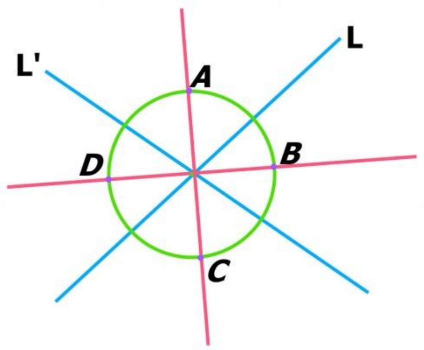
محتوای نوشتاری **کتاب ریاضی(۲)** **سال تحصیلی** **۱۴۰۰–۱۴۰۱**	**به نام خدا** **اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی** **معاونت آموزش متوسطه** **اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی** **گروه ریاضی**	**فصل دوم** **هندسه** **درس اول «ترسیم های هندسی »** **نام طراح: جواد عسگری**

مثال: چند نقطه در داخل مثلث ABC وجود دارد که فاصله اش از سه ضلع مثلث به یک اندازه باشد؟

راه حل : نیمساز های زاویه های داخلی هر مثلث در داخل مثلث همرسند پس این نقطه فاصله اش از سه ضلع مثلث برابر است درنتیجه فقط یک نقطه وجود دارد.



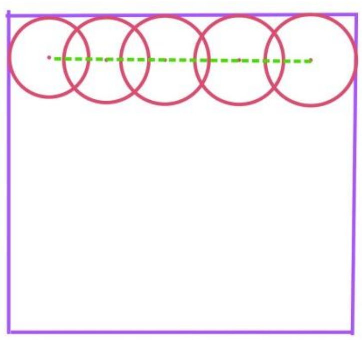
تست: دو خط متقاطع مفروضند. چند نقطه وجود دارد که از این دو خط به یک فاصله اند و از نقطه تقاطع دو خط به فاصله ۲ سانتی متر قرار دارد؟



۱(۱ ۲ (۲ ۳ (۳ ۴ (۴

راه حل: نقاطی از صفحه که فاصله آن نقاط از دو خط متقاطع L و L' برابر باشد روی نیمساز زاویه بین آن دو خط قرار دارند از طرفی برای اینکه از نقطه تقاطع فاصله شان ۲ باشد دایره ای به مرکز نقطه تقاطع و به شعاع ۲ می زنیم تا نیمسازها را در ۴ نقطه A, B, C, Dقطع کند که این ۴ نقطه جواب سوال می باشد.

تست:سکه ای به شعاع a را درون مربعی به ضلع ۱۰ پرتاب می کنیم همه نقاطی درون مربع که اگر مرکز سکه در آن جا قرار گیرد سکه کاملاً درون مربع واقع می شود، دارای مساحتی برابر با ۲۵ است. a کدام است؟



۲/۵(۱ ۵ (۲ ۷/۵ (۳ (۴ ۱/۲۵

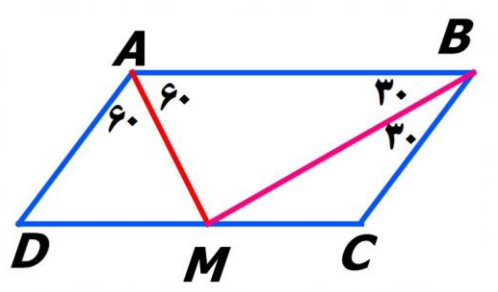
راه حل: برای اینکه سکه کاملاً درون مربع واقع می شود باید بر ضلع مربع مماس باشد با توجه به شکل مرکز های سکه داخل مربعی به ضلع $۱۰ - ۲a$ قرار می گیرد پس

$(۱۰ - ۲a)^۲ = ۲۵ \to ۱۰ - ۲a = ۵ \to a = ۲/۵$ و جواب گزینه ۱ است.

فصل دوم هندسه درس اول «ترسیم های هندسی » نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱

تست:در یک متوازی الاضلاع با زاویه ۶۰ درجه ، نمیسازهای دو زاویه مجاور ضلع بزرگ ، روی ضلع دیگر آن متقاطع اند. اگر محیط این متوازی الاضلاع $۱۲\sqrt{۳}$ باشد مساحت آن کدام است؟(تجربی۹۷)

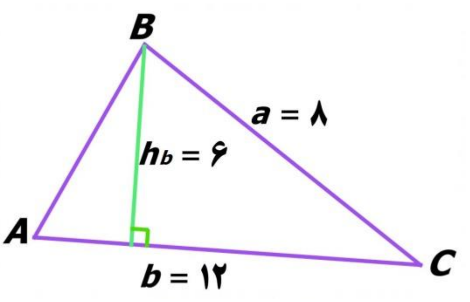
۱) $۹\sqrt{۳}$ ۲) ۱۸ ۳) $۱۲\sqrt{۳}$ ۴) $۱۸\sqrt{۳}$



راه حل: با توجه به معلومات مسئله نیمسازهای زاویه های A و B همدیگر را در نقطه M روی ضلع CD قطع می کنند پس $\widehat{M} = ۹۰$ و اگر $AD = x$ دراینصورت $AM = x$ و چون ضلع روبرو به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است پس $AB = ۲x$ لذا $۶x = ۱۲\sqrt{۳}$ و $x = ۲\sqrt{۳}$ پس $S = ۲\sqrt{۳} \times ۴\sqrt{۳} \times sin۶۰ = ۱۲\sqrt{۳}$

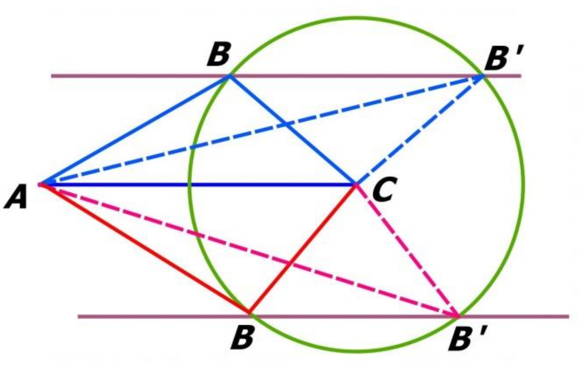
تست: در رسم مثلث ABC با معلوم بودن $a = ۸$ ، $b = ۱۲$ و $h_b = ۶$ چند جواب متمایز وجود دارد؟

۱)صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲



راه حل: فرض می کنیم مسئله حل شده و مثلث ABC جواب است.

برای رسم ابتدا پاره خط AC را به اندازه ۱۲ رسم می کنیم دو خط موازی AC و در دو طرف آن و به اندازه ۶ رسم کرده سپس به مرکز C و به شعاع ۸ دایره ای رسم می کنیم تا خط های موازی را در ۴نقطه قطع کند که همان نقطه B می باشد چون این چهار مثلث دو به دو هم نهشت هستند پس ۲ جواب متمایز وجود دارد.



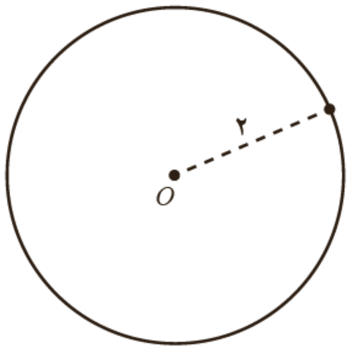
محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس اول «ترسیم های هندسی » نام طراح: جواد عسگری

پاسخ فعالیت ها، کاردر کلاس ها و تمرینات کتاب:

•فعالیت صفحه ۲۶ کتاب درسی

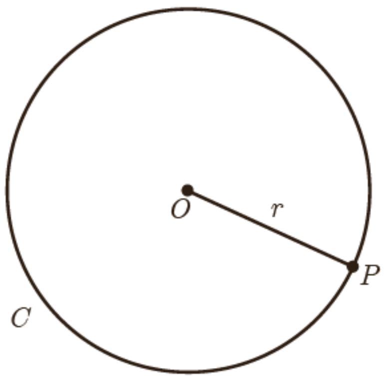
۱-یک نقطه ثابت در صفحه، مانند O را درنظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصله ثابت ۲ سانتی متر از آن هستند درنظر بگیرید .این نقاط چه شکلی را تشکیل می دهند؟

دایره ای به شعاع۲ سانتی متر



۲- یک دایره به مرکزO و به شعاع۲ سانتی متر بکشید و یک نقطه دلخواه روی آن درنظر بگیرید .فاصله این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟

دو سانتی متر است



نتیجه: دایره $C(O,r)$ (بخوانید دایره C به مرکز O و به شعاع r) را درنظر بگیرید .هر نقطه که از نقطه O به فاصله r باشد روی دایره قرار دارد و هر نقطه که روی دایره قرار دارد از نقطه O به فاصله r است.

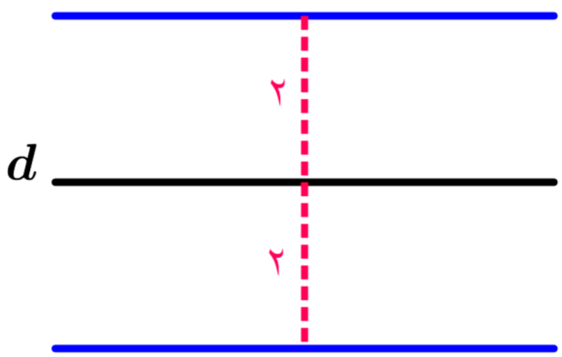
۳- مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد، یک بار برای نقاط داخل دایره و یک بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به دست آورید.

در دایره $C(O,r)$ ، هر نقطه که فاصله آن از نقطه O کمتر از r باشد درون دایره قرار دارد و هر نقطه که درون دایره قرار دارد فاصله اش از نقطه O کمتر از r است.

همچنین در دایره $C(O,r)$ ، هر نقطه که فاصله آن از نقطه O بیشتر از r باشد بیرون دایره قرار دارد و هر نقطه که بیرون دایره قرار دارد فاصله اش از نقطه O بیشتر از r است.

۴-خطی مانند d درنظر بگیرید .تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از خط d هستند. مشخص کنید .این نقاط چه شکلی یا شکل هایی را تشکیل می دهند؟

دوخط موازی d و به فاصله ۲ سانتی متر از خط d



محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس اول «ترسیم های هندسی » نام طراح: جواد عسگری

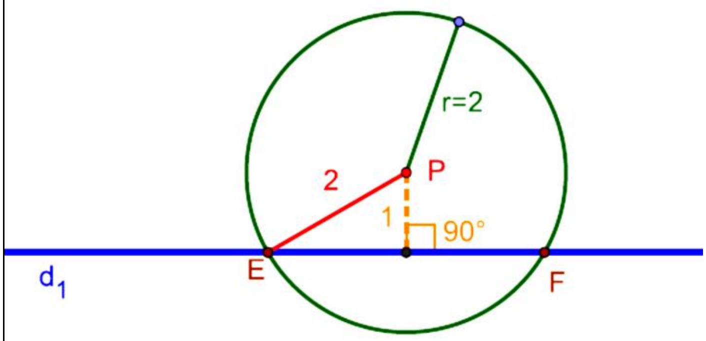
۵-نقطه P به فاصله ۱ سانتی متر از خط d_1 قرار دارد.

الف)تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید .

برای مشخص کردن این نقاط با توجه به نتیجه ی بند ۲ این فعالیت کافی است دایره ای به شعاع ۲ سانتی متر به مرکز P رسم کنیم.

ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

محل برخورد این دایره با خط d_1 یعنی نقاط E و F جواب این مسئله هستند.



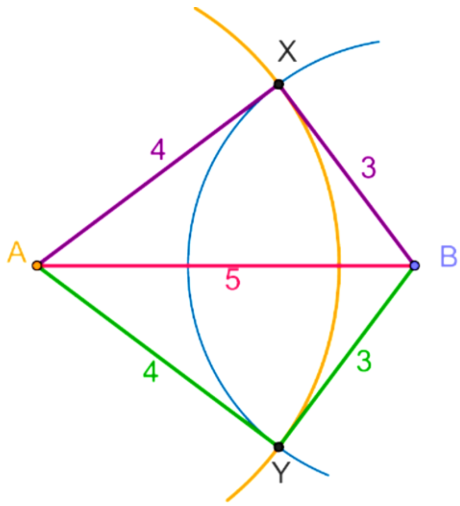
۶-نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم درنظر بگیرید .به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و و به شعاع ۳ سانتی متر کمانی دیگر رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند .

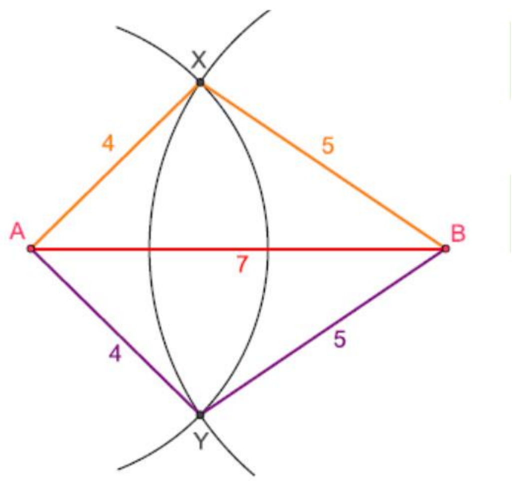
الف)اندازه اضلاع مثلث های AXB و AYB را مشخص کنید.

اضلاع مثلث روی شکل نمایش داده شده اند.

ب)توضیح دهید که چگونه می توانید مثلثی به طول ضلع های داده شده ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.

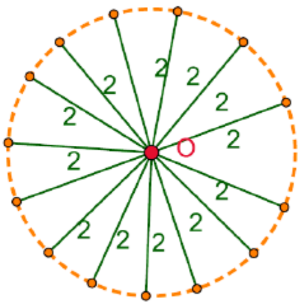
ابتدا پاره خط AB به طول ۷ سانتی متر رسم می کنیم.سپس به مرکز A (B) دایره ای به شعاع ۵ سانتی متر و به مرکز B (A) دایره دیگری به مرکز ۴ سانتی متر رسم می کنیم این دو دایره یکدیگر را در نقاط X و Y قطع می کنند . از این دو نقطه به دو سر پاره خط AB وصل می کنیم مثلث های AXB و AYB جواب مسئله هستند .





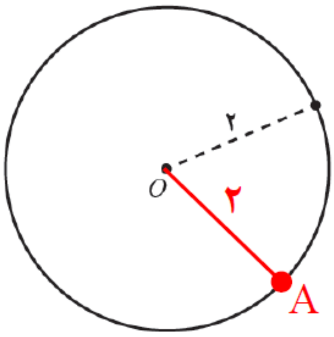
محتوای نوشتاری **کتاب ریاضی(۲)** **سال تحصیلی** **۱۴۰۰–۱۴۰۱**	**به نام خدا** **اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی** **معاونت آموزش متوسطه** **اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی** **گروه ریاضی**	**فصل دوم** **هندسه** **درس اول «ترسیم های هندسی »** **نام طراح: جواد عسگری**

•فعالیت صفحه ۲۶ کتاب درسی



۱-یک نقطه ثابت در صفحه، مانند O را درنظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصله ثابت ۲ سانتی متر از آن هستند درنظر بگیرید .این نقاط چه شکلی را تشکیل می دهند؟

دایره ای به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر

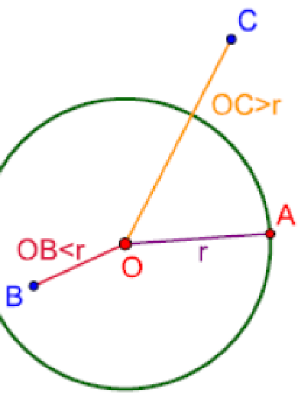


۲- یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر بکشید و یک نقطه دلخواه روی آن درنظر بگیرید . فاصله این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟

۲ سانتی متر

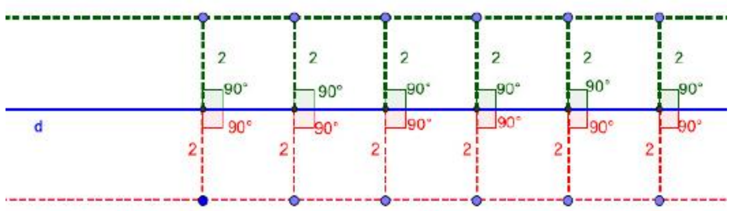
نتیجه :دایره $C(O,r)$ (بخوانید دایره ای به مرکز O و به شعاع r) را درنظر بگیرید .هر نقطه که از نقطه O به فاصله r روی دایره قرار دارد و هر نقطه که روی دایره قرار دارد از نقطه O به فاصله r است.

۳- مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد، یک بار برای نقاط داخل دایره و یک بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به دست آورید.



یک دایره به شعاع ۲ سانتی متر به مرکز O در صفحه داریم اگر نقاطی در صفحه را به دست آوریم که فاصلهٔ آن ها از مرکز دایره کمتر از ۲ سانتی متر باشند بی شمار دایره به مرکز O داریم که درون دایرهٔ مفروض قرار دارندو در واقع تمام نقاطی که درون دایره هستند ، فاصله شان از مرکز دایره کمتر از ۲ سانتی متر است . اگر نقاطی در صفحه را به دست آوریم که فاصلهٔ آن ها از مرکز این دایره بیش از ۲ سانتی متر باشد باز بی شمار دایره به مرکز O داریم که شعاع آن ها بیشتر از ۲ خواهد بود و این نقاط بیرون دایره قرار دارند.

در حالت کلی اگر فاصله ی هر نقطه در صفحه ی دایره$C(O,r)$ از مرکز دایره کمتر از r باشد نقطه درون دایره است و اگر این فاصله بیشتر از r باشد این نقطه بیرون دایره است.



۴- خطی مانند d درنظر بگیرید .تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از خط d هستند مشخص کنید .این نقاط چه شکلی یا شکل هایی را تشکیل می دهند؟

این نقاط به صورت دو خط موازی در دو طرف خط d قرار دارند.

محتوای نوشتاری **کتاب ریاضی(۲)** **سال تحصیلی** **۱۴۰۰–۱۴۰۱**	**به نام خدا** **اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی** **معاونت آموزش متوسطه** **اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی** **گروه ریاضی**	**فصل دوم** **هندسه** **درس اول «ترسیم های هندسی »** **نام طراح: جواد عسگری**

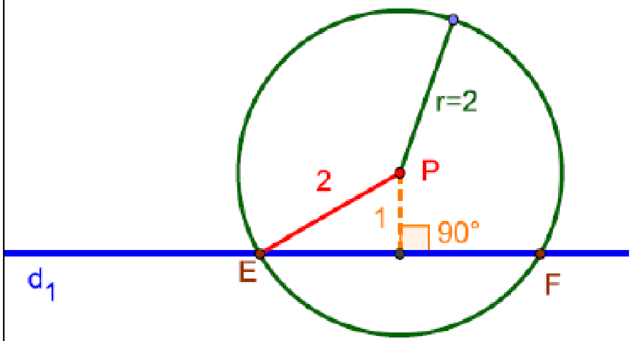
۵- نقطه P به فاصله ۱ سانتی متر از خط d_1 قرار دارد .

الف) تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

برای مشخص کردن این نقاط با توجه به نتیجه ی بند ۲ این فعالیت کافی است دایره ای به شعاع ۲ سانتی متر و به مرکز p رسم کنیم.

ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

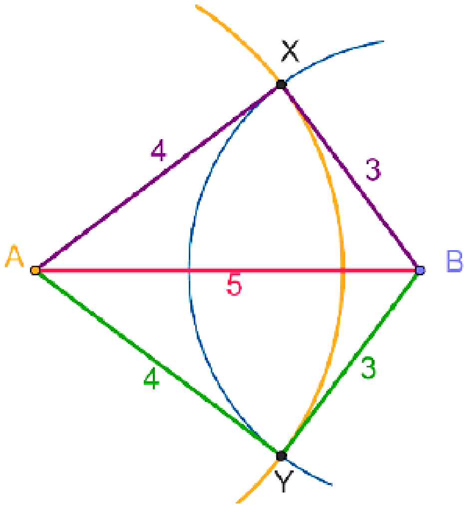
محل برخورد این دایره با خط d_1 یعنی نقاط E و F جواب این مسئله هستند.



۶- نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم درنظر بگیرید .به مرکز A و و به شعاع ۴ سانتی متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی متر کمانی دیگر رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند .

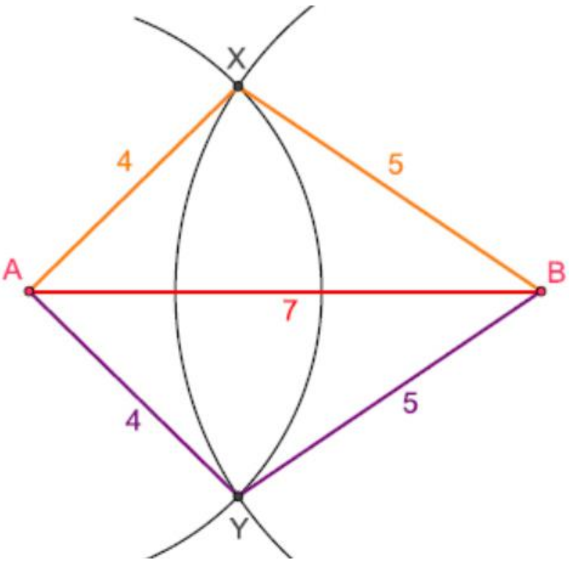
الف)اندازه اضلاع مثلث های AXB و AYB را مشخص کنید.

اضلاع مثلث روی شکل نمایش داده شده اند.



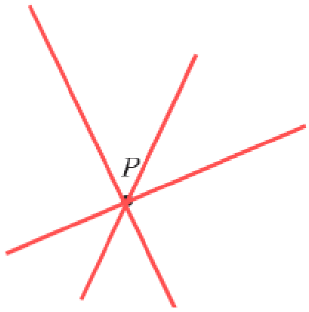
ب)توضیح دهید که چگونه می توانید مثلثی به طول ضلع های داده شده ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.

ابتدا پاره خطی به طول ۷ سانتی متر به نام AB رسم می کنیم . سپس به مرکز A (B) دایره ای به شعاع ۴ سانتی متر و دایره ای به مرکز B (A) به شعاع ۵ سانتی متر رسم می کنیم .این دو دایره یکدیگر را در نقاط X و Y قطع می کنند . از این دو نقطه به دو سر پاره خط AB وصل می کنیم مثلث های AXB و AYB جواب مسئله هستند.



فصل دوم هندسه درس اول «ترسیم های هندسی » نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱

•فعالیت صفحه ۲۷ کتاب درسی



۱- نقطهٔ P در صفحه مشخص شده است. چند خط می توانید بکشید که از نقطهٔ P عبور نمایند؟

بی شمار خط از نقطه ی P می توان رسم کرد.

۲- دو نقطهٔ B , A در صفحه مشخص شده اند. چند خط متمایز می توانید بکشید که از هر دو نقطهٔ B , A عبور نمایند.

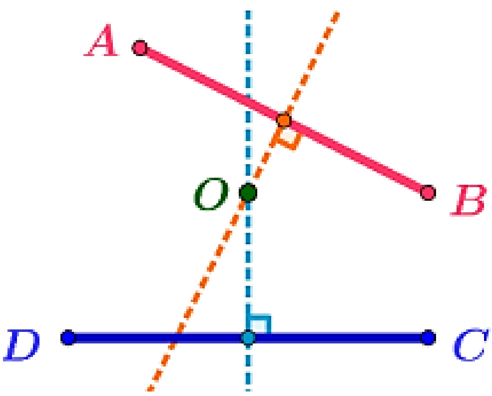
بی شمار خط می توان رسم کرد که بر هم منطبق می شوند و ما آن ها را یکی در نظر می گیریم.

۳- به نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن را باید داشته باشیم؟

برای مشخص شدن یک خط کافی است دو نقطه از آن خط را داشته باشیم.

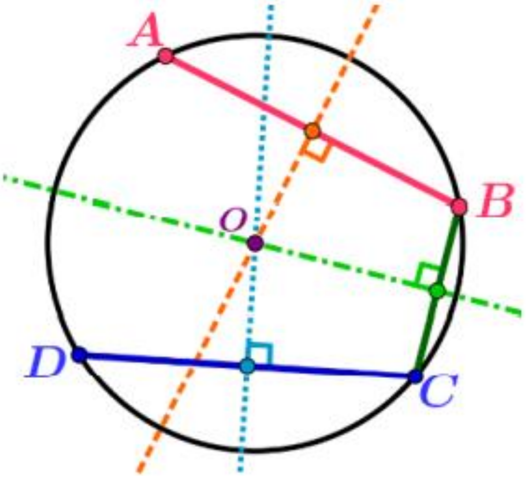
• پاسخ تمرینات صفحه ۲۹ و ۳۰ کتاب

۱- الف) دو پاره خط AB و CD مطابق شکل داده شده اند. نقطه ای بیابید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه D و C نیز به یک فاصله باشد.



ب) نقطه موردنظر در قسمت (الف) را O میناميم. اگر نقطه O روی عمود منصف پاره خط BCباشد و G دایرهای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأسهای چهارضلعی ABCD نسبت به دایره G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

جواب: الف) نقطه ی مورد نظر محل برخورد عمود منصف پاره خط های ABوCD است.



ب) چهار نقطه A, B, C, D روی دایره G قرار خواهند داشت. زیرا:

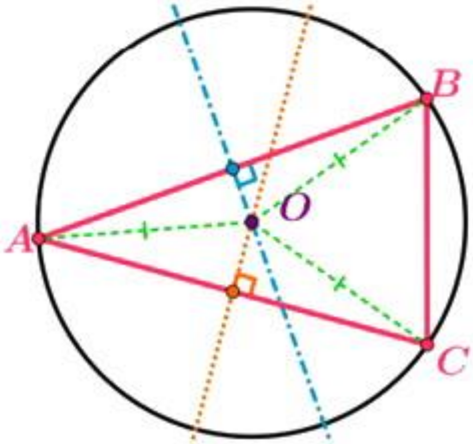
O روی عمودمنصف AB است پس : $OA = OB$ (۱)

O روی عمودمنصف BC است پس : $OB = OC$ (۲)

O روی عمودمنصف CD است پس : $OC = OD$ (۳)

پس طبق روابط (۱) ، (۲) و (۳) خواهیم داشت: $OA = OB = OC = OD$

و چون OA شعاع دایره است پس حتما ۴ نقطه روی دایره G خواهند بود.



۲- مثلثی دلخواه رسم کنید و آنرا ABC بنامید. عمودمنصف های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید .نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

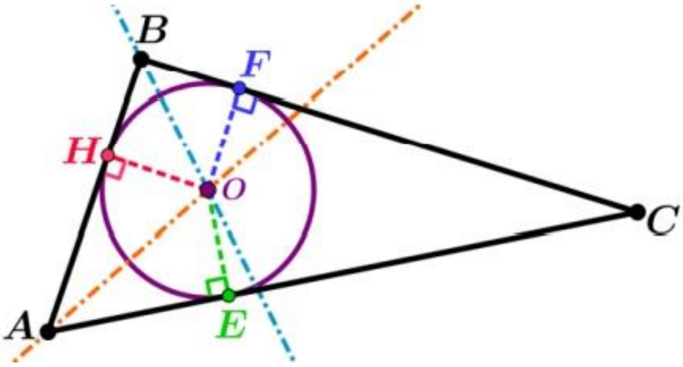
O روی عمودمنصف AB است پس : $OA = OB$ (۱)

O روی عمودمنصف BC است پس : $OB = OC$ (۲)

پس طبق روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت: $OA = OB = OC$

و چون OA شعاع دایره است پس حتما ۳نقطه روی دایره خواهند بود.

۳- مثلثی دلخواه رسم کنید و آنرا ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. نقطه کنید و نقطه از به مرکز O و به شعاع OHدایره ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



چون O روی نیمساز زاویه $\hat{A}$ است پس : $OH = OE$ (۱)

چون O روی نیمساز زاویه $\hat{B}$ است پس : $OH = OF$ (۲)

پس طبق روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت: $OH = OE = OF$

و چون OH شعاع دایره است پس حتما ۳نقطه H ، E و Fروی دایره خواهند بود.

در نتیجه اضلاع مثلث ABC مماس بر دایره هستند.

محتوای نوشتاری **کتاب ریاضی(۲)** **سال تحصیلی** **۱۴۰۰–۱۴۰۱**	**به نام خدا** **اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی** **معاونت آموزش متوسطه** **اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی** **گروه ریاضی**	**فصل دوم** **هندسه** **درس اول «ترسیم های هندسی »** **نام طراح: جواد عسگری**

۴- فرض کنید نقطه A به فاصله ۴سانتیمتر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلثهای زیر را توضیح دهید .

الف) مثلثی متساوی الساقین که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.

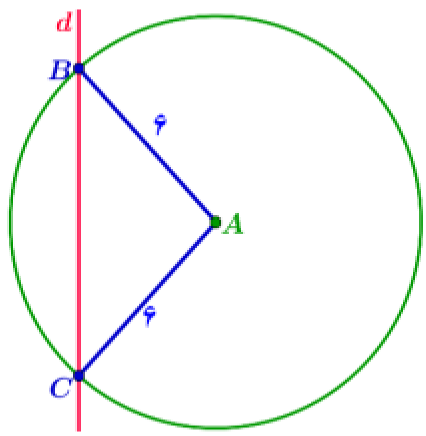
ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتیمتر باشد.

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $۸cm^۲$ باشد.

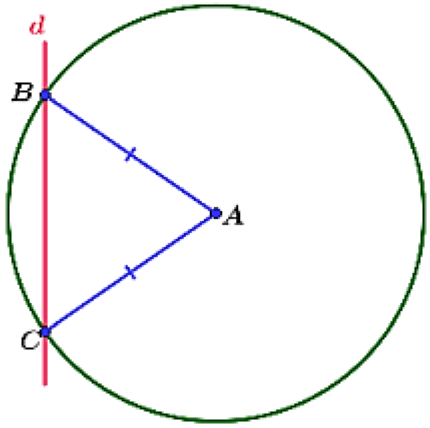
جواب:

الف) دایره ای به مرکز A و به شعاع r (بیشتر از۴) محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس های مثلث است زیرا:
$AB = AC = r$

ب) دایره ای به مرکز A و به شعاع $r = ۶$ محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس های مثلث است زیرا: $AB = AC = r$



پ) چون فاصله عمودی نقطه A از خط d برابر است و این فاصله همان ارتفاع مثلث است ، اگر بخواهیم مساحت این مثلث ۸ سانتی متر مربع باشد باید قاعده آن سانتی متر باشد یعنی فاصله دو نقطه B و C روی خط d برابر در نتیجه طبق قضیه فیثاغورس داریم:



$$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Longrightarrow AB^۲ = ۴^۲ + ۲^۲ = ۲۰ \Longrightarrow AB = \sqrt{۲۰}$$

بنابراین اگر دایره ای به شعاع $\sqrt{۲۰}$ بزنیم و محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس های مثلث است زیرا: $AB = AC = \sqrt{۲۰}$ و این همان مثلثی است که مساحت آن ۸ می شود.

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(۴)(۴) = ۸$$

سوالات امتحانی پر تکرارو مهم (نهایی/ کنکور/داخلی):

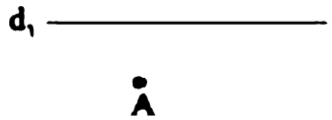
۱- نقطه ی p به فاصله ی ۳ سانتی متری از خط d در نظر بگیرید.

الف) تمام نقاطی که به فاصله ی ۵ سانتی متری از نقطه ی p قرار دارند را مشخص کنید.

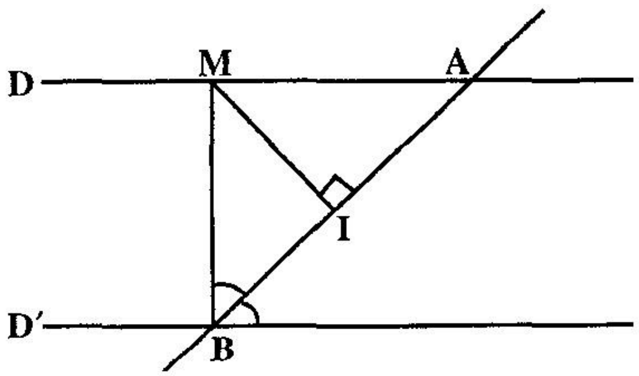
ب) نقاطی از خط d را که به فاصله ی ۵ سانتی متری از نقطه ی p هستند را مشخص کنید.

۲- مثلثی به طول اضلاع ۳ و ۴و ۶ رسم کنید. مساله چند جواب دارد؟ طریقه ی رسم را توضیح دهید.

۳- درشکل روبرو نقطه A به فاصله ۴ از خط $d_۱$ داده شده است.نقطه ای در صفحه بیابید که از خط $d_۱$ و از نقطه A به فاصله ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟



۴–دو خط موازی D و D' را خطی در نقطه های A و B قطع کرده است.ازنقطه I وسط پاره خط AB، عمودی برآن خارج می کنیم تا خط D را در نقطه M قطع کند.ثابت کنید AB نیمساز یکی از زاویه های خط MB با خط D' است.



محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس اول «ترسیم های هندسی » نام طراح: جواد عسگری

سوالات تستی و کنکور:

۱- نقاط Aو B به فاصله ۵ از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارند که از نقطه ی A به فاصله ی ۱/۵ و از نقطه ی B به فاصله ی ۳/۵ باشد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۴

۲- مربع $ABCD$به ضلع $۳\sqrt{۲}$ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصله اش از قطر ACبرابر با ۲ باشد؟

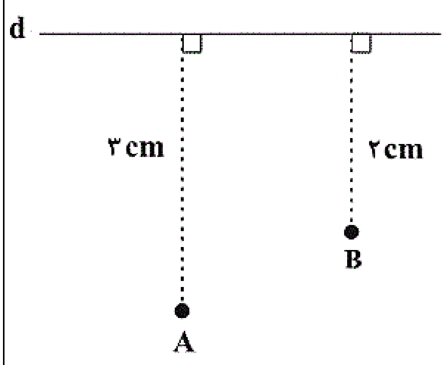
۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۴

۳- در رسم مثلث ABC با معلوم بودن $a = ۸$، $b = ۱۲$ و $h_b = ۶$ چند جواب متمایز وجود دارد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) بیش از ۲

۴- خطوط موازی Lو L'را با فاصله ۴ از هم در یک صفحه در نظر بگیرید.اگر نقطه Eخارج از این دو خط باشد و سه نقطه روی این دو خط داشته باشیم بطوریکه فاصله هر یک از آنها از E برابر ۵ باشد. مجموع فواصل نقطه E تا دو خط L و L'کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۹　　۴) ۸



۵- چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله و از خط d به فاصله $۲cm$ باشد؟

۱) صفر　　۲) ۱
۳) ۲　　۴) ۳

۶- نقطه A به فاصله ۵ از خط d در صفحه مفروض است. اگر سه نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از A به فاصله ۸ و از d به فاصله k باشد مقدار k کدام است؟

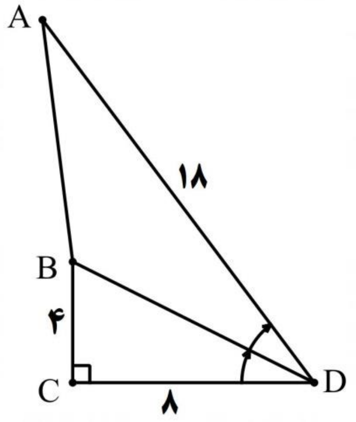
۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۲　　۴) ۵

۷- در شکل مقابل BD نیمساز زاویه D است.طول پاره خط AB کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲۹}$　　۲) $۳\sqrt{۱۷}$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس اول «ترسیم های هندسی » نام طراح: جواد عسگری

۳) $۲\sqrt{۲۹}$ ۴) $۲\sqrt{۱۷}$



۸–در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره ای به مرکز یک راس آن و شعاع ۲/۵ واحد، دو ضلع مربع را قطع می کند.فاصله نزدیک ترین راس مربع تا نقطه تقاطع کدام است؟(ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

•پاسخ تشریحی سوالات امتحانی:

۱- الف) دایره ای به مرکز p و به شعاع ۵ می باشد.

ب) دایره رسم شده به مرکز p و به شعاع ۵ خط d را در دو نقطه قطع می کند که جواب مسئله هستند.

۲- برای رسم ابتدا پاره خط BC را به طول ۶ رسم می کنیم سپس دایره یا کمانی به مرکز B و به شعاع ۴ سانتی متر همچنین دایره یا کمان دیگری به مرکز C و به شعاع ۳ سانتی متر رسم می کنیم این دو دایره همدیگر را در دو نقطه A و A' قطع می کنند تا مثلث های ABC و $A'BC$ بدست آید.که باهم همنهشت می باشند.

۳- نقاطی از صفحه که فاصله آن نقاط از نقطه A برابر ۴ باشد دایره ای به مرکز A و به شعاع ۴ می باشد همچنین نقاطی از صفحه که فاصله آن نقاط از خط $d_۱$ برابر ۵ باشد دو خط موازی به فاصله ۵ و در دو طرف خط $d_۱$ می باشد این دو خط دایره را در ۴ نقطه قطع می کند که این ۴ نقطه جواب مسئله هستند.

۴- MI عمودمنصف پاره خط AB است. پس $MA = MB$ و در نتیجه مثلث ΔMAB متساوی الساقین است پس $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$
همچنین دو خط موازی D و D' را خط شامل پاره خط AB قطع کرده است پس $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۲$

از دو رابطه بالا نتیجه می شود که $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$

منابع استفاده شده:

۱- کتاب درسی ریاضی ۲ چاپ پنجم ۱۴۰۰.

۲- کتاب معلم ریاضی (۲)پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه چاپ اول ۱۳۹۶

۳-دایره المعارف هندسه جلد اول، محمدهاشم رستمی ، انتشارات مدرسه ۱۳۷۸

فصل دوم	به نام خدا	محتوای نوشتاری
هندسه	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	کتاب ریاضی(۲)
درس دوم « استدلال و قضیه تالس »	معاونت آموزش متوسطه	سال تحصیلی
نام طراح: جواد عسگری	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	۱۴۰۰–۱۴۰۱
	گروه ریاضی	

اهداف یادگیری:

- درک برخی خواص تناسب
- درک قضیه تالس، عکس و تعمیم آن و توانایی کاربرد آن در حل مسائل
- درک استدلال استقرایی، استدلال استنتاجی، برهان خلف، مثال نقض، عکس قضیه و قضیه های دو شرطی

انتظارات پس از مطالعه:

- بتواند اثبات به روش برهان خلف را توضیح دهد
- بتواند فرض و حکم را در قضایای شرطی و دو شرطی تشخیص دهد
- بتواند عکس قضیه فیثاغورس را خودش با استفاده از فعالیت کتاب ثابت کند
- بتواند چند گزاره ملموس را با استفاده از مثال نقض رد کند

بتواند برخی مقادیر مجهول در مثلث با استفاده از قضیه تالس پیدا کند.

•**نسبت و تناسب:** هر کسر بصورت $\frac{a}{b}$ را که در آن a و b اعداد حقیقی با شرط $b \neq 0$ را یک نسبت می نامند و هر تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را یک تناسب می نامند. a و d را طرفین تناسب و b و c را وسطین تناسب می گویند.

ویژگی های تناسب:

۱)طرفین وسطین کردن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$

۲) تعویض طرفین یا وسطین یک تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ یا $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

۳) ترکیب در صورت و یا ترکیب در مخرج $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

۴) تفضیل در صورت یا تفضیل در مخرج $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$

۵) اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ آنگاه $\frac{a+c+e}{b+d+f}=k$

نکته: اگر در یک تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ باشد دراینصورت b را واسطه هندسی بین a و c می نامند.

مثال: اگر $\frac{m}{n}=\frac{۲}{۳}$ و $\frac{x}{y}=\frac{۳}{۴}$ آنگاه حاصل $\frac{mx-۲ny}{ny+۳mx}$ را بیابید.

راه حل: صورت و مخرج کسر داده شده را بر nx تقسیم می کنیم:

$$\frac{mx-۲ny}{ny+۳mx}=\frac{\frac{m}{n}-\frac{۲y}{x}}{\frac{y}{x}+\frac{۳m}{n}}=\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۲\times ۴}{۳}}{\frac{۴}{۳}+\frac{۳\times ۲}{۳}}=\frac{-۶}{۱۰}=-\frac{۳}{۵}$$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس دوم « استدلال و قضیه تالس » نام طراح: جواد عسگری

مثال: اگر $\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۴}$ باشد حاصل $\frac{۳x-y+۵z}{x+۴y-۳z}$ را بدست آورید.

راه حل: با فرض $\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۴}=t$ داریم: $a=۲t\,,b=۳t\,,c=۴t$ درنتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{۳x-y+۵z}{x+۴y-۳z}=\frac{۶t-۳t+۲۰t}{۲t+۱۲t-۱۲t}=\frac{۱۷t}{۲t}=\frac{۱۷}{۲}$$

• **استدلال استقرایی:** نتیجه گیری بر مبنای تعداد محدودی از مشاهدات را استدلال استقرایی می نامند. به عبارت دیگر از جزء به کل رسیدن را استدلال به روش استقرا می نامند. با توجه به خطای دید ، عدم اثبات برای تمامی حالت های ممکن و ... مبنای درستی برای اثبات در ریاضی و هندسه نمی باشد.

• **استدلال استنتاجی :** استدلالی است که بر اساس نتیجه گیری منطقی بر پایه واقعیت هایی که درستی آنها را پذیرفته ایم، بیان می شود. و یا از کل به جزء رسیدن است

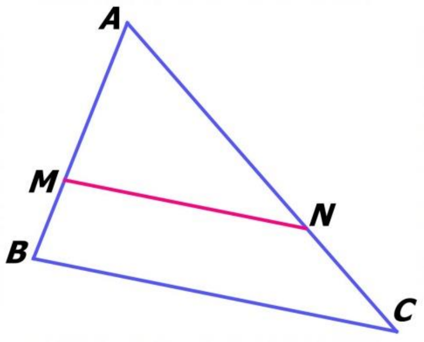
قضیه: نتایج حاصل از استدلال استنتاجی را یک قضیه می نامند.

هر قضیه دارای دو جزء فرض و حکم می باشد که به کمک فرض قضیه و اصول و حقایقی که درستی آنها را قبلا پذیرفته ایم حکم قضیه را ثابت می کنیم.

عکس قضیه: اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم عکس قضیه بدست می آید. عکس قضیه می تواند درست یا نادرست باشد.

• **قضیه تالس:** اگر از یک نقطه روی یک ضلع مثلث خطی موازی ضلع دیگر رسم کنیم تا ضلع سوم را قطع کند پاره خط هایی که روی آن دو ضلع به وجود می آید باهم متناسب هستند

$$MN||BC\Longrightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$



اثبات: M را به C و N را به B وصل کنید و از M عمود MH را برضلع AC و از N عمود NH' را بر ضلع AB رسم کنید. داریم:

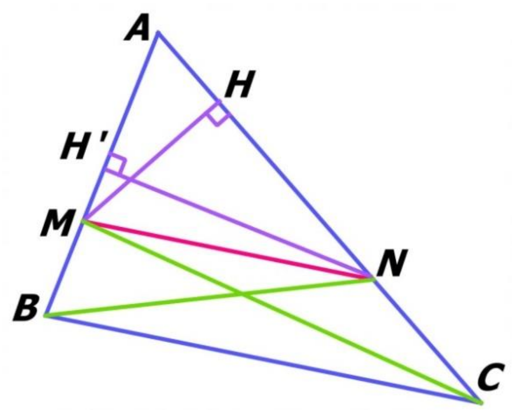
$$\frac{S_{AMN}}{S_{MBN}}=\frac{\frac{۱}{۲}AM\times NH'}{\frac{۱}{۲}MB\times NH'}=\frac{AM}{MB}$$

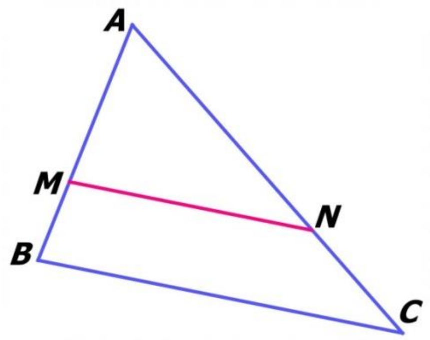
$$\frac{S_{AMN}}{S_{MCN}}=\frac{\frac{۱}{۲}AN\times MH}{\frac{۱}{۲}NC\times MH}=\frac{AN}{NC}$$

ولی دو مثلث BMN و CMN با داشتن قاعده مشترک BC و ارتفاع برابر(فاصله دو خط موازی) مساحت های برابر دارند پس از دو

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس دوم « استدلال و قضیه تالس » نام طراح: جواد عسگری

رابطه بالا نتیجه می گیریم که $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$





•تعمیم قضیه تالس: اگر از یک نقطه روی یک ضلع مثلث خطی موازی ضلع دیگر رسم کنیم تا ضلع سوم را قطع کند مثلثی بوجود می آید که اضلاع آن با اضلاع مثلث اصلی متناسب می باشد.

$$MN||BC \Longrightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

•اثبات به روش غیر مستقیم(برهان خلف)

در برهان خلف به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف)و به یک تناقض یا به یک نتیجه غیرممکن می رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می شود.

مسئله: (فرض) $A \Rightarrow$ (حکم) B

اثبات به روش برهان خلف :

$$\left.\begin{array}{r}\text{درست } A\\ \text{و}\\ \text{نادرست } B\end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow}_{\text{استدلال، منطق و حقایق}}$$

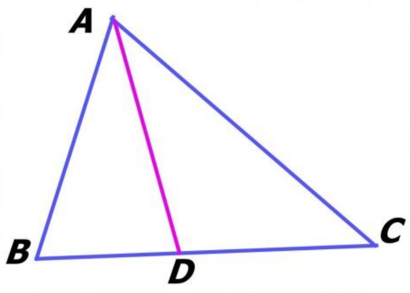
۱ A درست نیست

۲ تناقض منطقی

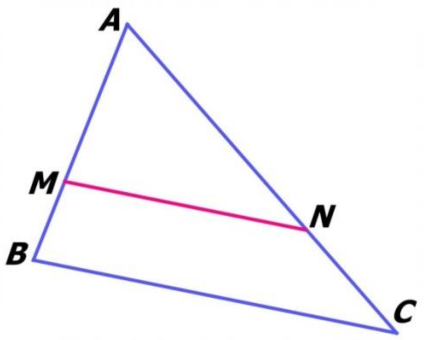
پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل دوم
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسه
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس دوم « استدلال و قضیه تالس »
۱۴۰۰–۱۴۰۱	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	نام طراح: جواد عسگری
	گروه ریاضی	

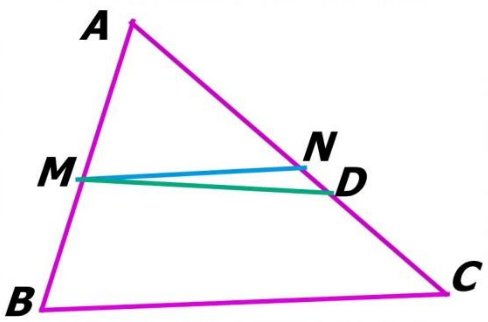
مثال: فرض کنید AD نیمساز زاویه A از مثلث ABC باشد اگر $BD \neq DC$ باشد ثابت کنید $AB \neq AC$



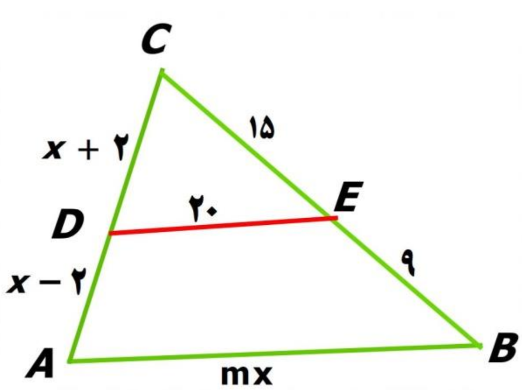
اثبات(برهان خلف): فرض کنیم $AB = AC$ در اینصورت دو مثلث ABD و ACD به حالت (ض ز ض) هم نهشت می شوند و از هم نهشتی آنها $BD = DC$ نتیجه می شود که با فرض مسئله در تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.



•عکس قضیه تالس: اگر در مثلث ABC نقطه های M و N روی اضلاع AB و AC چنان باشند بطوریکه $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ آنگاه $MN||BC$



اثبات : (برهان خلف) فرض می کنیم $MN \nparallel BC$ از نقطه M خطی موازی BC رسم می کنیم تا ضلع AC را در نقطه D قطع کند طبق قضیه تالس داریم: $MD||BC \Longrightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AD}{DC}$ و طبق فرض $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ پس $\frac{AD}{DC}=\frac{AN}{NC}$ با ترکیب در مخرج $\frac{AD}{AD+DC}=\frac{AN}{AN+NC}$ پس $\frac{AD}{AC}=\frac{AN}{AC}$ و در نتیجه $AD = AN$ و این یک تناقض است زیرا $MN \nparallel BC$ و $MD||BC$ پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.



مثال: در شکل روبرو $AB||DE$، مقدار m را بدست آورید.

(جزء به جزء) $\frac{CD}{AD}=\frac{CE}{BE}\to\frac{x+۲}{x-۲}=\frac{۱۵}{۹}$

$\to ۹x+۱۸=۱۵x-۳۰\to ۶x=۴۸\to x=۸$

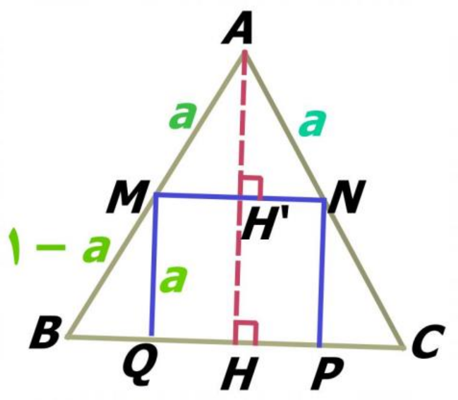
(جزء به کل) $\frac{CE}{BC}=\frac{DE}{AB}\to\frac{۱۵}{۲۴}=\frac{۲۰}{۸m}$ و $m=۴$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس دوم « استدلال و قضیه تالس » نام طراح: جواد عسگری

تست: در داخل یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد، بزرگترین مربع ممکن را می سازیم.اندازه ضلع مربع کدام است؟(ریاضی خارج ۹۲)

۱) $۲\sqrt{۳}-۳$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$ ۳) $\sqrt{۳}-\frac{۱}{۲}$ ۴) $۲(\sqrt{۳}-۱)$

راه حل: بنا بر تعمیم قضیه تالس در مثلث ABH داریم:



$$\frac{BM}{AB}=\frac{MQ}{AH}\rightarrow\frac{۱-a}{۱}=\frac{a}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

درنتیجه $a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ و یا $a=\frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}-۳}{۱}$ و جواب گزینه ۱ می باشد

•**قضیه دو شرطی:** اگر در یک قضیه ، عکس قضیه نیز درست باشد آن قضیه را قضیه دو شرطی می نامند.

قضیه های دو شرطی را با نماد $\Leftrightarrow$ نشان می دهند و می خوانند « اگر و تنها اگر» و یا « اگر و فقط اگر»

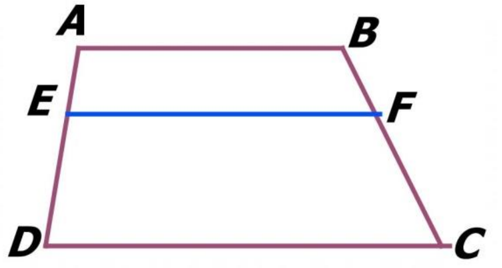
به عنوان مثال قضیه تالس و قضیه فیثاغورس قضیه های دو شرطی هستند.

•**مثال نقض:** به مثالی که یک نتیجه گیری کلی را نقض می کند مثال نقض می گویند.

مثال: آیا حکم کلی « به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^{۲}+n+۱۱$ عددی اول است» درست است ؟ چرا؟

خیر چون به ازای $n=۱۰$ حاصل عبارت برابر ۱۲۱می باشد که عددی اول نیست.

•**قضیه تالس در ذوزنقه:**اگر خطی موازی دو قاعده یک ذورنقه ، ساق های آن را قطع کند آن گاه نسبت پاره خط های ایجاد شده روی دو ساق متناظر، متناسب هستند.

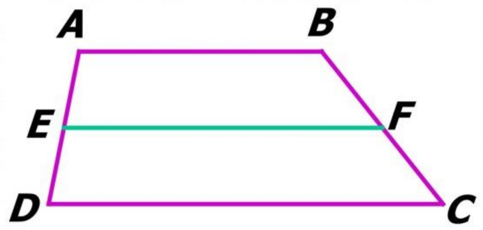


$$AB||EF||CD\Longrightarrow\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس دوم « استدلال و قضیه تالس » نام طراح: جواد عسگری

قضیه میان خط در ذوزنقه: اگر EF پاره خطی باشد که وسط های ساق های ذوزنقه ABCD را به هم وصل می کند آنگاه

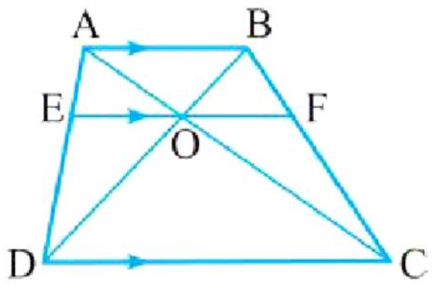
$$EF = \frac{AB + CD}{۲}$$

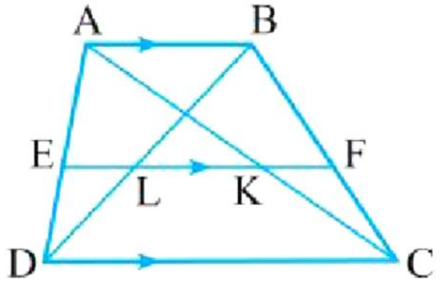


چند نکته از قضیه تالس در ذوزنقه:

۱-پاره خطی که از محل تقاطع دو قطر ذوزنقه ، موازی دو قاعده آن رسم شده و به دو ساق محدود باشد در نقطه برخورد دو قطر نصف می شود یعنی با توجه به شکل: $EO = OF$ و نیز

$$\frac{۲}{EF} = \frac{۱}{AB} + \frac{۱}{CD}$$

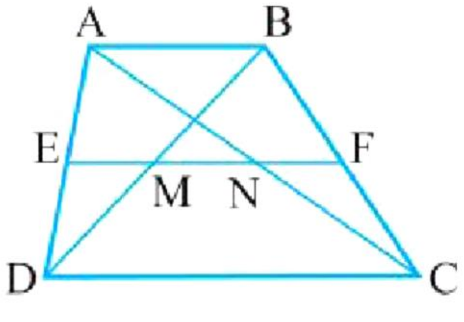




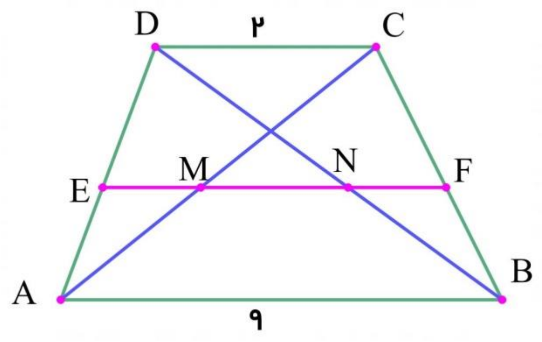
۲-اگر در هر ذوزنقه خطی به موازات دو قاعده آن رسم شود تا ساق ها و قطرها را قطع کند آن گاه پاره خط های محدود به ساق ها و قطرها باهم برابرند.یعنی $EL = KF$

۳-در ذورنقه $ABCD$ اگر نقاط E، M ، N و F به ترتیب وسط های AD ، BD ، AC و BC باشند آنگاه این چهارنقطه روی یک خط قرار دارند و

$$MN = \frac{CD - AB}{۲}$$



فصل دوم هندسه درس دوم « استدلال و قضیه تالس » نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱



تست: در ذوزنقه مقابل ، EF موازی قاعده ها ، دو قطر ذوزنقه را در M و N قطع کرده است بطوریکه $ME = MN = NF$. حاصل $\frac{AE}{DE}$ کدام است؟

۱) ۳/۵   ۲) ۳/۲۵   ۳) ۲/۲۵   ۴) ۱/۲۵

راه حل:

$$\Delta ABD: EN||AB \Rightarrow \frac{DN}{BD}=\frac{EN}{AB}=\frac{۲ME}{۹}$$

$$\Delta BCD: NF||CD \Rightarrow \frac{BN}{ND}=\frac{NF}{CD}=\frac{ME}{۲}$$

$$\xrightarrow{\div} \frac{DN+BN}{BD}=\left(\frac{۲}{۹}+\frac{۱}{۲}\right)ME \Rightarrow ME\times\frac{۱۳}{۱۸}=\frac{BD}{BD}=۱ \Rightarrow ME=\frac{۱۸}{۱۳}$$

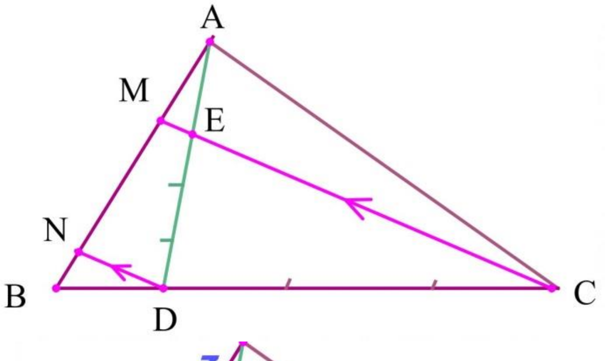
$$\Delta ACD: ME||CD \Rightarrow \frac{AE}{AD}=\frac{ME}{CD}=\frac{\frac{۱۸}{۱۳}}{۲}=\frac{۹}{۱۳}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{AD}{DE}=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

تست: در یک ذوزنقه قائم الزاویه ، از نقطه O محل تلاقی قطرها ، خطی موازی قاعده ها رسم می شود.ساق قائم را در A و ساق مایل را در Bقطع می کند.نسبت $\frac{OA}{OB}$ چگونه است؟(تجربی خارج۹۷)

۱)کوچکتر از ۱   ۲) مساوی ۱

۳) بزرگتر از ۱   ۴) متغیر نسبت به اضلاع

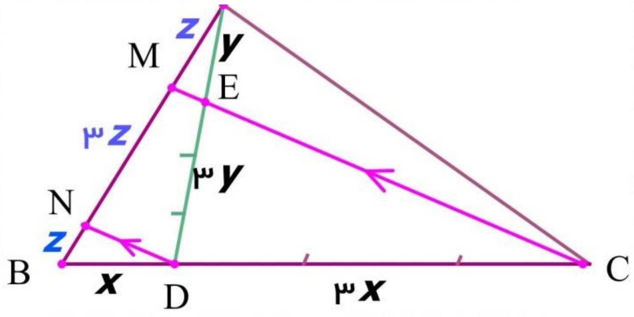
راه حل: با توجه به نکته های گفته شده $OA = OB$ پس نسبت مساوی یک می باشد.



تست: در شکل زیر ، $BD = \frac{۱}{۴}BC$ و $AE = \frac{۱}{۴}AD$ و $DN||CM$ اندازه AB چند برابر AM است؟(ریاضی ۹۷)

۱) ۴   ۲) ۴/۵   ۳) ۵

۴) ۶



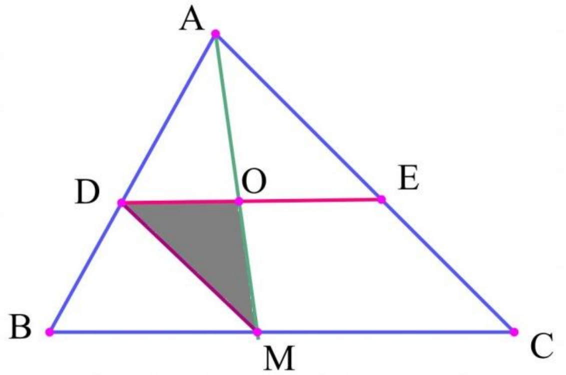
راه حل: با فرض $BD = x$ و $AE = y$ و $AM = z$ و با توجه به شکل داریم:

$$\Delta AND: ND||ME \Rightarrow \frac{AM}{MN}=\frac{y}{۳y}\Rightarrow NM=۳AM$$

$$\Delta BMC: ND||MC \Rightarrow \frac{BN}{NM}=\frac{x}{۳x}\Rightarrow BN=\frac{۱}{۳}MN$$

درنتیجه $\frac{AB}{AM}=\frac{۵z}{z}=۵$ و جواب گزینه ۳ می باشد.

تست: در شکل زیر ، نقطه M وسط BC و $\frac{DA}{DB}=\frac{۲}{۳}$ و $DE||BC$ است. مساحت مثلث ODM چند درصد مساحت مثلث ABC است؟ (ریاضی ۹۵)



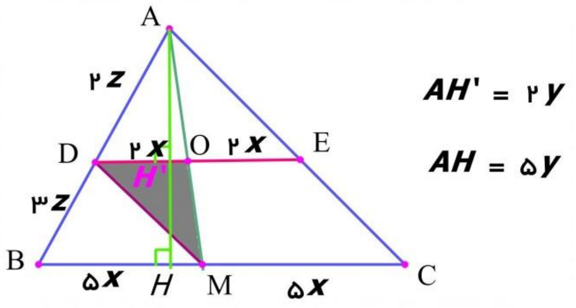
۱) ۱۲   ۲) ۱۵

۳) ۱۶   ۴) ۱۸

راه حل : $\Delta ABM: OD||BM \Longrightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{DO}{BM}=\frac{AO}{AM}=\frac{۲}{۵}$

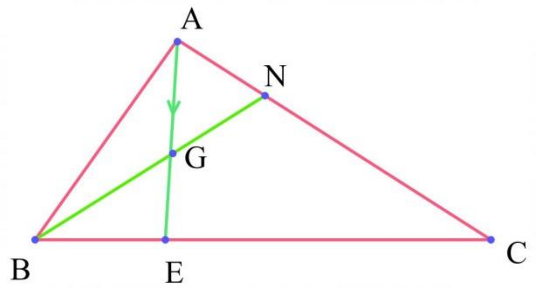
$\Delta ACM: OE||MC \Longrightarrow \frac{AO}{AM}=\frac{OE}{MC}=\frac{۲}{۵}$

با توجه به دو رابطه بالا $DO=OE$ همچنین اگر ارتفاع AH را بر ضلع BC رسم کنیم تا DE را در نقطه H' قطع کند داریم:



$$\frac{S_{\Delta ODM}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}HH'\times DO}{\frac{۱}{۲}AH\times BC}=\frac{HH'}{AH}\times\frac{DO}{BC}=\frac{۳}{۵}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۳}{۲۵}=\frac{۱۲}{۱۰۰}$$

تست: در مثلث ABC شکل زیر، اگر $۴AN=NC$ و هم چنین $۵BE=EC$ باشد، آنگاه نسبت $\frac{BG}{GN}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) ۱   ۴) $\frac{۲}{۵}$

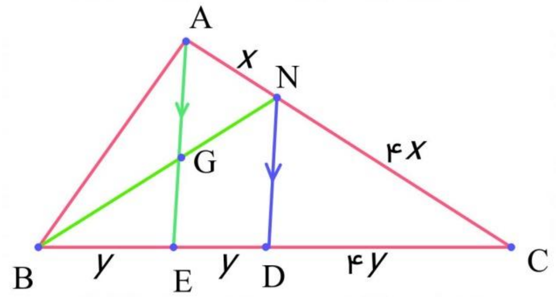
راه حل : از نقطه N خطی موازی BN رسم می کنیم تا BC را در نقطه D قطع کند:

$\frac{BE}{EC}=\frac{۱}{۵}$ ، $\Delta ACE: DN||AE \Longrightarrow \frac{CD}{CE}=\frac{CN}{CA}$

با فرض $BE=y$ داریم: $CE=۵y$ همچنین $\frac{AN}{NC}=\frac{۱}{۴}$ با فرض $AN=x$ داریم: $NC=۴x$ در نتیجه $\frac{۴x}{۵x}=\frac{CD}{۵y}$ پس

$CD=۴y$ و $ED=y$

$\Delta BND: DN||AE \Longrightarrow \frac{BG}{GN}=\frac{BE}{ED}=\frac{y}{y}=۱$

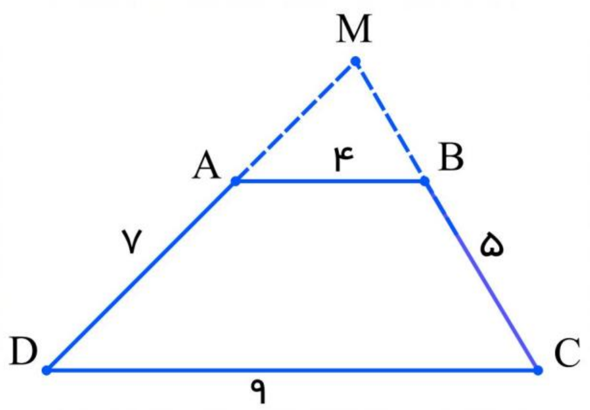


محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس دوم « استدلال و قضیه تالس » نام طراح: جواد عسگری

تست:اندازه اضلاع ذوزنقه $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است.محیط مثلث MAB، کدام است؟(تجربی ۹۹)

۱) ۱۳/۲   ۲) ۱۳/۶

۳) ۱۴/۴   ۴) ۱۴/۸



راه حل: چون $AB||CD$ بنا به قضیه تالس داریم:

$$\frac{MA}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{x}{x+۷}=\frac{y}{y+۵}=\frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow ۹x=۴x+۲۸\Rightarrow x=\frac{۲۸}{۵}=۵/۶$$

$$\Rightarrow ۹y=۴y+۲۰\Rightarrow y=۴$$

و محیط مثلث MAB برابر است با: $۴+۴+۵/۶=۱۳/۶$

پاسخ فعالیت ها، کاردر کلاس ها و تمرینات کتاب:

• کار در کلاس صفحه ۳۱ و ۳۲ کتاب :

۱- با فرض اینکه تمام مخرج ها مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

(طرفین وسطین)

الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow[bd\neq ۰]{\times bd} bd\times\frac{a}{b}=bd\times\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$$

(تبدیل حاصل ضرب به تناسب)

ب) $ad=bc\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$ad=bc\xrightarrow[bd\neq ۰]{\div bd} bd\times\frac{ad}{bd}=\times\frac{bc}{bd}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

(معکوس کردن تناسب)

الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\xrightarrow[ac\neq ۰]{\div ac}\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{ac}\Rightarrow\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

(تعویض جای طرفین با وسطین)

ت) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{d}{b}\\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}\end{cases}$ $\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\begin{cases}\xrightarrow[ab\neq ۰]{\div ab}\frac{ad}{ab}=\frac{bc}{ab}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{d}{b}\\ \xrightarrow[cd\neq ۰]{\div cd}\frac{ad}{cd}=\frac{bc}{cd}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\end{cases}$

(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)

ث) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\end{cases}$

راهنمایی: در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس نمایید، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه کنید.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{b}+۱=\frac{c}{d}+۱\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{a+d}{d}\\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{b}{a}+۱=\frac{d}{c}+۱\Rightarrow\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\Rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\end{cases}$$

(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)

ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\\ \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}\end{cases}$

راهنمایی: در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده، سپس از دو طرف عدد ۱ را کم کنید.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{b}-۱=\frac{c}{d}-۱\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{a-d}{d}\\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{b}{a}-۱=\frac{d}{c}-۱\Rightarrow\frac{b-a}{a}=\frac{c-d}{c}\Rightarrow\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}\end{cases}$$

۲- با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل کنید.

الف) $\frac{۵}{۱۴}=\frac{۱۵}{۴۲}\Rightarrow ۵\times۴۲=۱۵\times۱۴$

ب) $۳\times۴۰=۱۲\times۱۰\Rightarrow\frac{۳}{۱۰}=\frac{۱۲}{۴۰}$

پ) $\frac{۷}{۱۰}=\frac{۲۱}{۳۰}\Rightarrow\frac{۱۰}{۷}=\frac{۳۰}{۲۱}$

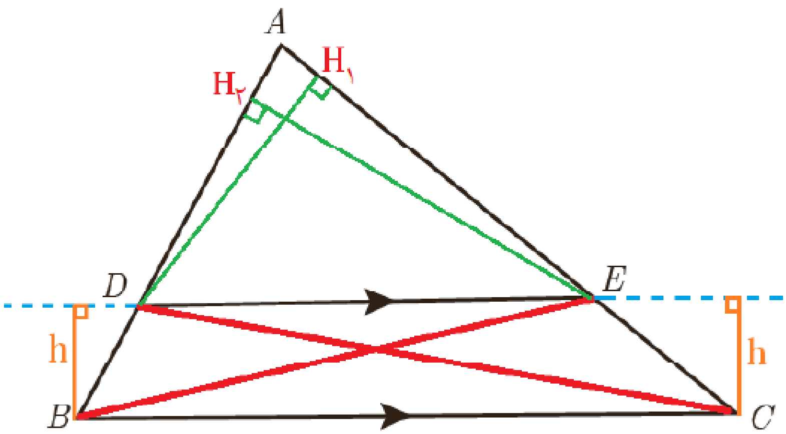
ت) $\frac{۶}{۱۱}=\frac{۱۸}{۳۳}\Rightarrow\frac{۶}{۱۸}=\frac{۱۱}{۳۳}\quad,\quad\frac{۳۳}{۱۱}=\frac{۱۸}{۶}$

ث) $\frac{۴}{۱۴}=\frac{۱۰}{۳۵}\Rightarrow\frac{۱۸}{۱۴}=\frac{۴۵}{۳۵}\quad,\quad\frac{۴}{۱۸}=\frac{۱۰}{۴۵}$

ج) $\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۰}{۲۴}\Rightarrow\frac{-۷}{۱۲}=\frac{-۱۴}{۲۴}\quad,\quad\frac{۵}{-۷}=\frac{۱۰}{-۱۴}$

• فعالیت صفحه ۳۴ کتاب:

فرض کنید مانند شکل مقابل پاره خط DE موازی ضلع BC باشد.



می خواهیم نشان دهیم: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

۱- از نقطهٔ D به C و از E به B وصل کنید. مساحت های مثلث های DEB ، DEC که آنها را با S_{DEB}, S_{DEC} نشان می دهیم، با هم برابرند؟ چرا؟

ارتفاع های نظیر قاعدهٔ DE را در دو مثلث DEB ، DEC رسم می کنیم. با توجه به شکل می دانیم که فاصلهٔ بین دو خط موازی مقداری ثابت است پس طول ارتفاع ها با هم برابرند.

$$\left.\begin{aligned} S_{DEC} &= \frac{۱}{۲}\, h.DE \\ S_{DEB} &= \frac{۱}{۲} h.DE \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{DEC} = S_{DEB}$$

۲- از نقطهٔ E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را $H_۱$ بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را $H_۲$ بنامید.

۳-

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} = \frac{\frac{۱}{۲} EH_۱ \times AD}{\frac{۱}{۲} EH_۱ \times DB} = \frac{AD}{DB}$$

۴-

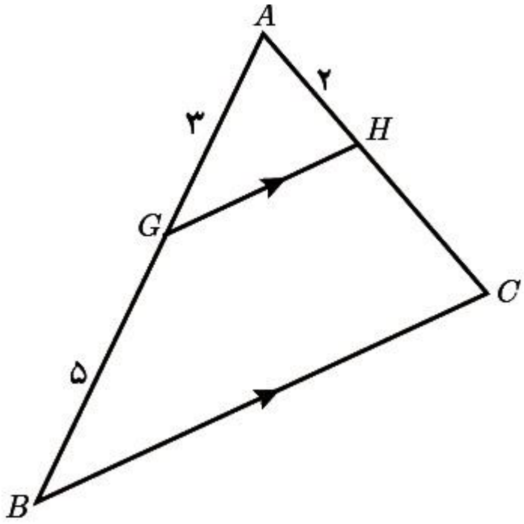
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{۱}{۲} DH_۲ \times AE}{\frac{۱}{۲} DH_۲ \times EC} = \frac{AE}{EC}$$

۵- از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می شود $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$. چرا؟

$$\left.\begin{aligned} \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} &= \frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} &= \frac{AE}{EC} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{S_{DEB}=S_{DEC}} \left.\begin{aligned} \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} &= \frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} &= \frac{AE}{EC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

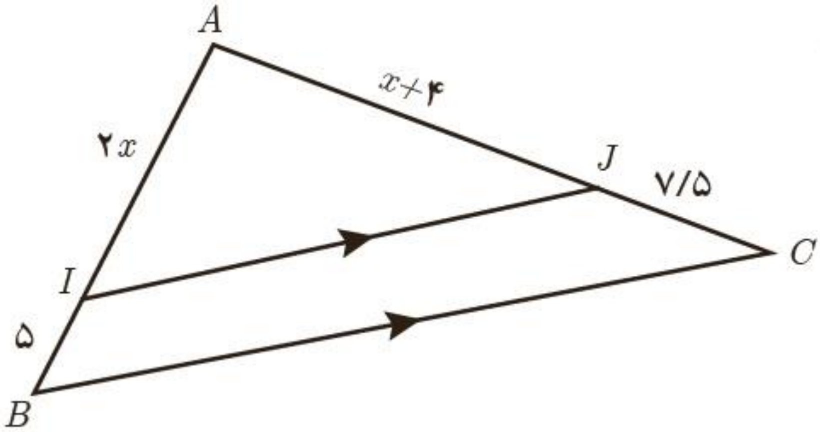
محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس دوم « استدلال و قضیه تالس » نام طراح: جواد عسگری

• کار در کلاس صفحه ۳۴ کتاب:



۱- در شکل پاره خط های BC , GH موازی اند. اندازهٔ پاره خط های HC , AC را به دست آورید.

$$\frac{AG}{GB}=\frac{AH}{HC}\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{HC}\Rightarrow HC=\frac{۱۰}{۳}$$

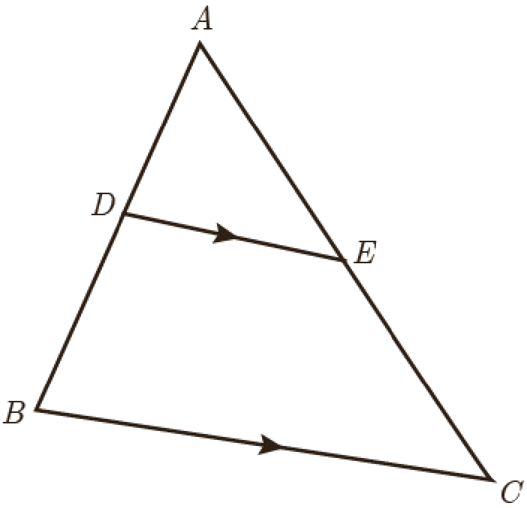


۲- با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازهٔ پاره خط های AJ , AI را به دست آورید.

$$\frac{AI}{IB}=\frac{AJ}{JC}\Rightarrow\frac{۲x}{۵}=\frac{x+۴}{۷/۵}\Rightarrow ۱۵x=۵x+۲۰$$
$$\Rightarrow ۱۰x=۲۰\Rightarrow x=۲$$

تعمیم قضیهٔ تالس

• فعالیت صفحه ۳۵ کتاب:



۱- در شکل مقابل $DE||BC$.

الف) تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید.

$$DE||BC\Rightarrow\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

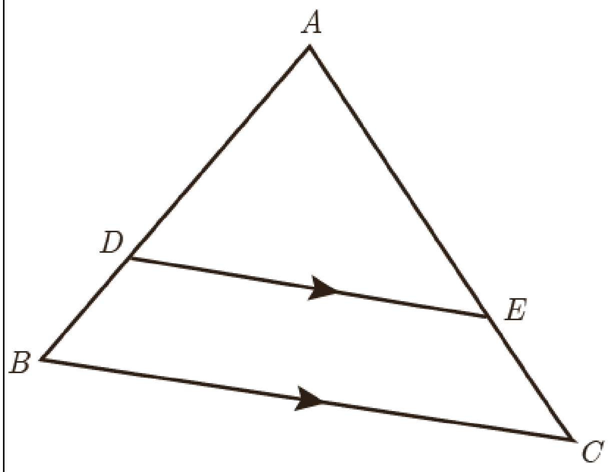
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{AD}{DB+AD}=\frac{AE}{EC+AE}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

پ) به کمک تفضیل نسبت در صورت از تناسب به دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{AD-AB}{AB}=\frac{AE-AC}{AC}\Rightarrow\frac{-DB}{AB}=\frac{-EC}{AC}\Rightarrow\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$$

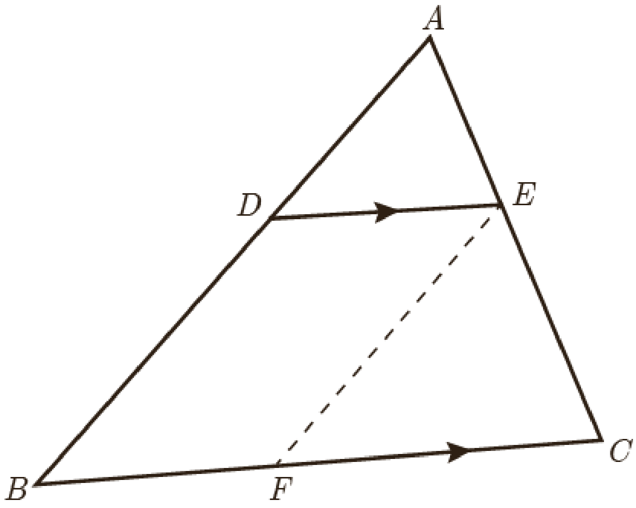
توجه کنید که تناسب های به دست آمده در (ب) و (ج) صورت های دیگر قضیهٔ تالس اند.

۲- در مثلث ABC پاره خط DE موازی ضلع BC است.
ابتدا تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید. سپس با توجه به ویژگی های تناسب و تکمیل تساوی های زیر، تناسب های دیگری را از قضیهٔ تالس نتیجه بگیرید.



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow \begin{cases} \frac{DB}{DA}=\frac{EC}{AE} \quad \frac{BD}{BA}=\frac{EC}{CA} \quad \frac{AB}{BD}=\frac{CA}{CE} \\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \quad \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE} \end{cases}$$

۳-



الف) در شکل پاره خط های BC , DE موازی اند. با توجه به قضیهٔ تالس داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{Ac}$

ب) پاره خط EF را موازی AB رسم می کنیم. بنابراین داریم: $\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{Ac}$

پ) با توجه به قسمت های (الف) و (ب) داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$

ت) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی ای است؟

بنا به فرض $DB||EF$, $DE||BF$ پس بنا به تعریف چهارضلعی $DEFB$ متوازی الاضلاع است.

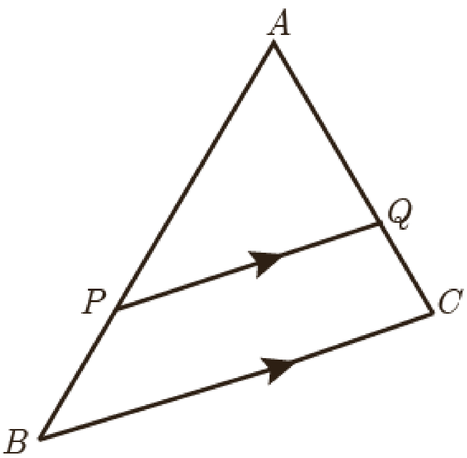
پاره خط BF با کدام پاره خط برابر است؟ $BF=DE$

ث) با توجه به قسمت های (ج) و (د) داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

این رابطه تعمیم قضیهٔ تالس است.

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس دوم « استدلال و قضیه تالس » نام طراح: جواد عسگری

• کار در کلاس صفحه ۳۶ کتاب:



در شکل پاره خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{PQ}{BC}$ ☒

ب) $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$ ☑

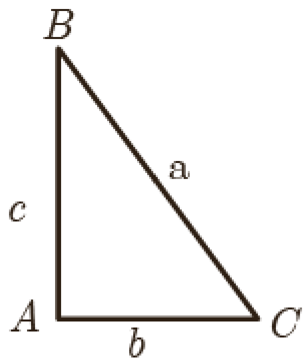
پ) $\frac{PB}{AP} = \frac{QC}{AC}$ ☒

ت) $\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC} = \frac{PQ}{BC}$ ☒

ث) $\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC}$ ☑

ج) $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{PQ}$ ☑

• کار در کلاس صفحه ۳۹ کتاب:



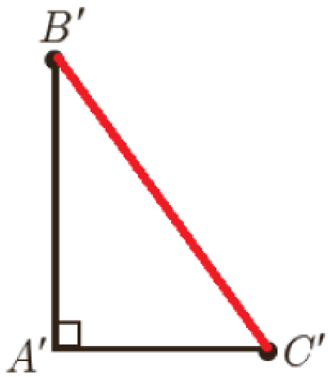
با توجه به قضیهٔ فیثاغورس اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

اگر در مثلث ABC ، $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$ آنگاه مثلث در رأس A قائمه است.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست است.

۱- فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$ بین اندازهٔ اضلاع آن برقرار است.



۲- پاره خط های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه ای در نظر بگیرید که $\hat{A}' = ۹۰^{\circ}$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$ است.

۳- با استفاده از قضیهٔ فیثغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه پاره خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

$$\left.\begin{array}{r} B'C'^{۲} = A'C'^{۲} + A'B'^{۲} \xrightarrow[A'C'=b]{A'B'=c} B'C'^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \\ a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow B'C'^{۲} = a^{۲} \Rightarrow B'C' = a$$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس دوم « استدلال و قضیه تالس » نام طراح: جواد عسگری

۴- توضیح دهید چرا $\overset{\triangle}{A'B'C'} \cong \overset{\triangle}{ABC}$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = ۹۰^\circ$

$$\left.\begin{aligned} A'B' &= AB \\ A'C' &= AC \\ B'C' &= BC \end{aligned}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{A} = \hat{A'} = ۹۰^\circ$$

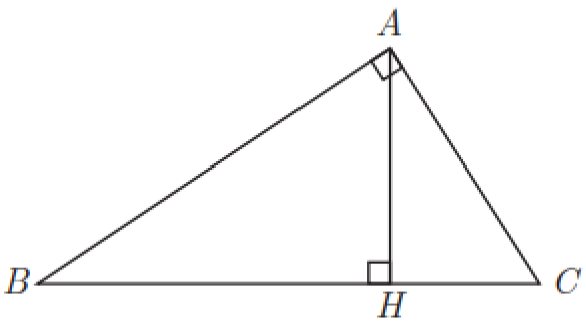
ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان کنید.

فرض کنیم ABC یک مثلث باشد در اینصورت: $a^۲ = b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow A = ۹۰^\circ$

مثلث قائم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع برابر با مجموع مربع های دو ضلع دیگر باشد.

•پاسخ تمرینات صفحه ۴۰ و ۴۱ کتاب

۱- در شکل مقابل مساحت مثلث قائم الزاویه ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به دست آورید.



$S = \frac{۱}{۲}AH.BC\ (۱)$ و $S = \frac{۱}{۲}AB.AC\ (۲)$

با تقسیم رابطه ۱ بر ۲ خواهیم داشت: $\frac{AH.BC}{AB.AC} = ۱ \implies \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC}$

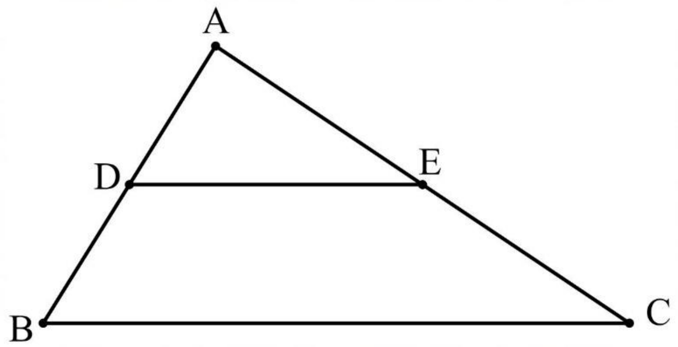
۲- در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به دست آورید.

الف) $\frac{a}{۱۰+a} = \frac{b}{۸+b}$ ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a} = \frac{۳b+۷}{۷+۲b}$

الف) با تفریق صورت از مخرج داریم $\frac{a}{۱۰} = \frac{b}{۸}$ و با جابجایی طرفین تساوی داریم $\frac{a}{b} = \frac{۱۰}{۸}$

ب) با تفریق مخرج از صورت ها داریم $\frac{a}{۱۰+۲a} = \frac{b}{۷+۲b}$ با ضرب دو طرف تناسب در عدد ۲ و سپس تفریق مخرج از صورت خواهیم داشت $\frac{a}{۱۰} = \frac{b}{۷}$ پس در نتیجه $\frac{a}{b} = \frac{۱۰}{۷}$

۳- ثابت کنید در هر مثلث، پاره خطی که وسط های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.



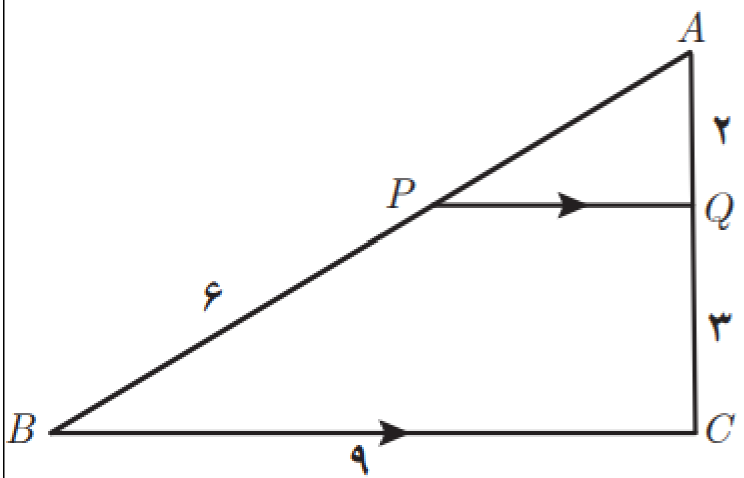
طبق فرض D وسط AB و Eوسط AC است پس داریم:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}=۱$$

پس بنابر عکس قضیه تالس باید DE با BC موازی باشد

$$\mathrm{DE}||\mathrm{BC}\Longrightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۲}$$

۴- در شکل مقابل PQ||BC است. طول پاره خط های AP و PQ را به دست آورید .

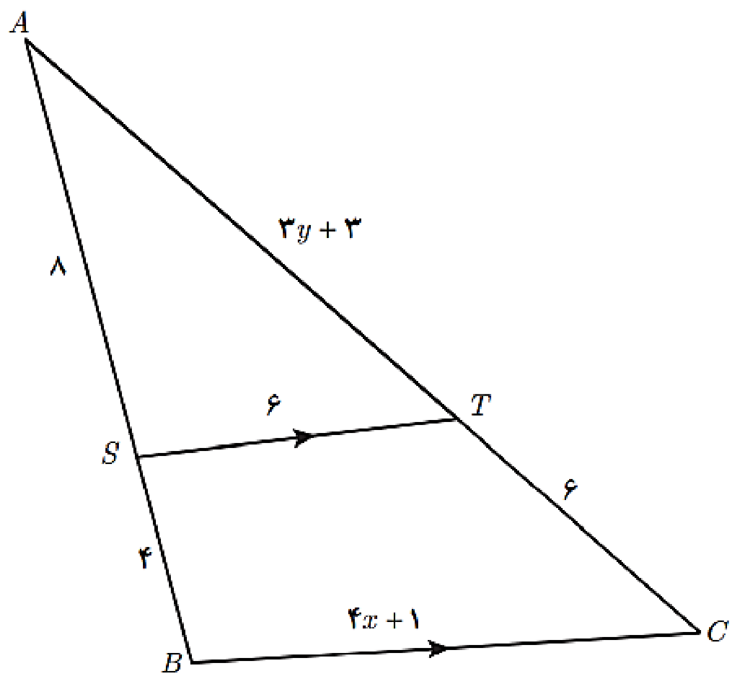


$$\mathrm{PQ}||\mathrm{BC}\overset{\text{تالس}}{\Longrightarrow}\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{QC}\quad\Longrightarrow\frac{AP}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Longrightarrow AP=۴$$

و با استفاده از جز به کل تالس داریم:

$$\frac{PQ}{BC}=\frac{AQ}{AC}\Longrightarrow\frac{PQ}{۹}=\frac{۲}{۵}\quad\Longrightarrow PQ=\frac{۱۸}{۵}$$



۵- در شکل مقابل ST||BC است. مقادیر x و y را به دست آورید.

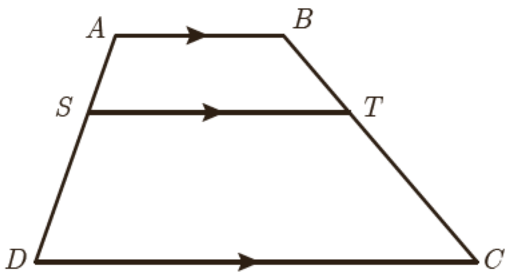
$$\mathrm{ST}||\mathrm{BC}\Longrightarrow\frac{AS}{AB}=\frac{AT}{AC}=\frac{ST}{BC}$$

$$\Longrightarrow\frac{۸}{۱۲}=\frac{۳y+۳}{۳y+۹}=\frac{۶}{۴x+۱}$$

$$\frac{۸}{۱۲}=\frac{۳y+۳}{۳y+۹}\Longrightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{y+۱}{y+۳}\Longrightarrow ۳y+۳=۲y+۶\Longrightarrow y=۳$$

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۴x+۱}\Longrightarrow ۸x+۲=۱۸$$

$$\Longrightarrow ۸x=۱۶\Longrightarrow x=۲$$

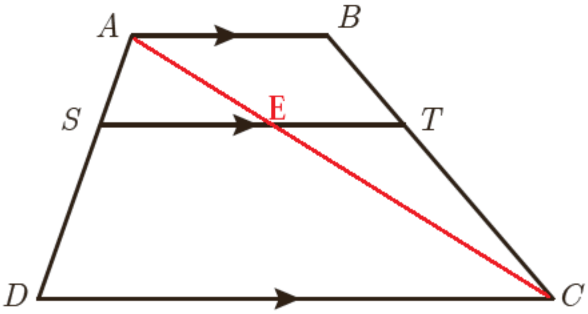


۶- در ذوزنقه مقابل $AB||ST||DC$ است. ثابت کنید: $\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$

ابتدا یکی از قطرها را رسم می کنیم و سپس قضیه تالس را برای دو مثلث ABC و ACD به کار می بریم:

$$\Delta ACD: SE||DC \Longrightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{AE}{EC} \quad (۱)$$

$$\Delta ABC: ET||AB \Longrightarrow \frac{BT}{TC}=\frac{AE}{EC} \quad (۲)$$



از دو رابطه (۱) و (۲) خواهیم داشت $\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$

۷- در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود .

ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع رو به رو موازی باشند، در اینصورت زوایای مقابل با هم برابرند .

پ) اگر رأسهای یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در اینصورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل اند .

ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، »ضلع متناظر به ارتفاع بزرگتر« کوچکتر است از »ضلع مقابل به ارتفاع کوچکتر.«

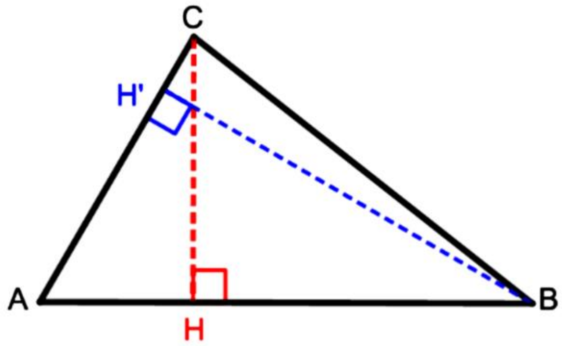
جواب:

الف) اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند، آن گاه سه ضلع نیز برابر خواهند بود.

فصل دوم هندسه درس دوم « استدلال و قضیه تالس » نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱

ب)اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل برابر باشند، آنگاه اضلاع روبرو موازیند.

پ)اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی مکمل یکدیگر باشند ، در این صورت رأس های چهارضلعی روی یک دایره قرار دارند.

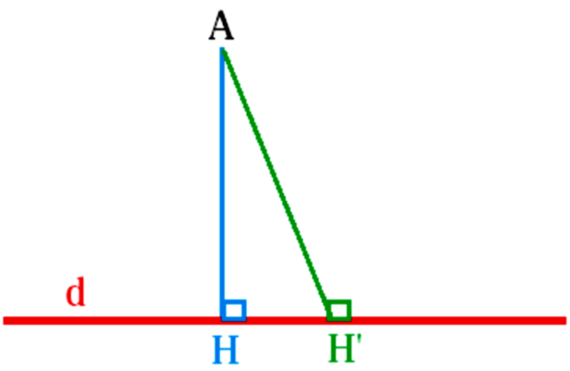


ت) در مثلث ABC اگر $AC < AB$ آنگاه $BH' > CH$

که در آن CH و BH' ارتفاع های مثلث هستند.

۸- با برهان خلف ثابت کنید نمی توان از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

فرض کنیم بتوان بیش از دو خط عمود رسم کرد (فرض خلف) داریم:



با توجه به شکل، چون بیش از دو عمود توانسته ایم رسم کنیم پس زوایای H و H' هر دو ۹۰ درجه هستند و با توجه به اینکه جمع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است، با این حساب ما مثلثی داریم که جمع زوایای داخلی آن، بیش از ۱۸۰ درجه می باشد که این یک تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

۹- هر یک از حکم های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اولِ بزرگ تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

پ) در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگ تر است.

ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق اند.

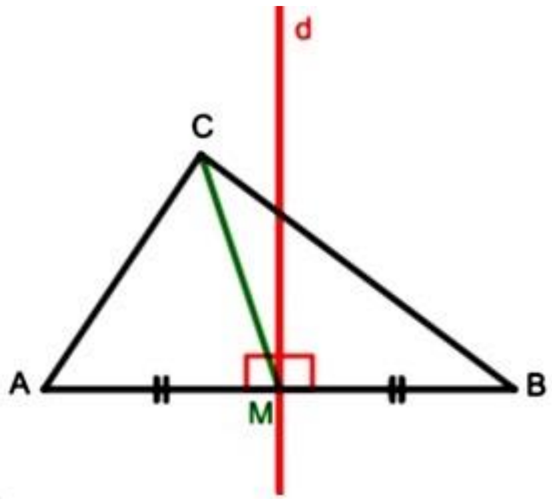
جواب: الف) عدد ۱۳۱ ، اول است و از ۱۲۷ بزرگ تراست .

ب مساحت مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۴ برابر ۶ می باشد در حالیکه مساحت مربع به ضلع ۵ برابر ۲۵ هست.

پ در مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۴ با در نظر گرفتن عدد ارتفاع ۴، عدد ۳ بعنوان یکی از اضلاع از ارتفاع کوچکتر است.

ت)

در مثلث ABC شکل مقابل خط d عمود منصف ضلع AB و CM میانه ضلع AB است ولی بر هم منطبق نیستند.



●سوالات امتحانی پر تکرارو مهم (نهایی/ کنکور/داخلی):

۱- مقدار x و y را در تناسب های زیر بیابید.

الف) $\frac{x}{x+۱}=\frac{x+۳}{۸}$

ب) $\frac{۳}{۴}=\frac{x-۱}{۲۰}=\frac{۲۱}{y+۳}$

۲- عکس قضیه های زیر را بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه زاویه برابر وجود داشته باشد در این صورت آن مثلث متساوی الاضلاع است.

ب) در یک مثلث ضلع روبه رو به زاویه ی بزرگتر، بزرگتر است از ضلع رو به رو به زاویه ی کوچکتر.

پ) اگر یک چهار ضلعی لوزی باشد آن گاه قطر هایش بر هم عمود است.

ت) در هر متوازی الاضلاع قطر ها منصف یکدیگرند.

۳- برای گزاره های زیر مثال نقض بیاورید.

الف) هر چهار ضلعی که قطر هایش یکدیگر را نصف کنند، مستطیل هست.

ب) هر دو مثلث که هم مساحت باشند ، هم نهشت اند.

پ) در هر مثلث، اندازه ی بزرگترین زاویه از چهار برابر اندازه ی کوچکترین زاویه ، کوچکتر است.

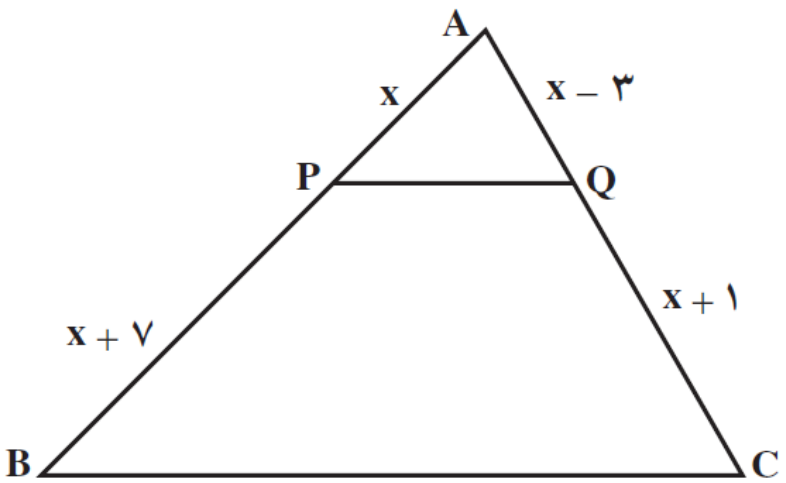
ت) هر زاویه خارجی یک چند ضلعی از هر زاویه داخلی آن بزرگتر است.

ث) ار تفاع هر مثلث درون مثلث قرار می گیرند.

ج) نقطه ی همراسی عمود منصف های سه ضلع یک مثلث همواره داخل مثلث قرار می گیرند.

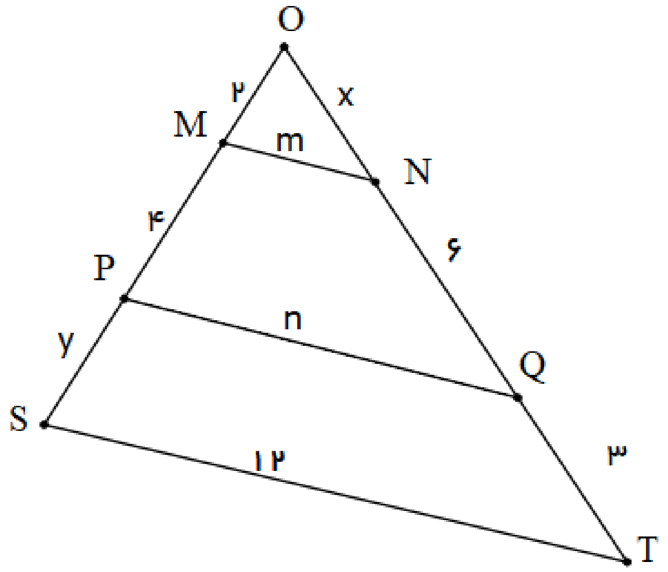
۴- با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع می کند دیگری را نیز قطع می کند.

۵- در شکل مقابل PQ با BC موازی است . x را بیابید.



۶-در شکل مقدار $MN||PQ||ST$ مقادیر مجهول x، y ، m و n را بدست آورید.

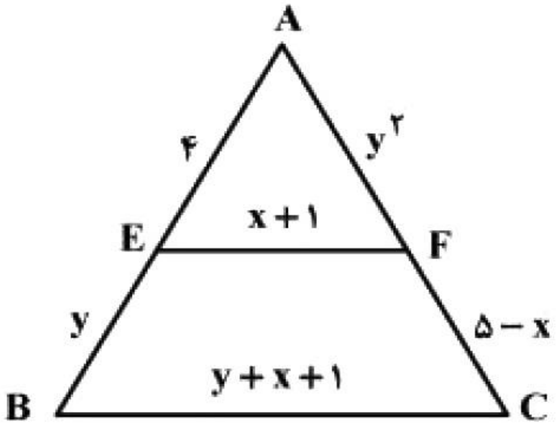
$(OM = ۲, QT = ۳, MP = ۴, ST = ۱۲, NQ = ۶)$



محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل دوم
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسه
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس دوم « استدلال و قضیه تالس »
۱۴۰۰-۱۴۰۱	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	نام طراح: جواد عسگری
	گروه ریاضی	

سوالات تستی و کنکور:

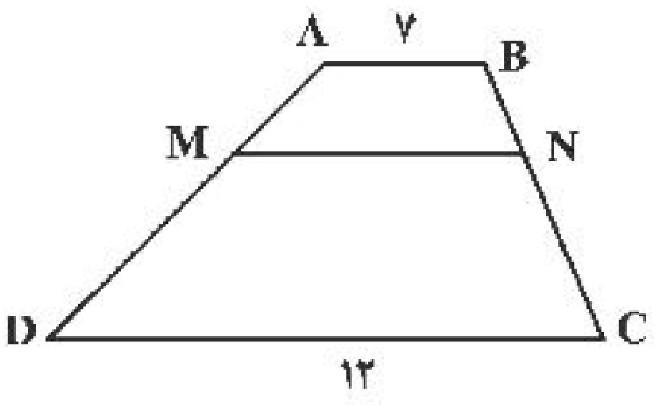
۱-درشکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y-۲x$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)



۱) -۴ ۲) -۲

۳) ۴ ۴) ۲

۲-در ذوزنقه $ABCD$، پاره خط MN موازی قاعده ها و $\frac{MA}{MD}=\frac{۲}{۳}$ است. اندازه MN کدام است؟(تجربی خارج۹۹)



۱) ۸ ۲) ۸/۷۵

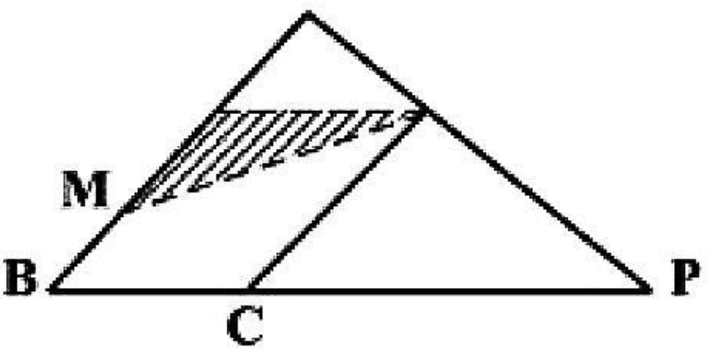
۳) ۹ ۴) ۹/۵

۳-در یک ذوزنقه پاره خطی که وسط های دو ساق را به هم وصل می کند، مساحت آن را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می کند. نسبت قاعده های آن کدام است؟(تجربی۹۸)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۴-در مثلث ABC، اضلاع $AB=۴$ ، $AC=۶$ و $BC=۷$ است. از راس C خطی موازی میانه AM رسم و امتداد BA را در نقطه D قطع کرده است.اندازه BD کدام است؟(تجربی خارج ۹۸)

۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳)
۸/۵ ۴) ۹



۵-در شکل زیر ، نقطه M وسط متوازی الاضلاع است. اگر

$PC = \frac{۲}{۳}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه زده ، چند برابر مساحت بزرگترین مثلث ها است؟(تجربی۹۶)

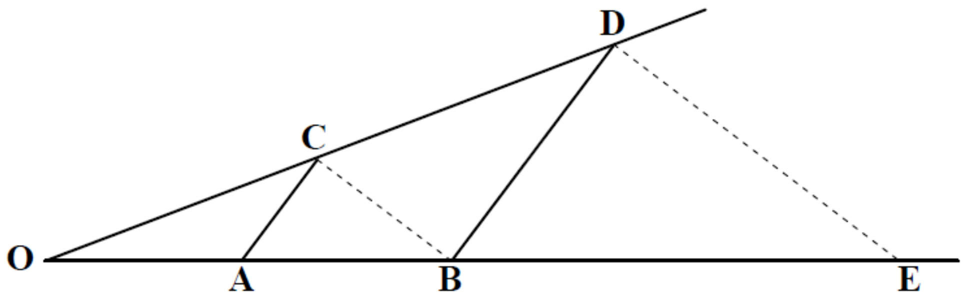
۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۶- در ذوزنقه ای اندازه قاعده ها ۶و ۹ واحد و طول ساق ها ۴ و ۵ واحد است.محیط مثلثی که از امتداد ساق ها در بیرون ذوزنقه تشکیل می شود کدام است؟ (تجربی۹۴)

۱) ۱۱/۴ ۲) ۱۱/۶ ۳) ۱۲/۲ ۴) ۱۲/۸

۷-در شکل روبرو دو جفت پاره خط موازی اند ، $OA = ۳$ و $AB = ۵$. اندازه BE کدام است؟ (تجربی خارج۹۴)

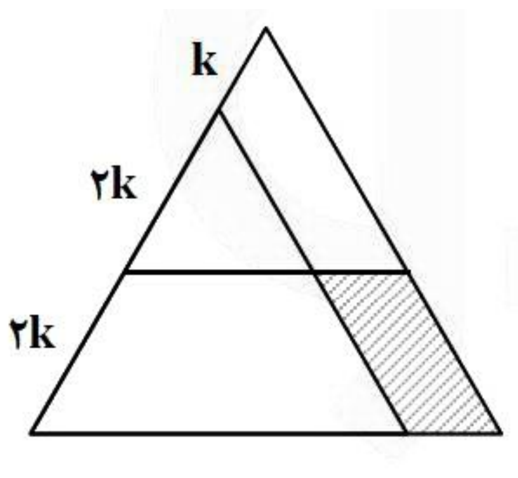


۱) $۱۳\frac{۱}{۳}$

۲) $۱۲\frac{۲}{۳}$

۳) $۱۱\frac{۱}{۳}$

۴) $۱۰\frac{۲}{۳}$



۸-در شکل روبرو ، یک ضلع مثلث متساوی الاضلاعی به نسبت های ۱ و ۲ و ۳ تقسیم شده است.مساحت متوازی الاضلاع سایه زده شده ، چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟(تجربی خارج ۹۲)

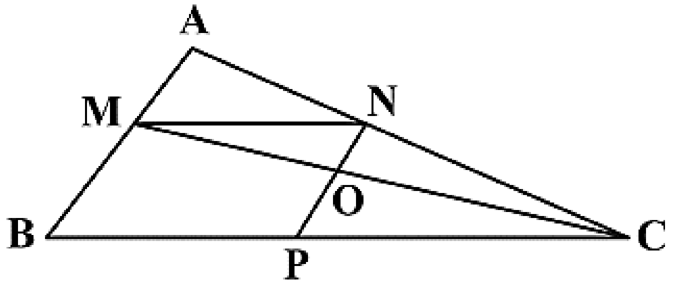
۱) ۱۶

۲) ۱۸

۳) ۲۰

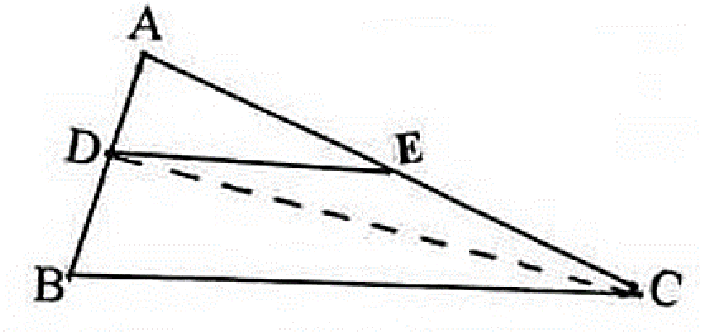
۴) ۲۴

۹- در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۳}{۷}$ و چهارضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است.مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟(تجربی ۹۰)



۱) ۶۳ ۲) ۶۰
۳) ۷۰ ۴) ۸۴

۱۰- در شکل مقابل $\frac{AD}{AB}=\frac{۳}{۷}$ و $DE||BC$. مساحت مثلث ADE چند درصد مساحت مثلث DEC است؟(تجربی۸۹)

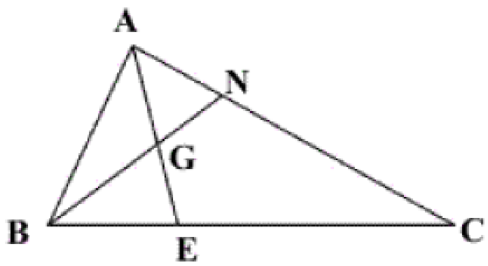


۱) ۷۰ ۲) ۷۵
۳) ۸۰ ۴) ۸۴

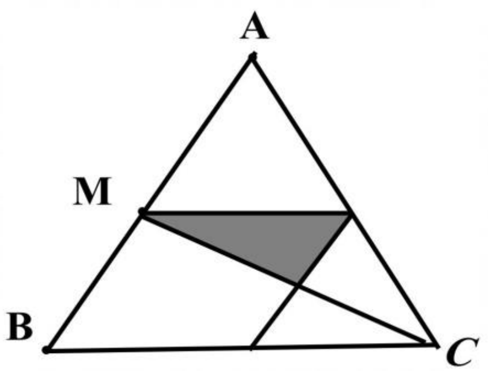
۱۱- در ذوزنقه ای به طول قاعده های ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه M متقاطعند.فاصله M از قاعده بزرگتر کدام است؟ (تجربی۸۷)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۲- در مثلث ABC،اگر $۴AN=NC$ و هم چنین $۵BE=EC$باشد آنگاه نسبت $\frac{BG}{GN}$کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$



۱۳- در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث سایه زده شده چند درصد مساحت متوازی الاضلاع است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

•پاسخ تشریحی سوالات امتحانی:

۱- الف)

$$\frac{x}{x+1}=\frac{x+3}{8}\Rightarrow (x+۱)(x+۳)=۸x\Rightarrow x^{۲}+۴x+۳-۸x=۰$$
$$\Rightarrow x^{۲}-۴x+۳=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۱\,,x=۳$$

ب) $\frac{3}{4}=\frac{x-1}{20}=\frac{21}{y+3}$

$$\frac{3}{4}=\frac{x-1}{20}\Rightarrow ۴x-۴=۶۰\Rightarrow ۴x=۶۴\Rightarrow x=۱۶$$
$$\frac{3}{4}=\frac{21}{y+3}\Rightarrow ۳y+۹=۸۴\Rightarrow ۳y=۷۵\Rightarrow y=۲۵$$

۲- الف) اگر مثلث متساوی الاضلاع باشد آنگاه سه زاویه مثلث با هم برابر خواهند بود.

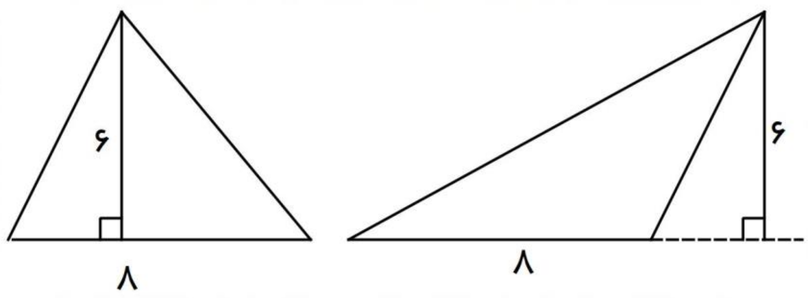
ب) در یک مثلث زاویه روبرو به ضلع بزرگتر، بزرگتر از زاویه روبرو به ضلع کوچکتر است.

پ)اگر در یک چهارضلعی ، قطرها برهم عمود باشند آنگاه آن چهارضلعی لوزی است.

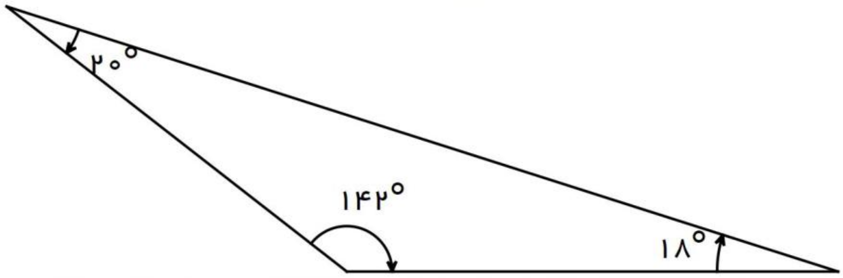
ت) اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را قطع کنند آنگاه آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

۳- الف) متوازی الاضلاع قطرهایش همدیگر را نصف می کنند ولی مستطیل نیست.

ب) دو مثلث با قاعده و ارتفاع برابر مساحت برابر دارند ولی هم نهشت نیستند.

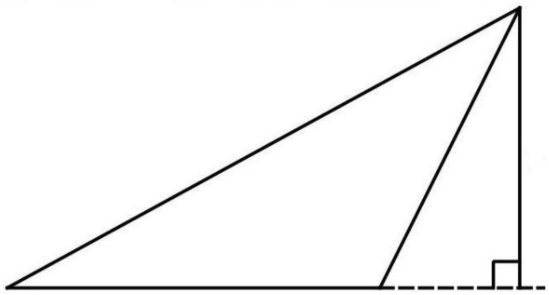


پ) در مثلث زیر بزرگترین زاویه ۱۴۲ درجه از چهار برابر کوچکترین زاویه که ۷۲ درجه است بزرگتر می باشد.

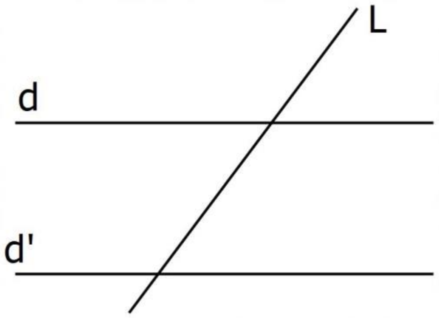


ت) در مربع زاویه داخلی و خارجی هر دو باهم برابرند.

ث)



ج) در مثلث قائم الزاویه نقطه همرسی عمودمنصف ها در وسط وتر قرار دارد.



۴- فرض کنید دو خط d و d' موازی باشند و خط L خط d را قطع کرده باشد. اگر خط L خط d' را قطع نکند(برهان خلف) پس با آن موازی است و چون دو خط موازی با خط سوم خود موازی یکدیگرند پس خط L با خط d موازی است و این تناقض با فرض مسئله است.پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

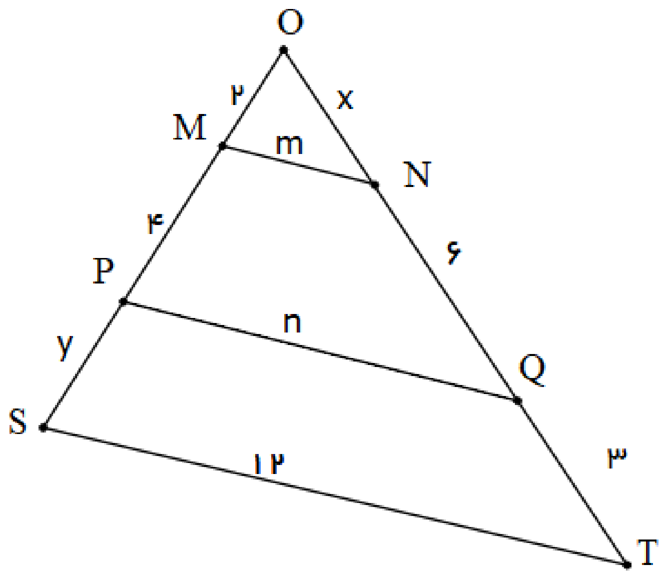
۵-

$$PQ||BC \xRightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{x-۳}{x+۱} = \frac{x}{x+۷}$$

$$\Rightarrow (x-۳)(x+۷) = x(x+۱) \Rightarrow x^۲ + ۴x - ۲۱ = x^۲ + x$$

$$\Rightarrow ۳x = ۲۱ \Rightarrow x = ۷$$

-۶



$$\frac{OM}{MP}=\frac{ON}{NQ}\Longrightarrow\frac{۲}{۴}=\frac{x}{۶}\Longrightarrow x=۳$$

$$\frac{OP}{PS}=\frac{OQ}{QT}\Longrightarrow\frac{۶}{y}=\frac{۹}{۳}\Longrightarrow y=۲$$

$$\frac{OP}{OS}=\frac{MN}{ST}\Longrightarrow\frac{۶}{۸}=\frac{n}{۱۲}\Longrightarrow n=۹$$

$$\frac{OM}{OP}=\frac{MN}{PQ}\Longrightarrow\frac{۲}{۶}=\frac{m}{۹}\Longrightarrow m=۳$$

منابع استفاده شده:

۱- کتاب درسی ریاضی ۲ چاپ پنجم ۱۴۰۰.

۲- کتاب معلم ریاضی (۲)پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه چاپ اول ۱۳۹۶

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس سوم «تشابه مثلث ها » نام طراح: جواد عسگری

اهداف یادگیری:

- درک قضیه اساسی تشابه مثلث ها و توانایی کاربرد آن در حل مسائل
- حالت های تشابه دو مثلث رابشناسد و از آنها در حل مسائل کمک بگیرد.
- روابط طولی مطرح شده را فرا گیرد و آنها را در حل مسائل به کار گیرد.

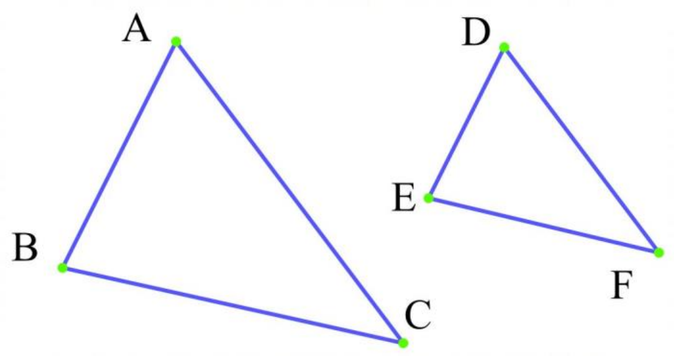
انتظارات پس از مطالعه:

- بتواند با ارتباط قضیه تالس و تشابه مثلث ها مسائل مربوطه را حل کند.
- هر یک از اجزای طولی مثلث قائم الزاویه به کمک روابط طولی آنها پیدا کند.

مثلث های متشابه :

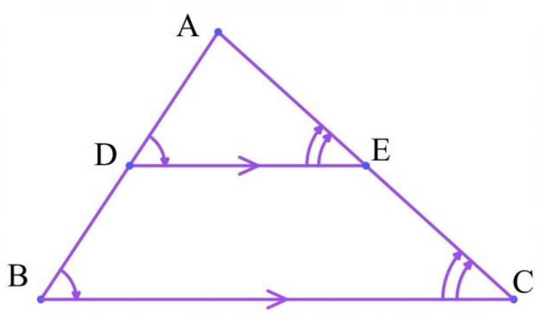
دو مثلث را متشابه گویند هرگاه زوایه های نظیر در آنها با هم برابر و اضلاع نظیر آنها متناسب باشند:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \end{cases}$$



قضیهٔ اساسی تشابه مثلث ها:

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

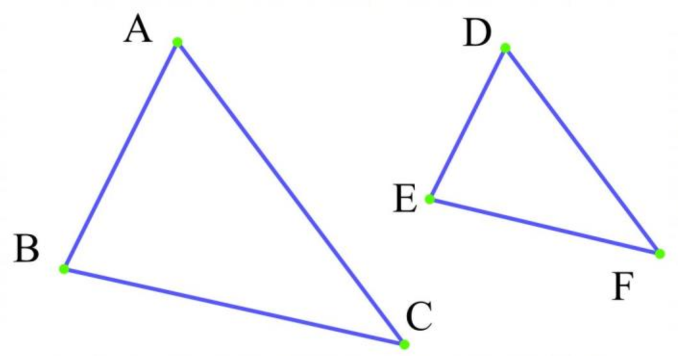


اثبات: چون $DE || BC$ طبق قضیه خطوط موازی داریم: $\hat{B} = \hat{D}, \hat{C} = \hat{E}$

همچنین طبق قضیه تالس داریم: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

درنتیجه $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

حالت های تشابه دو مثلث:



قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه اند.

$$(\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}) \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس سوم «تشابه مثلث ها » نام طراح: جواد عسگری

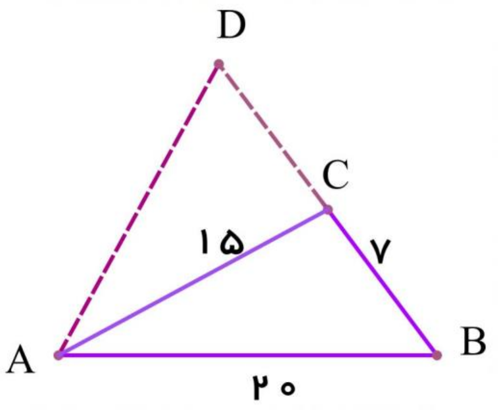
قضیه ۲: هرگاه اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه اند.

$$(\hat{A}=\hat{D}\,,\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF})\Longrightarrow \Delta ABC\sim\Delta DEF$$

قضیه ۳: هرگاه اندازه های سه ضلع از مثلثی با اندازه های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه اند.

$$(\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF})\Longrightarrow \Delta ABC\sim\Delta DEF$$

مثال: در مثلث ABC ، $AB=۲۰$ ، $BC=۷$ و $AC=۱۵$ ضلع BC را تا نقطه D امتداد می دهیم به طوری که مثلث DAB با مثلث DCA متشابه شود اندازه CD چقدر است؟



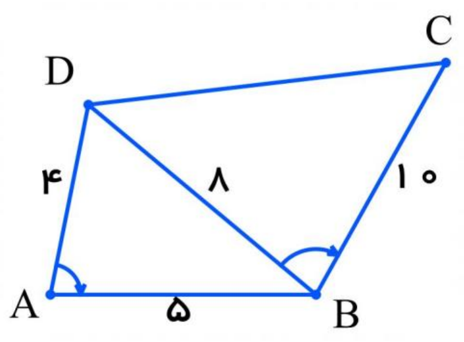
راه حل: دو مثلث DAB و DCA با داشتن زاویه مشترک $\hat{D}$ وقتی متشابه اند که $\widehat{DAB}=\widehat{DCA}$ و $\hat{B}=\widehat{CAD}$ با فرض $CD=x$ و $AD=y$ داریم:

$$\Delta DAB\sim\Delta DCA\Longrightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}$$

$$\Longrightarrow\frac{۲۰}{۱۵}=\frac{۷+x}{y}=\frac{y}{x}\Longrightarrow\begin{cases}۴x=۳y\\ ۳x+۲۱=۴y\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم}}\frac{۴x}{۳x+۲۱}=\frac{۳}{۴}\Longrightarrow ۱۶x=۹x+۶۳\Longrightarrow ۷x=۶۳\Longrightarrow x=۹$$

تست: در شکل مقابل بافرض $\hat{A}=D\hat{B}C$ محیط چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟



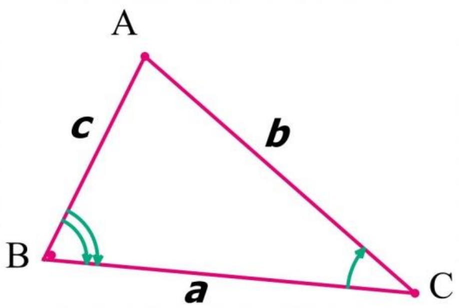
۱) ۳۵   ۲) ۳۶   ۳) ۳۴   ۴) ۳۷

راه حل: دو مثلث ABD و BCD به حالت دوم تشابه با هم متشابه هستند چون $\frac{۱}{۲}=\frac{AD}{DB}=\frac{AB}{BC}$ و $\hat{A}=D\hat{B}C$ پس $\frac{BD}{CD}=\frac{۱}{۲}$ در نتیجه $CD=۱۶$ و محیط چهارضلعی برابر ۳۵ می باشد.

فصل دوم هندسه درس سوم «تشابه مثلث ها » نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱

نکته: اگر در مثلثی زاویه ای دو برابر زاویه دیگر باشد ضلع روبرو به زاویه دو برابر ، واسطه هندسی مجموع دو ضلع دیگر و ضلع روبرو به زاویه نصف است . یعنی

$$\hat{B} = ۲\hat{C} \Longrightarrow b^۲ = (a + c).c$$



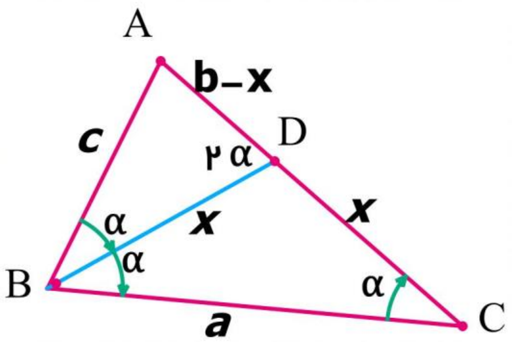
اثبات: نیمساز زاویه $\hat{B}$ را رسم می کنیم

درنتیجه $\Delta ABC \sim \Delta ABD$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{AD} \Longrightarrow \frac{b}{c} = \frac{a}{x} = \frac{c}{b-x}$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{x} = \frac{c}{b-x} = \frac{a+c}{x+b-x} = \frac{a+c}{b}$$

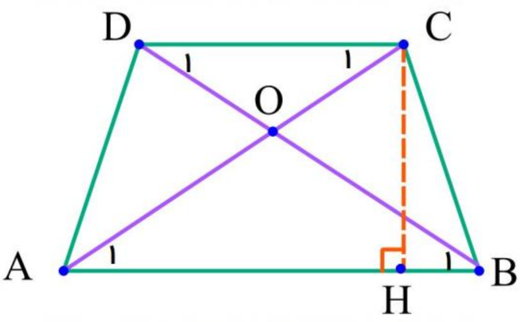
بنابراین $\frac{b}{c} = \frac{a+c}{b} \Longrightarrow b^۲ = (a + c).c$



تست: در مثلث ABC داریم: $\hat{C} = ۲\hat{A}$ و $BC = ۴۹$ و $AC = ۷۲$ اندازه ضلع AB کدام است؟

۷۷(۱ ‏ ‏ ۸۷ (۲ ‏ ‏ ۹۸ (۳ ‏ ‏ ۱۰۰ (۴

راه حل: $AB^۲ = (AC + BC) \times BC = (۷۲ + ۴۹) \times ۴۹ = ۱۲۱ \times ۴۹$ در نتیجه $AB = ۱۱ \times ۷ = ۷۷$



تست: در ذوزنقه ای با طول قاعده های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد ، مساحت محدود به دو قطر و یک ساق آن چند واحد مربع است؟(تجربی ۹۵)

۱۸(۱ ‏ ‏ ۲۰ (۲ ‏ ‏ ۲۴ (۳ ‏ ‏ ۴) ۲۸

راه حل : بنا به قضیه خطوط موازی و مورب داریم: $\hat{A}_۱ = \hat{C}_۱, \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱$ پس دو مثلث AOB و DOC متشابه اند.

$$\Delta AOB \sim \Delta DOC \Longrightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$$

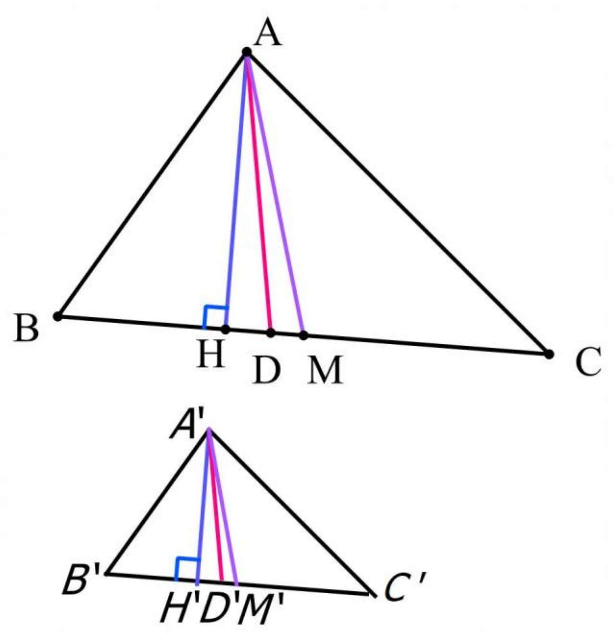
پس $OA = ۳k$ و $OC = ۲k$

دو مثلث ABC و BOC در راس B هم ارتفاع هستند پس $\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \frac{OC}{AC} = \frac{۲k}{۵k} = \frac{۲}{۵}$ درنتیجه

$$S_{BOC} = \frac{۲}{۵} \times \frac{۱}{۲} \times CE \times AB = \frac{۱}{۵} \times ۱۰ \times ۱۲ = ۲۴$$

محتوای نوشتاری **کتاب ریاضی(۲)** **سال تحصیلی** **۱۴۰۰–۱۴۰۱**	**به نام خدا** **اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی** **معاونت آموزش متوسطه** **اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی** **گروه ریاضی**	**فصل دوم** **هندسه** **درس سوم «تشابه مثلث ها »** **نام طراح: جواد عسگری**

نکته: اگر دو مثلث متشابه باشند آنگاه نسبت ارتفاع های متناظر در دو مثلث ، نسبت میانه های اضلاع متناظر در دو مثلث ، نسبت نیمسازهای زاویه های متناظر در دو مثلث و نسبت محیط های دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است و نسبت مساحت های دو مثلث برابر مجذور نسبت تشابه می باشد.



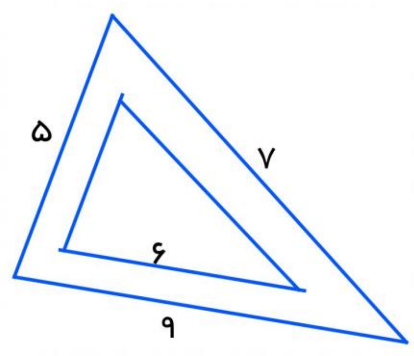
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Longrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC ، AD نیمساز زاویه Aو AM میانه ضلع BC باشد آنگاه

$$\frac{AM}{A'M'} = k \text{ ، } \frac{AD}{A'D'} = k \text{ ، } \frac{AH}{A'H'} = k$$

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right)^{۲} = k^{۲} \text{ و } \frac{P}{P'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

تست:درون مثلثی به اضلاع ۹ ، ۷ و ۵ واحد مثلث دیگری رسم می کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد. اگر بزرگترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث ، چند برابر مساحت مثلث کوچک تر است؟ (تجربی خارج ۹۵)



۱) ۰/۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

راه حل: اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر موازیند پس باهم متشابه اند.اگر مساحت مثلث بزرگ را با S و مساحت مثلث کوچک را با S' نشان دهیم داریم:

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{۶}{۹}\right)^{۲} = \frac{۴}{۹} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S'}{S-S'} = \frac{۴}{۵} \to S - S' = \frac{۵}{۴}S' = ۱/۲۵S'$$

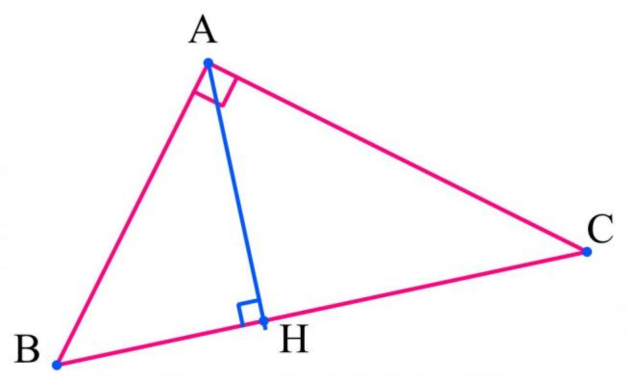
تست: مثلثی به اضلاع a ، b و ۳ با مثلثی به طول اضلاع ۵ ، ۴ و ۳ متشابه است. دو مثلث قابل انطباق نیستند . بیش ترین محیط ممکن برای مثلث اول کدام است؟(تجربی ۹۰)

۱)۷/۲ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۳/۵

راه حل: چون دو مثلث متشابه هستند پس نسبت محیط ها برابر نسبت تشابه دو مثلث است اگر نسبت تشابه دو مثلث بیش ترین مقدار را داشته باشد دراینصورت محیط مثلث اول هم بیش ترین است پس نسبت تشابه $\frac{۳}{۴}$ است پس

$$\frac{P}{P'} = \frac{۳}{۴} \rightarrow \frac{P}{۱۲} = \frac{۳}{۴} \rightarrow P = ۹$$

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه



در مثلث قائم الزاویه ABC $(\hat{A} = ۹۰)$

۱) ارتفاع AH مثلث را به دو مثلث قائم الزاویه کوچکتر تقسیم می کندکه این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه اند

$$\Delta ABC \sim \Delta ABH \sim \Delta ACH$$

۲) ارتفاع AH ، واسطه هندسی بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر BC می باشد

$$AH^۲ = BH \times CH$$

اثبات: $\sim\Delta ABH \sim \Delta ACH \Longrightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow AH^۲ = BH \times CH$

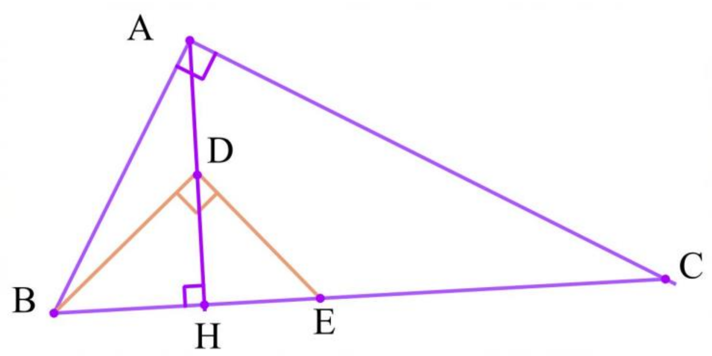
۳)هر ضلع قائمه ، واسطه هندسی بین تصویر قائم آن ضلع بر وتر و وتر می باشد یعنی

$$AC^۲ = CH \times BC \quad ، \quad AB^۲ = BH \times BC$$

اثبات: $\sim\Delta ABC \sim \Delta ACH \Longrightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC} \Longrightarrow AC^۲ = CH \times BC$

۴) اگر دو رابطه بالا را باهم جمع کنیم به رابطه فیثاغورس می رسیم.

$$AB^۲ + AC^۲ = BC \times (BH \times CH) = BC^۲$$



مثال: در شکل مقابل مثلث ABC در راس A قائمه است و نقطه D روی ارتفاع AH چنان است که $B\widehat{D}E = ۹۰$. اگر $HE = ۱$ و $AD = BH = ۹$ باشد طول پاره خط CE را بدست آورید.

راه حل :

در مثلث BDE، DH ارتفاع وارد بر وتر BE است پس

$DH^۲ = BH \times EH \Longrightarrow DH^۲ = ۹ \times ۱ = ۹ \Longrightarrow DH = ۳$

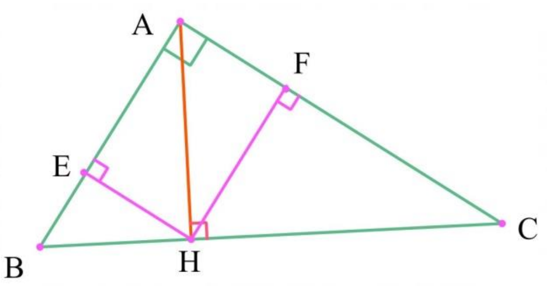
و در مثلث ABC، AH ارتفاع وارد بر وتر BC است پس $AH^۲ = BH \times CH \Longrightarrow (AD + DH)^۲ = BH \times CH$

$\Longrightarrow (۹ + ۳)^۲ = ۹ \times CH \Longrightarrow CH = \frac{۱۴۴}{۹} = ۱۶$

$\Longrightarrow CE = CH - HE = ۱۶ - ۱ = ۱۵$

تست: در مثلث ABC $(\hat{A} = ۹۰)$، ارتفاع AH مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می کند.مساحت مثلث اصلی ۶/۷۶ برابر مساحت مثلث کوچکتر است.نسبت فواصل H از دو ضلع قائم کدام است؟(تجربی ۹۱)

۱) $\frac{۲}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$



راه حل:

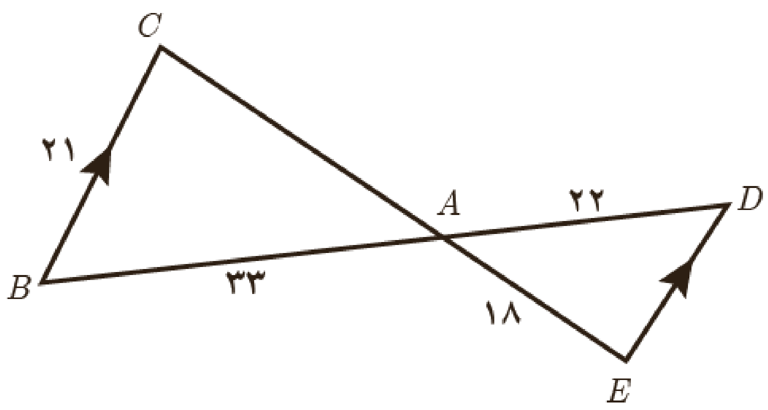
مثلث های ABC ، ABH و ACH متشابه اند پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = ۶/۷۶ \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{S_{ACH}}{S_{ABH}} = ۵/۷۶ = (\frac{FH}{EH})^۲ \to \frac{FH}{EH} = ۲/۴ = \frac{۱۲}{۵}$$

پاسخ فعالیت ها، کاردر کلاس ها و تمرینات کتاب:

• کار در کلاس صفحه ۴۳ کتاب:

۱- در شکل مقابل $BC||DE$.



اندازهٔ پاره خط CA , DE را به دست آورید.

بنابر قضیه خطوط موازی $BC||DE$, BD مورب پس

$\hat{B} = \hat{D}$

بنابر قضیه خطوط موازی $BC||DE$, CE مورب پس

$\hat{C} = \hat{E}$

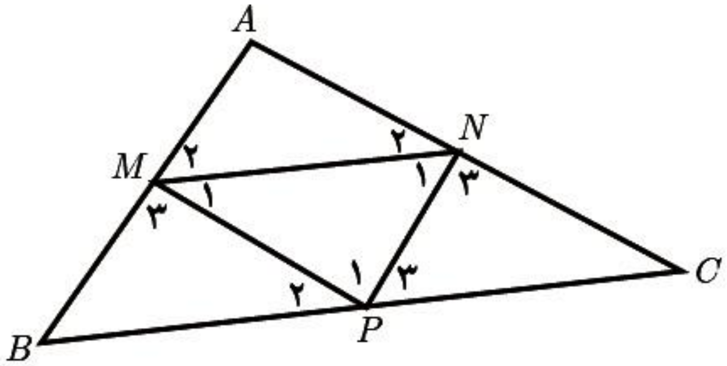
پس بنا بر قضیهٔ (۱) تشابه دو مثلث ABC , ADE به حالت برابر بودن دو زاویه با هم متشابه اند. در نتیجه می توانیم برای آن ها نسبت تشابه بنویسیم:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{AC}{۱۸} = \frac{۳۳}{۲۲} = \frac{۲۱}{DE} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AC}{۱۸} = \frac{۳۳}{۲۲} \Rightarrow AC = ۲۷ \\ \frac{۳۳}{۲۲} = \frac{۲۱}{DE} \Rightarrow DE = ۱۴ \end{cases}$$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱—۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس سوم «تشابه مثلث ها » نام طراح: جواد عسگری

۲- اگر نقاط $M\ ,N\ ,P$ مطابق شکل وسط های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث های ABC و MNP متشابه اند.

حل:



الف) $MP||AC\ ,NP||AB, MN||BC$ چرا؟

قبلا ثابت کرده ایم که هرگاه پاره خطی وسط دو ضلع مثلث را به هم وصل کند با ضلع سوم موازی و نصف آن است.

ب) بنابراین $\widehat{N}_۱=\widehat{P}_۳=\widehat{B}\ ,\widehat{M}_۱=\widehat{P}_۲=\widehat{C}$ (چرا؟)

بنا بر قضیه خطوط موازی $MN||BC$ و NP مورب پس $\widehat{N}_۱=\widehat{P}_۳$ (۱)

همچنین $MN||BP$ و $MN||NP$ پس چهارضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است در نتیجه: $\widehat{N}_۱=\widehat{B}$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم: $\widehat{N}_۱=\widehat{P}_۳=\widehat{B}$

بنا بر قضیه خطوط موازی $MN||BC$ و MP مورب پس $\widehat{M}_۱=\widehat{P}_۲$ (۳)

همچنین $MN||PC$ و $MP||NC$ پس چهارضلعی $MNCP$ متوازی الاضلاع است در نتیجه: $\widehat{M}_۱=\widehat{C}$ (۴)

از (۳) و (۴) نتیجه می گیریم: $\widehat{M}_۱=\widehat{P}_۲=\widehat{C}$

از (ب) دربارهٔ مثلث های مورد نظر چه نتیجه ای می توان گرفت؟

$\widehat{N}_۱=\widehat{B}$ و $\widehat{M}_۱=\widehat{C}$ پس بنابر قضیهٔ ۱ تشابه این دو مثلث متشابه اند.

۳- اگر سه مثلث ABC و $A'B'C'$ و $A''B''C''$ به گونه ای باشند که $\overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{A'B'C'}$ و $\overset{\triangle}{A'B'C'}\sim\overset{\triangle}{A''B''C''}$ ، دربارهٔ دو مثلث ABC و $A''B''C''$ چه می توان گفت؟ چرا؟

اگر $\overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{A'B'C'}$ پس بنا به تعریف تشابه دو مثلث زوایای نظیر با هم برابرند.

$\hat{C}=\hat{C}'\ ,\hat{B}=\hat{B}'\ ,\hat{A}\ =\hat{A}'$ (۱)

اگر $\overset{\triangle}{A'B'C'}\sim\overset{\triangle}{A''B''C''}$ پس بنا به تعریف تشابه دو مثلث زوایای نظیر با هم برابرند.

$\hat{C}'=\hat{C}''\ ,\hat{B}'=\hat{B}''\ ,\hat{A}'\ =\hat{A}''$ (۲)

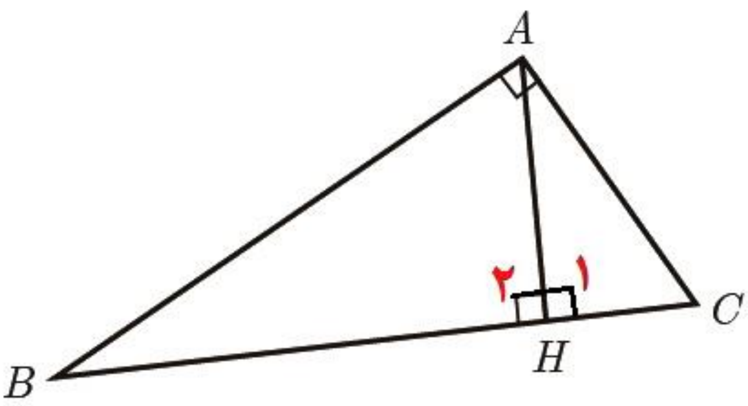
از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم: $\hat{B}=\hat{B}''\ ,\hat{A}\ =\hat{A}''$ پس بنا بر قضیه (۱) تشابه داریم:

$\overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{A'B'C'}$

محتوای نوشتاری	**به نام خدا**	**فصل دوم**
کتاب ریاضی(۲)	**اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی**	**هندسه**
سال تحصیلی	**معاونت آموزش متوسطه**	**درس سوم «تشابه مثلث ها »**
۱۴۰۰–۱۴۰۱	**اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی**	**نام طراح: جواد عسگری**
	گروه ریاضی	

• فعالیت صفحه ۴۴ کتاب:

فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.



۱- نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AHC}$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \widehat{H}_۱ = ۹۰ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه (۱) تشابه}} ABC \sim AHC$$

۲- نشان دهید دو زاویهٔ مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید:

$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AHB}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \widehat{H}_۲ = ۹۰ \\ \hat{B} = \hat{B} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه (۱) تشابه}} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AHB}$$

۳- از (۱) و (۲) دربارهٔ مثلث های AHB , AHC چه نتیجه ای می گیرید؟

با توجه به کار در کلاس قبلی نتیجه می شود که $\overset{\triangle}{AHB} \sim \overset{\triangle}{AHC}$

۴-

$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow AC^۲ = HC \times BC$$

۵-

$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AHB} \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow AB^۲ = HB \times BC$$

۶-

$$\overset{\triangle}{AHB} \sim \overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{AB} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^۲ = HB \times HC$$

۷- با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید.

$$AC^{۲} + AB^{۲} = HC \times BC + HB \times BC = BC\left(\underbrace{HC + HB}_{BC}\right) = BC \times BC \Rightarrow AC^{۲} + AB^{۲} = BC^{۲}$$

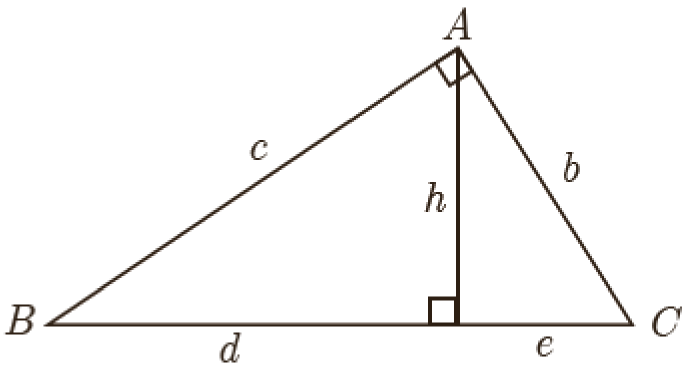
۸- مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر کام کنید.

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH.BC \\ S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB.AC \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{۲}AH.BC = \frac{۱}{۲}AB.AC \rightarrow AH.BC \Rightarrow AH.BC = AB.AC$$

$$AB \times AC = AH \times BC$$

• کار در کلاس صفحه ۴۵ کتاب:

در مثلث قائم الزاویهٔ مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



۱) $h = ۵$ $\quad d = ۷$ $\quad e = ?$

$$h^{۲} = de \Rightarrow ۲۵ = ۷e \Rightarrow e = \frac{۲۵}{۷}$$

۲) $d = ۵$ $\quad e = ۳$ $\quad b = ?$ $\quad c = ?$

$$c^{۲} = \mathrm{d}(d + e) \Rightarrow c^{۲} = ۵(۵ + ۳) = ۴۰ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۱۰}$$

$$b^{۲} = \mathrm{e}(d + e) \Rightarrow b^{۲} = ۳(۵ + ۳) = ۲۴ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۶}$$

۳- $c = ۸$ $\quad b = ۶$ $\quad h = ?$

$$BC = \sqrt{۳۶ + ۶۴ = ۱۰}$$

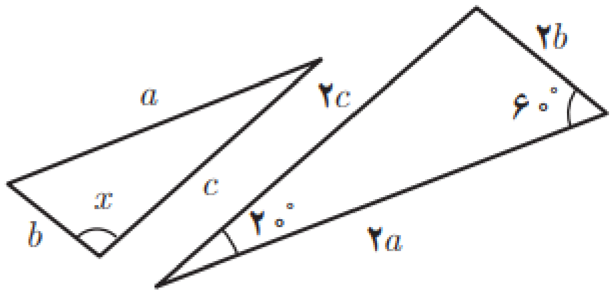
$$bc = h.BC \Rightarrow ۶ \times ۸ = ۱۰h \Rightarrow h = \frac{۴۸}{۱۰}$$

فصل دوم هندسه درس سوم «تشابه مثلث ها » نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱

● تمرینات صفحه ۴۵ و ۴۶ کتاب

۱- در هر قسمت تشابه مثلثها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید.

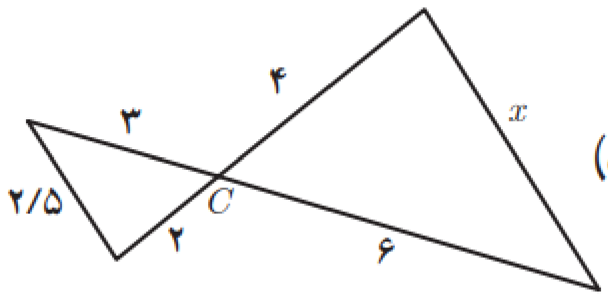
الف)



چون $\frac{۲c}{c} = \frac{۲b}{b} = \frac{۲a}{a}$ پس دو مثلث به حالت تناسب سه ضلع متشابه هستند.و

$$x = ۱۸۰ - (۲۰ + ۶۰) = ۱۰۰$$

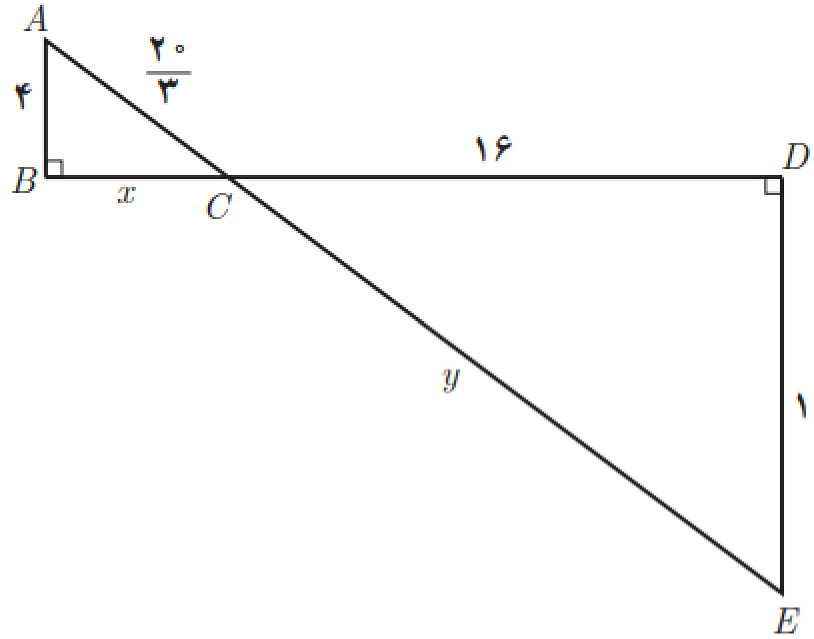
ب)



چون $\frac{۳}{۶} = \frac{۲}{۴}$ و $\hat{C}_۲ = \hat{C}_۱$ پس دو مثلث به حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین آن دو ضلع متشابه هستند.

$$\frac{۲}{۴} = \frac{۳}{۶} = \frac{۲.۵}{x} \Longrightarrow x = ۵$$

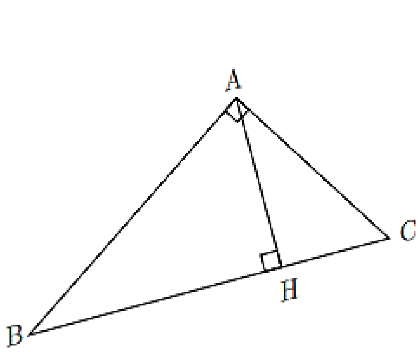
پ)



چون $\hat{B} = \hat{D} = ۹۰^\circ$ و $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$ پس دو مثلث به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند.

$$\frac{۴}{۱۲} = \frac{x}{۱۶} = \frac{\frac{۲۰}{۳}}{y} \Longrightarrow x = \frac{۱۶}{۳}\ , y = ۲۰$$

۲- در مثلث قائم الزاویه در هر حالت، اندازه پاره خط خواسته شده را به دست آورید .



الف) $BC = ۱۰$ ، $BH = ۹$ ، $AB = ?$ ، $AH = ?$ ، $AC = ?$

$$CH = ۱۰ - ۹ = ۱$$

$$AH^۲ = BH \times CH = ۹ \times ۱ = ۹ \Longrightarrow AH = ۳$$

$$AB^۲ = BH \times BC = ۹ \times ۱۰ = ۹۰ \Longrightarrow AB = ۳\sqrt{۱۰}$$

$$AC^۲ = CH \times CB = ۱ \times ۱۰ = ۱۰ \Longrightarrow AC = \sqrt{۱۰}$$

ب) $CH = ۲$ ، $AC = ۵$ ، $AB = ?$ ، $AH = ?$ ، $BC = ?$

$$AC^۲ = CH \times CB \Longrightarrow ۵^۲ = ۲ \times CB \Longrightarrow BC = \frac{۲۵}{۲}$$

$$BH = BC - CH = \frac{۲۵}{۲} - ۲ = \frac{۲۱}{۲}$$

$$AH^{۲} = BH \times CH = \frac{۲۱}{۲} \times ۲ = ۲۱ \Longrightarrow AH = \sqrt{۲۱}$$

$$AB^{۲} = BH \times BC = \frac{۲۱}{۲} \times \frac{۲۵}{۲} = \frac{۲۵ \times ۲۱}{۴} \Longrightarrow AB = \frac{۵}{۲}\sqrt{۲۱}$$

ت) $AB = ۸$ ، $AC = ۶$ ، $BC = ?$ ، $AH = ?$

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} \Longrightarrow BC^{۲} = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰ \Longrightarrow BC = ۱۰$$

$$AB \times AC = BC \times AH \Longrightarrow ۸ \times ۶ = ۱۰ \times AH \Longrightarrow AH = \frac{۱۲}{۵}$$

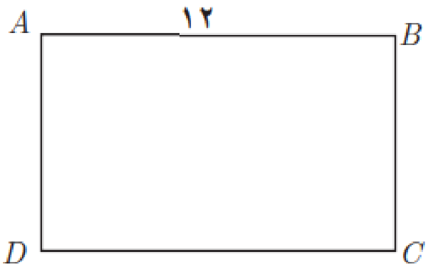
ت) $AB = ۱۲$ ، $AH = ۶$ ، $BC = ?$ ، $BH = ?$ ، $AC = ?$

$$AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲} \Longrightarrow ۱۲^{۲} = ۶^{۲} + BH^{۲} \Longrightarrow BH^{۲} = ۱۰۸ \Longrightarrow BH = ۶\sqrt{۳}$$

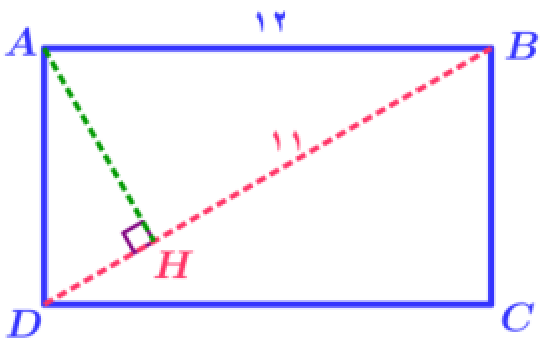
$$AB^{۲} = BH \times BC \Longrightarrow ۱۲^{۲} = ۶\sqrt{۳} \times BC \Longrightarrow BC = ۸\sqrt{۳}$$

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} \Longrightarrow \left(۸\sqrt{۳}\right)^{۲} = ۱۲^{۲} + AC^{۲}$$

$$\Longrightarrow AC^{۲} = ۴۸ \Longrightarrow AC = ۴\sqrt{۳}$$



۳- شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطه ی A عمودی بر قطر BD رسم می کنیم و پای عمود را H می نامیم اگر طول BH برابر ۱۱ باشد اندازه ی عمود رسم شده وطول قطر مستطیل و عرض مستطیل را محاسبه کنید.



$$AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲} \Longrightarrow ۱۲^{۲} = ۱۱^{۲} + AH^{۲}$$

$$\Longrightarrow AH^{۲} = ۲۳ \Longrightarrow AH = \sqrt{۲۳}$$

$$AH^{۲} = BH \times DH \Longrightarrow$$

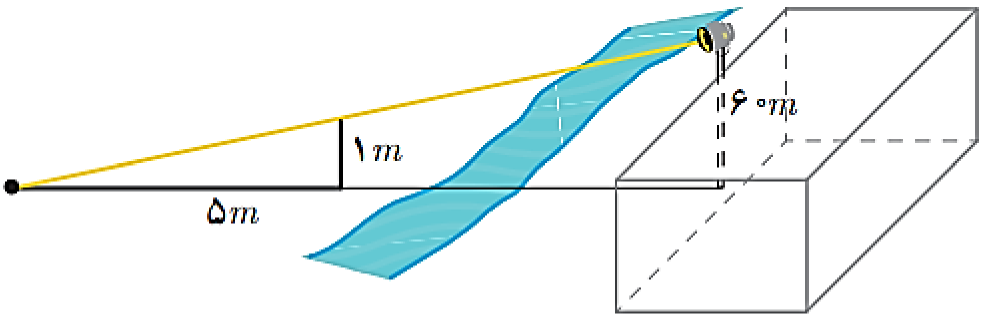
$$(\sqrt{۲۳})^{۲} = ۱۱ \times DH \Longrightarrow DH = \frac{۲۳}{۱۱}$$

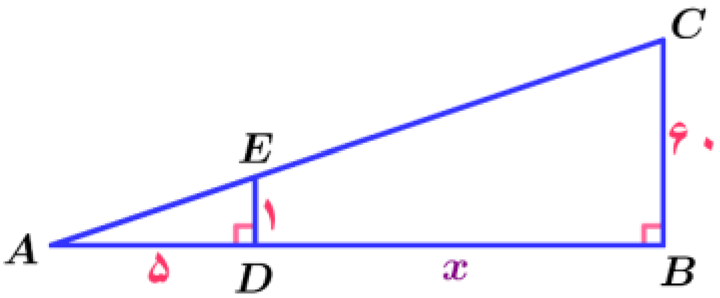
$$BD = BH + DH = ۱۱ + \frac{۲۳}{۱۱} = \frac{۱۲۱+۲۳}{۱۱} = \frac{۱۴۴}{۱۱}$$

$$AD^{۲} = DH \times DB \Longrightarrow AD^{۲} = \frac{۲۳}{۱۱} \times \frac{۱۴۴}{۱۱} \Longrightarrow BC = \frac{۱۲}{۱۱}\sqrt{۲۳}$$

فصل دوم هندسه درس سوم «تشابه مثلث ها » نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱

۴- بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل)قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می خواهد فاصله نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر خود را روی زمین قرار می دهد و مشاهده می کند که طول سایه این مرد تا پایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد را تا پای نورافکن چقدر است؟



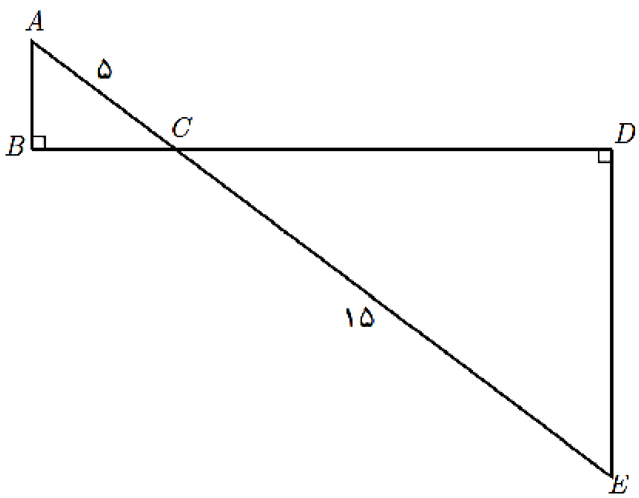


چون $\hat{B} = \hat{D} = ۹۰^\circ$ و زاویه $\hat{A}$ مشترک پس بنا به حالت برابری دو زاویه این دو مثلث ADE و ABC متشابه اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. لذا داریم:

$$\frac{۵}{۵+x} = \frac{۱}{۶۰} \Longrightarrow ۵ + x = ۳۰۰ \Longrightarrow x = ۲۹۵$$

و $AB = ۳۰۰$

۵- در شکل مقابل دو مثلث قائم الزاویه مشاهده می کنید. نسبت محیط ها و مساحتهای آنها را به دست آورید.



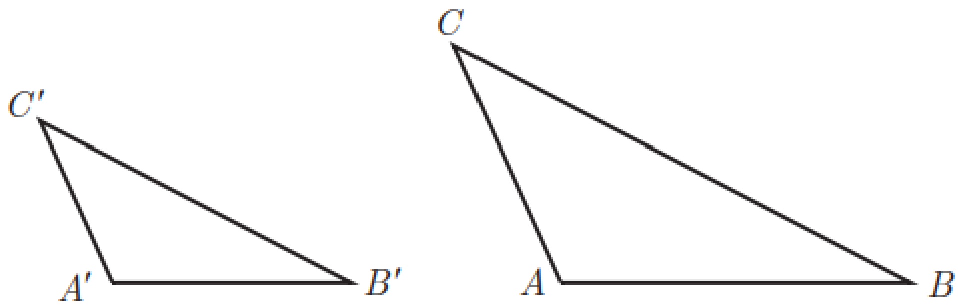
چون $\hat{B}=\hat{D}=۹۰^\circ$ و $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$ پس دو مثلث به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند.

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{CD}=\frac{AC}{CE}=\frac{۱}{۳}\Longrightarrow DE=۳AB\,,CD=۳BC\,,CE=۳AC$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEC}}=\frac{AB+AC+BC}{DE+CE+CD}=\frac{AB+AC+BC}{۳AB+۳AC+۳BC}=\frac{AB+AC+BC}{۳(AB+AC+BC)}=\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{۱}{۲}AB\times BC}{\frac{۱}{۲}DE\times CD}=\frac{AB\times BC}{۳AB\times ۳BC}=\frac{۱}{۹}$$

۶- دو مثلث متشابه ABC و A′B′C′ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید؛ به گونه ای که $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=K$. حال ا رتفاعهای AH و A′H′ را در دو مثلث رسم کنید .



الف) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را به دست آورید.

ب) نسبت مساحت های $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ را محاسبه کنید.

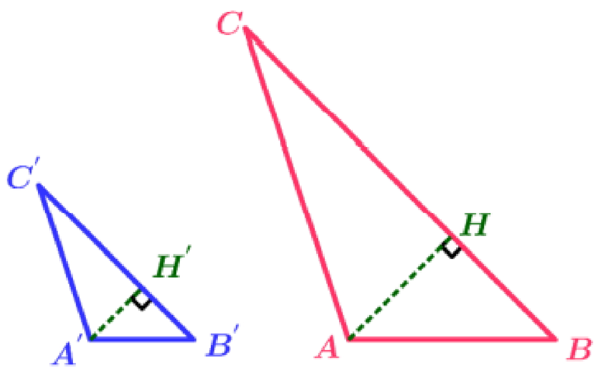
پ) نسبت محیط های دو مثلث ABC وA′B′C′ را به دست آورید.

جواب: چون دو مثلث ABC و A′B′C′ متشابه اند پس داریم:

$$\hat{A}=\hat{A'}\ ،\hat{B}=\hat{B'}\ \text{و}\ \hat{C}=\hat{C'}\ \text{و}\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$

الف) چون $\hat{B}=\hat{B'}$ و $\hat{H}=\hat{H'}$ پس بنا به حالت برابری دو زاویه این دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه اند.پس

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BH}{B'H'}=\frac{AH}{A'H'}\ ,\frac{AB}{A'B'}=K\Longrightarrow\frac{AH}{A'H'}=K$$



ب)

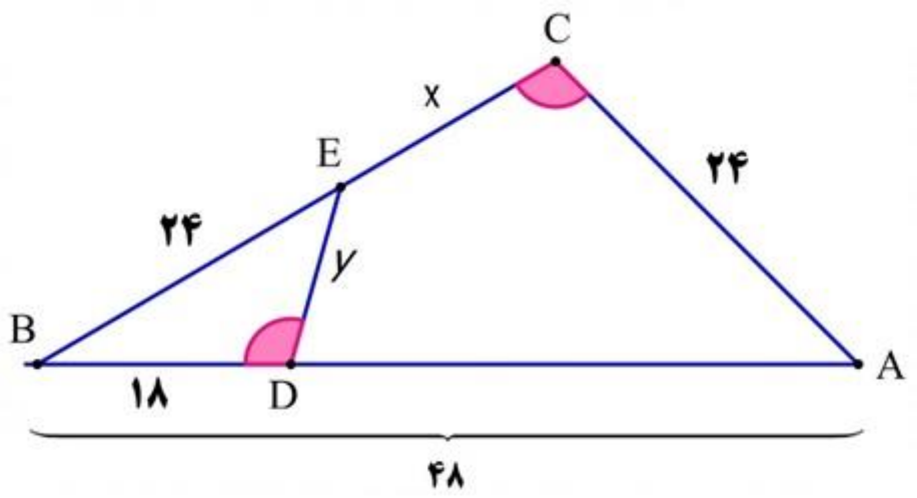
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BH}{\frac{۱}{۲}A'H'\times B'H'}=\frac{AH}{A'H'}\times\frac{BH}{B'H'}=K\times K=K^۲$$

پ)

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = K \Longrightarrow \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = K \Longrightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = K$$

سوالات امتحانی پر تکرارو مهم (نهایی/ کنکور/داخلی):

۱- در شکل روبرو $\hat{C} = B\widehat{D}E$ مقدار x و y را بیابید.

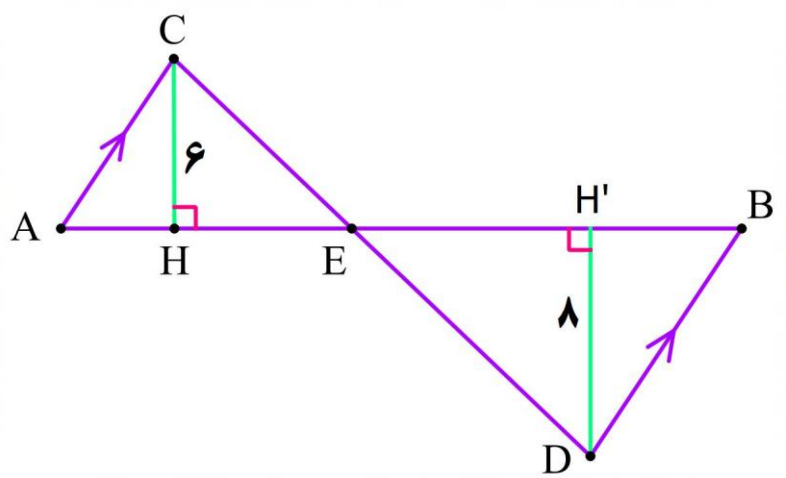


۲- مثلث ABCو مثلث $A'B'C'$ متشابه اند. اگر طول ضلع های مثلث ABC برابر ۱۱ و ۸ و ۵ سانتی متر باشد و محیط مثلث $A'B'C'$ برابر ۶۰ سانتی متر باشد. طول ضلع های مثلث $A'B'C'$ را بدست آورید.

۳- محیط های دو مثلث متشابه ۱۵ و ۲۵ سانتی متر است. اگر مساحت مثلث کوچک ۲۷ سانتی متر مربع باشد مساحت مثلث بزرگ را بدست آورید.

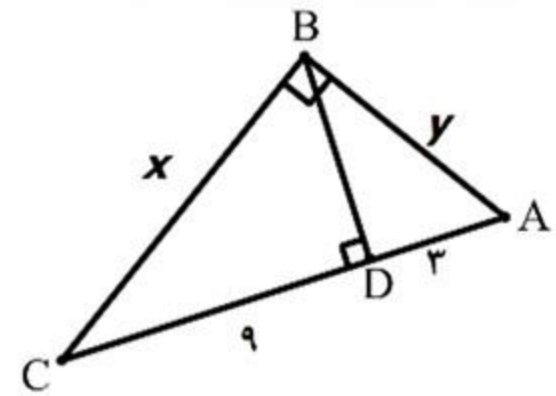
محتوای نوشتاری **کتاب ریاضی(۲)** **سال تحصیلی** **۱۴۰۱–۱۴۰۰**	**به نام خدا** **اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی** **معاونت آموزش متوسطه** **اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی** **گروه ریاضی**	**فصل دوم** **هندسه** **درس سوم «تشابه مثلث ها »** **نام طراح: جواد عسگری**

۴- با توجه به اندازه های روی شکل و$\mathrm{AB} = ۳۵$ مساحت دو مثلث ACE وBDE را بیابید.



۵- در متوازی الاضلاع $ABCD$ نقطه ی M وسط ضلع CD است اگر قطر AC پاره خط BM را در نقطه N قطع کند نسبت مساحت مثلث MCN به مساحت مثلث ANB را بدست آورید.

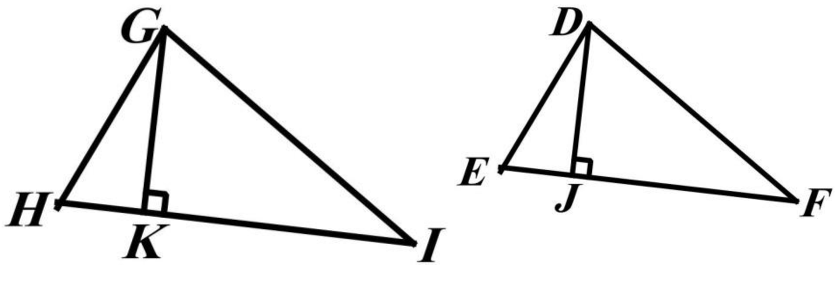
۶- در مثلث قائم الزاویه زیر موارد مجهول را بیابید.



۷- در یک مثلث قائم الزاویه با رسم ارتفاع وارد بر وتر قطعاتی به طول ۳ و ۱۲ پدید آمده است. طول کوچکترین ضلع این مثلث چقدر است؟

۸- در شکل زیر دو مثلث DEF و GHIمتشابه اند.

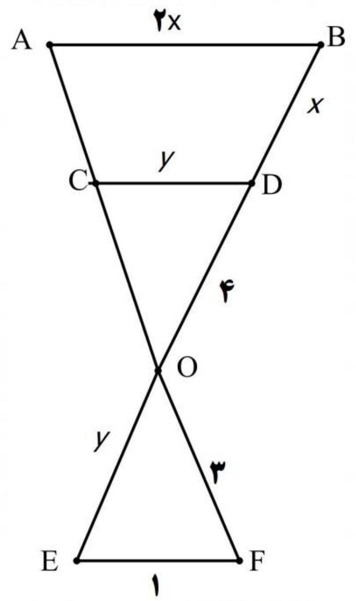
و$GK = \frac{۳}{۲}DJ$ اگر$HI = ۲۰$ طول EF را حساب کنید.



محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل دوم
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسه
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس سوم «تشابه مثلث ها »
۱۴۰۰–۱۴۰۱	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	نام طراح: جواد عسگری
	گروه ریاضی	

سوالات تستی و کنکور:

۱- درشکل زیر AB ، CD و EF موازی هستند.. طول پاره خط AC کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)



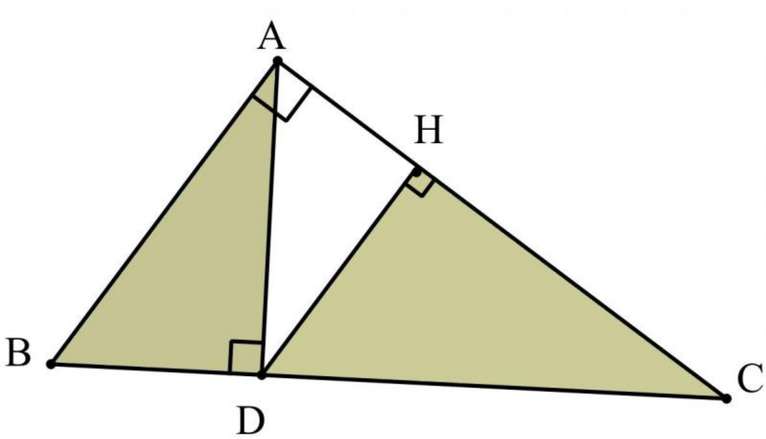
۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) ۲

۴) ۳

۲- در مثلث قائم الزاویه ABC، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{۳}$ و $AC = ۲$ است. نسبت مساحت های دو مثلث قائم الزاویه HCD و ABD کدام است؟(تجربی۹۹)



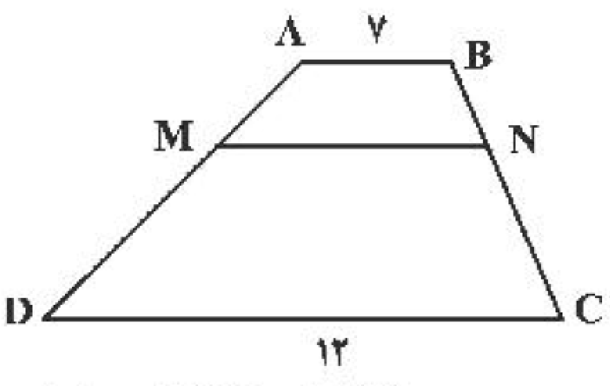
۱) $\frac{۳}{۷}$

۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) $\frac{۱۶}{۲۱}$

۴) $\frac{۸}{۹}$

۳- در شکل زیر AD نیمساز زاویه A و $CE = CD$ است.نسبت مساحت های دو مثلث ABD و ACE کدام است؟(تجربی خارج۹۹)



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

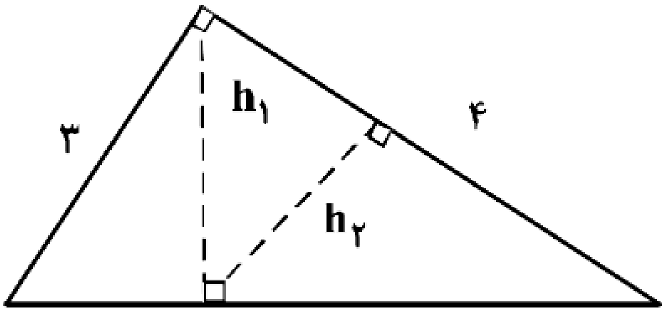
۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴- در مثلث قائم الزاویه ABCاضلاع قائم $AB = ۳\sqrt{۵}$ ، $AC = ۶$، ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است.مساحت مثلث ABC

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس سوم «تشابه مثلث ها » نام طراح: جواد عسگری

چند برابر مساحت مثلث AMH است؟(تجربی۹۸)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸



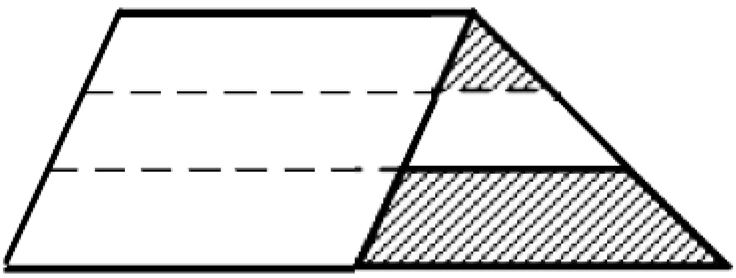
۵-در شکل زیر، $h_۱$ و $h_۲$ ارتفاع های دو مثلث قائم الزاویه هستند.

نسبت $\frac{h_۲}{h_۱}$ کدام است؟(تجربی۹۸)

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۶-یک ساق ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است.هر چهار پاره خط موازی یکدیگرند. نسبت مساحت های سایه زده شده کدام است؟(تجربی خارج ۹۸)

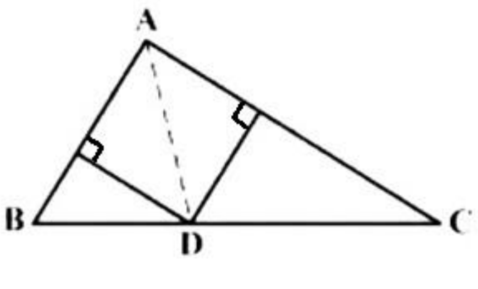


۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۷-در مستطیل $ABCD$ به طول $AB = ۱۷$، از نقطه A عمود AH بر قطر BD رسم شده است.اگر $BH = ۱۵$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹چقدر بیشتر است؟(تجربی خارج ۹۸)

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$



۸- **در** مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد ، طول نیمساز داخلی زاویه ی قائمه کدام است؟(تجربی۹۵)

۱) $۱/۴\sqrt{۲}$ ۲) $۲/۱$

۳) $۲/۸$ ۴) $۲/۱\sqrt{۲}$

۹-در ذوزنقه ای با طول قاعده های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت محدود به دو قطر و یک ساق آن ، چند واحد مربع است؟(تجربی ۹۵)

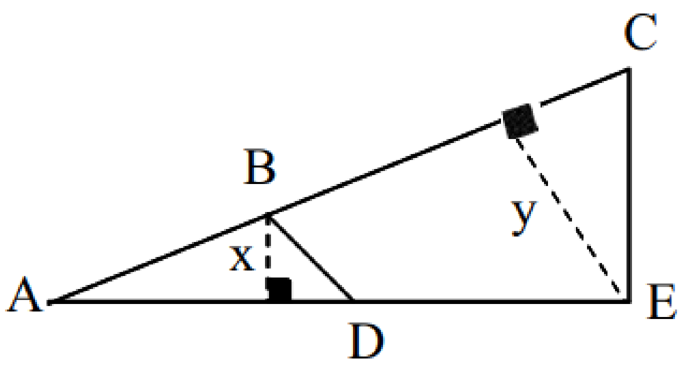
۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۱۰-درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد ، مثلث دیگری طوری رسم می کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد.اگر بزرگترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟(تجربی خارج ۹۵)

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

۱۱- درشکل مقابل $AD = ۸$ ،$DE = ۴$ ،$AB = ۶$ ،$BC = ۱۰$

نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟(تجربی۸۵)

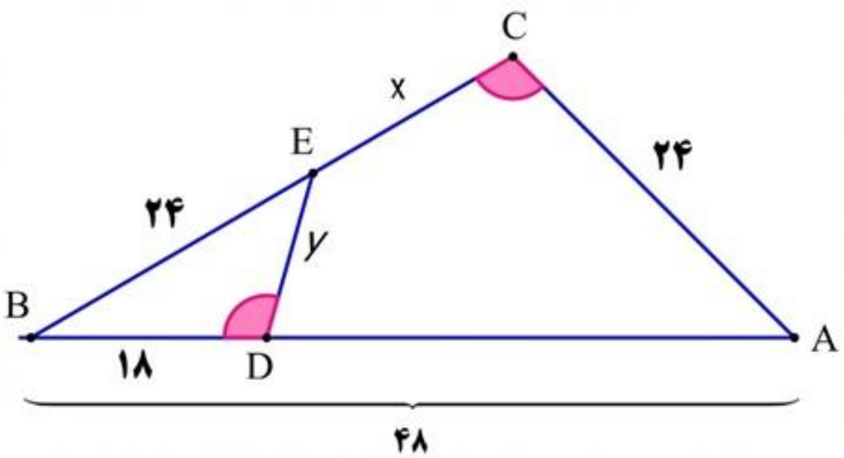


۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

• **پاسخ تشریحی سوالات امتحانی:**

۱-



$$\hat{B} = \hat{B} \,, \hat{C} = B\hat{D}E \implies \Delta ABC \sim \Delta BDE$$

$$\implies \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{AB} = \frac{BD}{BC} \implies \frac{y}{۲۴} = \frac{۲۴}{۴۸} = \frac{۱۸}{۲۴ + x}$$

$$\frac{y}{۲۴} = \frac{۱}{۲} \implies y = ۱۲$$

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱۸}{۲۴ + x} \Longrightarrow ۲۴ + x = ۳۶ \Longrightarrow x = ۱۲$$

۲- محیط مثلث ΔABC برابر است با: $۲۴ = ۱۱ + ۸ + ۵$

در دو مثلث متشابه نسبت محیط های دو مثلث برابر نسبت تشابه است پس:

$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Longrightarrow \frac{۲۴}{۶۰} = \frac{۵}{a'} = \frac{۸}{b'} = \frac{۱۱}{c'}$$
$$\Longrightarrow a' = \frac{۲۵}{۲},\ \ b' = ۲۰\ , c' = \frac{۵۵}{۲}$$

۳- داریم:

$\frac{a}{a'} = \frac{P}{P'}$ و $\frac{S}{S'} = (\frac{a}{a'})^۲$ درنتیجه خواهیم داشت: $\frac{۹}{۲۵} = (\frac{۱۵}{۲۵})^۲ = \frac{۲۷}{S'}$ پس $S' = ۷۵$

۴- دو مثلث ΔACE و $\Delta \mathrm{BDE}$ با داشتن دو زاویه مساوی متشابه هستند.

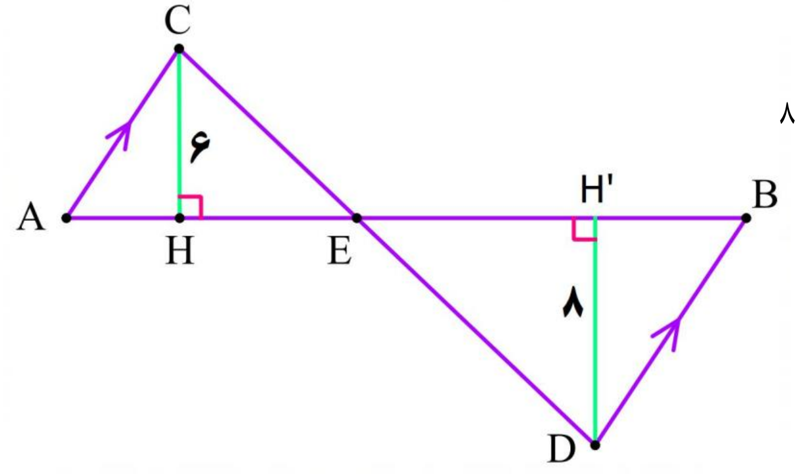
$$(\hat{E}_۱ = \hat{E}_۲\ , AC || BD \Longrightarrow\ \hat{C} = \hat{D})$$

$$\Delta ACE \sim \Delta \mathrm{BDE} \Longrightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{CH}{DH'} \Longrightarrow \frac{x}{۳۵ - x} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$$
$$\Longrightarrow ۴x = ۱۰۵ - ۳x \Longrightarrow ۷x = ۱۰۵ \Longrightarrow x = ۱۵$$

پس $AE = ۱۵$ و $BE = ۲۰$

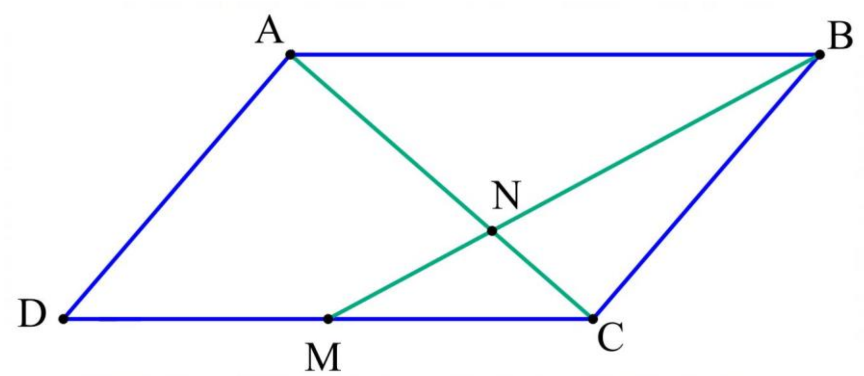
$$S_{ACE} = \frac{۱}{۲} AE \times CH = \frac{۱}{۲} \times ۱۵ \times ۶ = ۴۵$$

$$S_{BDE} = \frac{۱}{۲} BE \times DH' = \frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times ۸ = ۸۰$$



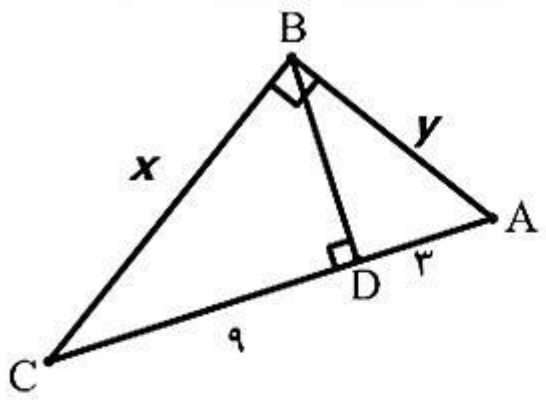
فصل دوم هندسه درس سوم «تشابه مثلث ها » نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱

۵-



$$\Delta ANB \sim \Delta CMN \Longrightarrow \frac{S_{CMN}}{S_{ANB}} = \left(\frac{MC}{AB}\right)^{۲} = \left(\frac{\frac{۱}{۲}DC}{AB}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴}$$

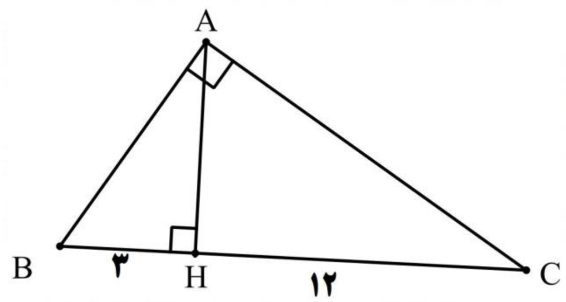
۶-



$$BD^{۲} = CD \times DA$$
$$\Longrightarrow BD^{۲} = ۹ \times ۳ = ۲۷ \Longrightarrow BD = ۳\sqrt{۳}$$

$$BC^{۲} = CD \times CA$$
$$\Longrightarrow x^{۲} = ۹ \times ۱۲ \Longrightarrow x = ۶\sqrt{۳}$$
$$AB^{۲} = AD \times AC$$
$$\Longrightarrow y^{۲} = ۳ \times ۱۲ \Longrightarrow y = ۶$$

۷-



$$AH^{۲} = BH \times HC$$
$$\Longrightarrow AH^{۲} = ۳ \times ۱۲ = ۳۶ \Longrightarrow AH = ۶$$

$$AB^{۲} = BH \times BC$$
$$\Longrightarrow AB^{۲} = ۳ \times ۱۵ = ۴۵ \Longrightarrow AH = ۳\sqrt{۵}$$

۸-

$$\Delta DEF \sim \Delta GHI \Longrightarrow \frac{EF}{HI} = \frac{DJ}{GK} \Longrightarrow \frac{EF}{۲۰} = \frac{DJ}{\frac{۳}{۲}DJ} \Longrightarrow EF = \frac{۴۰}{۳}$$

منابع استفاده شده:

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱—۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل دوم هندسه درس سوم «تشابه مثلث ها » نام طراح: جواد عسگری

۱- کتاب درسی ریاضی ۲ چاپ پنجم ۱۴۰۰.

۲- کتاب معلم ریاضی (۲)پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه چاپ اول ۱۳۹۶

۳-هندسه(۱) سال دوم آموزش متوسطه چاپ بیست و یکم ۱۳۹۴

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری

اهداف یادگیری:

- آشنایی با توابع گویا و تعیین دامنه آن
- رسم تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$
- درک تساوی دو تابع از روی نمودار و همچنین از روی ضابطه و دامنه
- آشنایی با توابع رادیکالی
- رسم تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$
- رسم توابع حاصل از انتقال طولی و عرضی تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$
- آشنایی با توابع پله ای
- آشنایی با عملگر جزء صحیح
- شناخت و رسم تابع جزء صحیح

انتظارات پس از مطالعه:

- بتواند دامنه توابع گویا و رادیکالی را پیدا کند.
- بتواند به کمک انتقال نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ نمودار برخی توابع رادیکالی را رسم کند.
- بتواند نمودار توابع پله ای را رسم کند.
- بتواند نمودار تابع جزء صحیح را رسم کند.

◈**تابع گویا :** هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله ای هستند و $Q(x) \neq 0$ را یک تابع گویا می نامیم.

توابع زیر مثال هایی از توابع گویا هستند :

$$m(x) = \frac{1}{x} ، k(x) = \sqrt{5} ، h(x) = \frac{2x^3-4x^2+5x+1}{x^2-7x+10} ، g(x) = \frac{4x-1}{3} ، f(x) = \frac{x^2+3x-2}{x+5}$$

دامنه توابع گویا:

اعدادی که مخرج کسر مربوط به ضابطه یک تابع گویا را صفر کنند،عضو دامنه آن تابع نیستند پس ریشه های مخرج کسر را پیدا کرده و تفضل مجموعه ریشه مخرج کسر از مجموعه اعداد حقیقی ، دامنه تابع گویا را مشخص می کند . و یا

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x | Q(x) = 0\}$$

مثال: دامنه توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x) = \frac{5x+3}{x-2}$　ب) $g(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2-8x+7}$　پ) $h(x) = \frac{x^3+6x+2}{x^3-4x}$　ت) $k(x) = \frac{x}{x^2+1}$

راه حل:

الف) $x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2, \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

ب) $x^2 - 8x + 7 = 0 \Longrightarrow (x-1)(x-7) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \\ x - 7 = 0 \Longrightarrow x = 7 \end{cases}$

$D_g = \mathbb{R} - \{۱,۷\}$

پ) $x^۳ - ۴x = ۰ \Longrightarrow x(x^۲ - ۴) = ۰ \Longrightarrow x(x-۲)(x+۲) = ۰$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۲ = ۰ \\ x + ۲ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \\ x = -۲ \end{cases} , \quad D_h = \mathbb{R} - \{۰, -۲, ۲\}$$

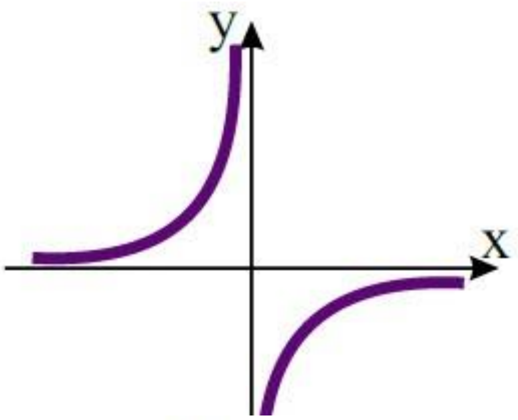
ت) $D_k = \mathbb{R}$,غیر ممکن $x^۲ + ۱ = ۰ \Longrightarrow x^۲ = -۱$

تذکر : در تعیین دامنه نباید توابع را ساده کنیم.

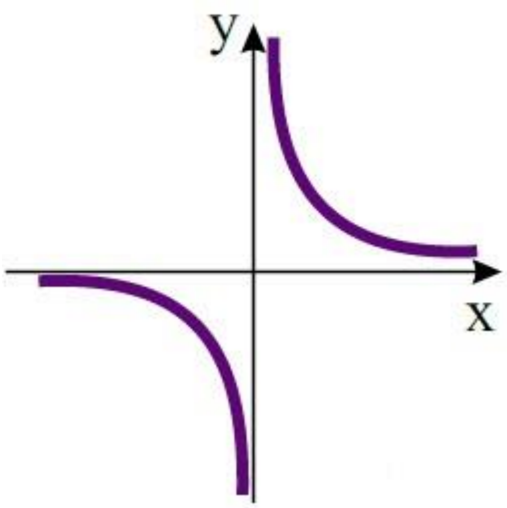
⟐تابع هموگرافیک : هر تابع بصورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که در آن a ، b ، c و d اعداد حقیقی هستند و $c \neq ۰$ و $ad \neq bc$ را یک تابع هموگرافیک می نامند.

ویژگی های تابع هموگرافیک:

۱)دامنه تابع برابر $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{-d}{c}\}$ و برد تابع مجموعه $R_f = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ می باشد.



۲)اگر $ad - bc > ۰$ باشد آن گاه نمودار تابع بصورت افزایشی (صعودی) خواهد بود



۳) اگر $ad - bc < ۰$ باشد آن گاه نمودار تابع بصورت کاهشی (نزولی) خواهد بود.

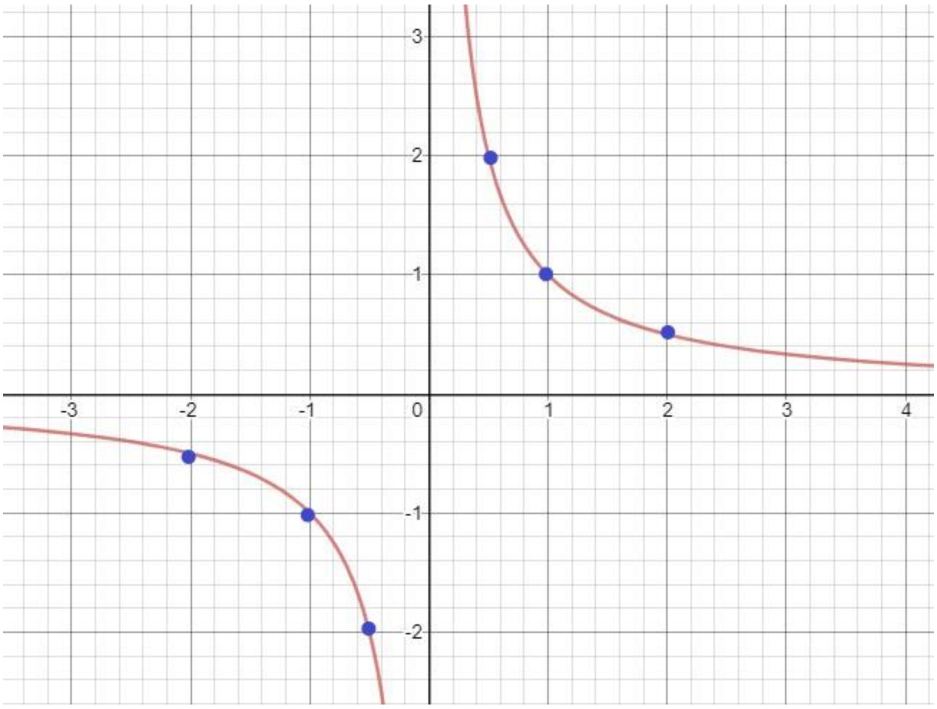
۴) نمودار تابع به خط های $x = \frac{-d}{c}$ و $y = \frac{a}{c}$ نزدیک و نزدیکتر می شود ولی هیچ گاه این دو خط را قطع نمی کند.(اصطلاحاً خط $x = \frac{-d}{c}$ مجانب قائم و $y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی تابع هموگرافیک می باشد)

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری

مثال: به کمک نقطه یابی نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را رسم کنید.

تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ یک تابع هموگرافیک است

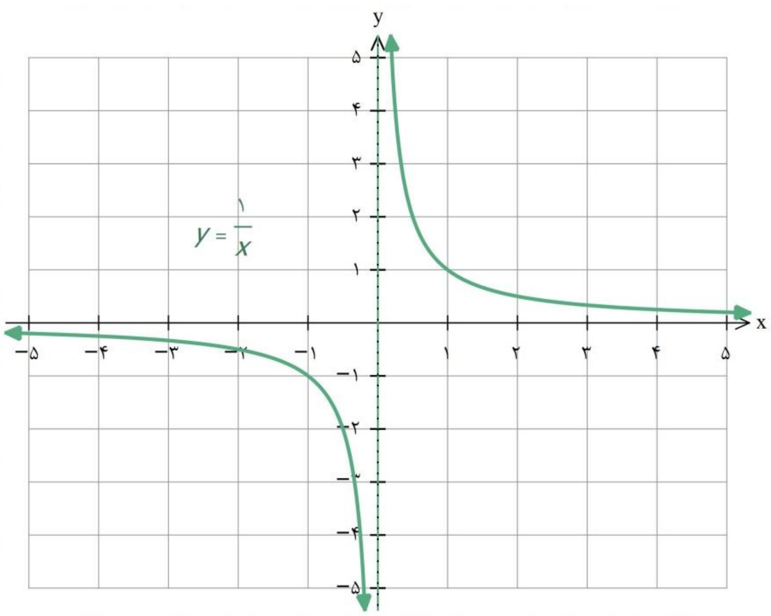
x	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
y	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	-۲	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$



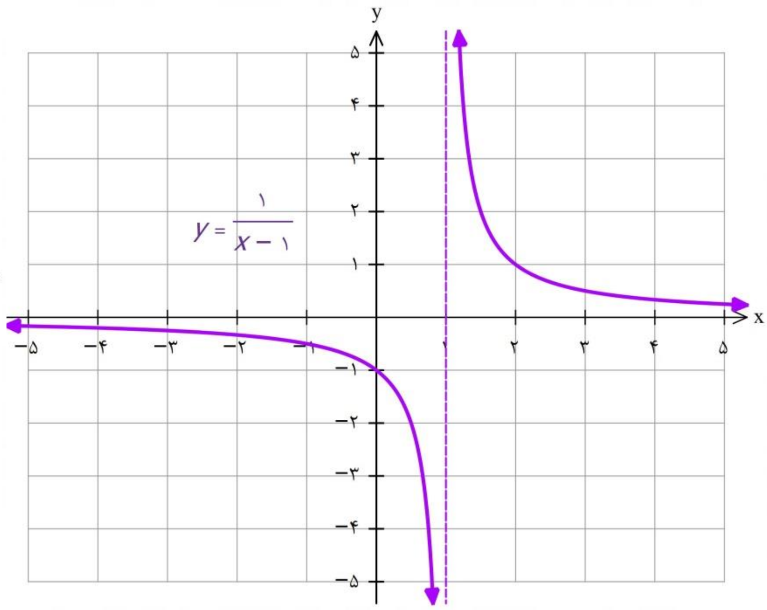
مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x-۱}$ را به کمک انتقال نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ رسم کنید.

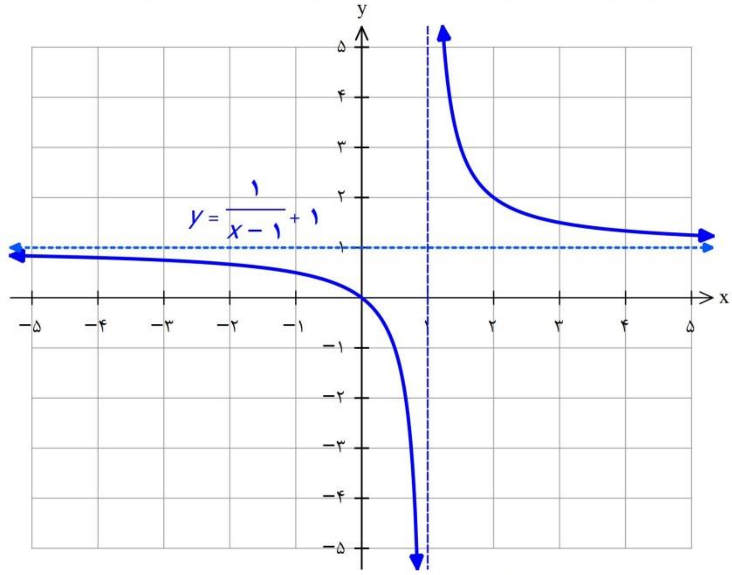
راه حل: داریم : $f(x) = \frac{x}{x-۱} = \frac{x-۱+۱}{x-۱} = ۱ + \frac{۱}{x-۱}$

ابتدا نمودار تابع $y = \frac{۱}{x}$ را رسم می کنیم سپس نمودار را به اندازه یک واحد بطرف راست منتقل کرده تا نمودار $y = \frac{۱}{x-۱}$ مشخص شود. نمودار بدست آمده را یک واحد به طرف بالا انتقال می دهیم تا نمودار $y = ۱ + \frac{۱}{x-۱}$ بدست آید.



محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری

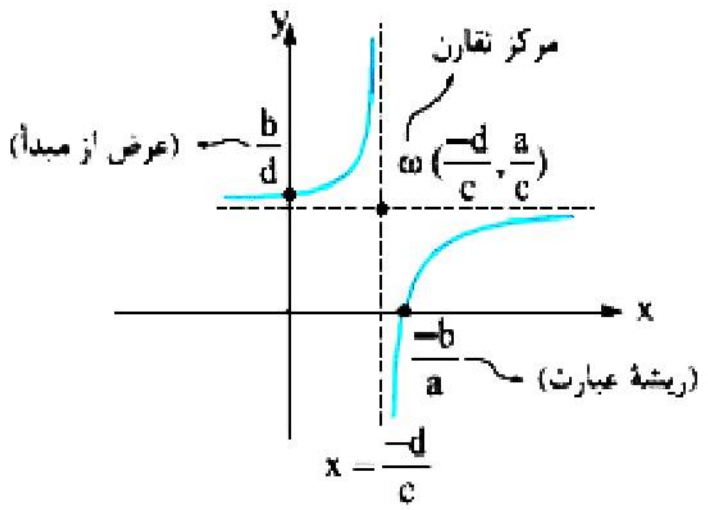




روش مستقیم برای رسم نمودار توابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$:

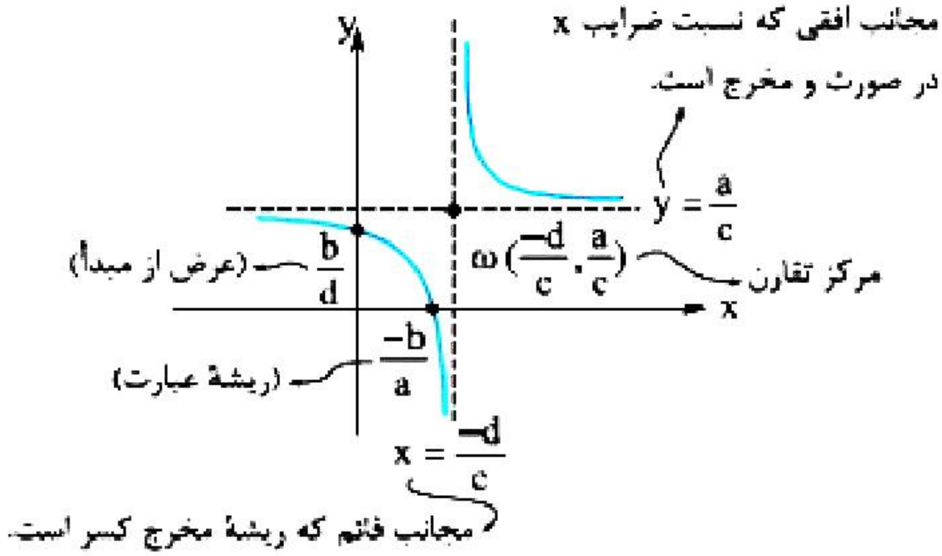
ابتدا نمودار خط های عمود برهم $x = \frac{-d}{c}$ و $y = \frac{a}{c}$ را رسم می کنیم این دو خط صفحه مختصات را به چهار قسمت تقسیم می کندسپس دو نقطه کمکی از نمودار تابع را مشخص کرده و با توجه به علامت $ad - bc$ بر حسب صعودی یا نزولی بودن، نمودار تابع را رسم می کنیم.

با فرض $ad - bc > ۰$:



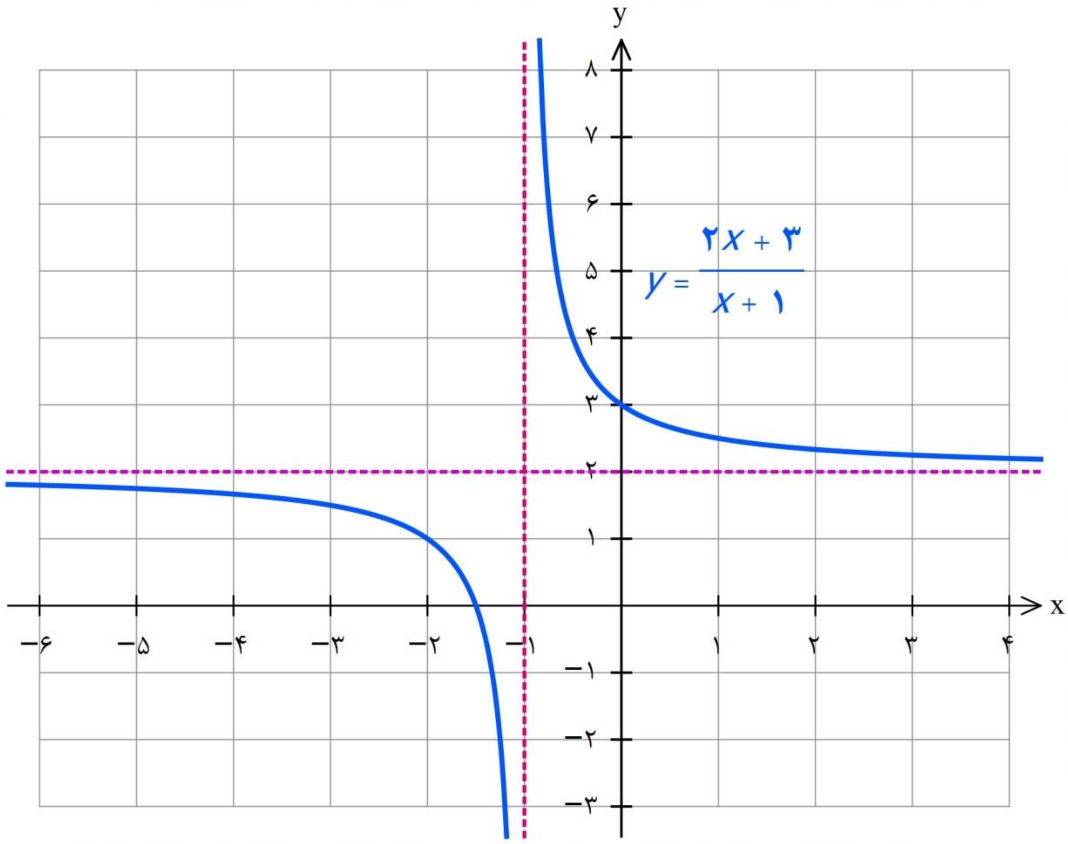
محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری

با فرض $ad - bc < 0$:



مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ را رسم کنید.

راه حل: $x = \frac{-d}{c} = -1$ و $y = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$. ابتدا نمودار خط های $x = -1$ و $y = 2$ را رسم می کنیم. دو نقطه کمکی $(0,3)$ و $(-2,1)$ و $ad - bc = 2 \times 1 - 3 \times 1 = -1$ پس نمودار تابع کاهشی(نزولی) است پس نمودار آن به شکل زیر می باشد:



◈**تساوی دو تابع:** دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g برابر باشند.$(D_f = D_g)$

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

مثال: آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{x}.\sqrt{x-۱}$ و $g(x) = \sqrt{x(x-۱)}$ با هم برابرند؟ چرا؟

راه حل: ابتدا دامنه هر دو تابع را پیدا می کنیم:

در تابع f داریم: $x \geq ۰$ و $x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱$ اشتراک این دو نامساوی برابر $x \geq ۱$ است پس $D_f = [۱,+\infty)$

و در تابع g : $x(x-۱) \geq ۰$ تعیین علامت می کنیم:

x	$-\infty$	۰	۱	$+\infty$
P	+	−	+	

پس $D_g = (-\infty, ۰] \cup [۱, +\infty)$

چون $D_f \neq D_g$ پس این دو تابع برابر نیستند.

تست: به ازای کدام مقدار k توابع f و g با ضابطه های زیر مساویند؟

$$f(x) = \frac{k}{x} + \frac{۱}{x+۱} , g(x) = \frac{-۱}{x^۲+x}$$

۱(۱ ‏ ‏ ‏ ‏ ۲) -۱ ‏ ‏ ‏ ‏ ۳) ۲ ‏ ‏ ‏ ‏ ۴) -۲

راه حل: دامنه هر دو تابع برابرند زیرا

$$D_f = D_g = \mathbb{R} - \{۰, -۱\}$$

از طرفی باید : $f(x) = g(x)$ پس $\frac{k}{x} + \frac{۱}{x+۱} = \frac{-۱}{x^۲+x}$ و یا

$$\frac{kx+k+x}{x(x+۱)} = \frac{-۱}{x^۲+x} \Rightarrow \frac{x(k+۱)+k}{x(x+۱)} = \frac{-۱}{x^۲+x} \Rightarrow k+۱ = ۰ \Rightarrow k = -۱$$

تست:اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۳+۱}{x+۱} & ,x \neq -۱ \\ b & ,x = -۱ \end{cases}$ و $g(x) = x^۲ - ax + ۱$ برابر باشند مقدار ab چقدر است؟

۱)-۳ ‏ ‏ ‏ ‏ ۲) ۳ ‏ ‏ ‏ ‏ ۳)۶ ‏ ‏ ‏ ‏ ۴) -۶

راه حل: چون دو تابع برابرند پس $f(x) = g(x)$ ولی چون $x \neq -۱$ درنتیجه

$$f(x) = \frac{x^۳+۱}{x+۱} = \frac{(x+۱)(x^۲-x+۱)}{x+۱} = x^۲ - x + ۱$$

از تساوی دو ضابطه نتیجه می شود $a = ۱$. همچنین $f(-۱) = g(-۱) \Rightarrow b = ۱+۱+۱ = ۳$

$$ab = ۱ \times ۳ = ۳$$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری

پاسخ فعالیت ها، کاردر کلاس ها و تمرینات کتاب:

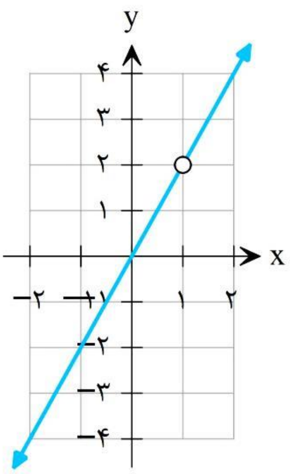
•کار در کلاس صفحهٔ ۵۱ کتاب درسی

۱- آیا دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^{۲}}{x}$, $g(x)=x$ با هم برابرند؟ چرا؟

خیرا زیر وقتی تابع $f(x)$ را ساده می کنیم، ضابطه ی دو تابع برابر می شود ولی دامنه ها با هم برابر نیستند پس این دو تابع با هم برابر نیستند.

$$f(x)=\frac{x^{۲}}{x}=x \qquad D_f=R-\{۰\} \quad , \quad D_g=R$$

۲- نمودار مقابل مربوط به کدام یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟



الف) $D_g=R$ $\qquad g(x)=۲x$

ب) $D_g=R-\{۲\}$ $\qquad g(x)=۲x$

پ) $D_g=R-\{۱\}$ $\qquad g(x)=۲x$

ت) $D_g=R-\{۱\}$ $\qquad g(x)=\frac{۲x^{۲}-۲x}{x-۱}$

ث) $D_g=R-\{۲\}$ $\qquad g(x)=\frac{۲x^{۲}-۴x}{x-۲}$

با توجه به شکل دامنه ی تابع عبارت است از: $D_g=R-\{۱\}$ بنابراین دامنهٔ آن با قسمت های (پ) و (ت) یکی است اما باید ضابطه های هر کدام از این قسمت ها را هم بررسی کنیم.

$$g(x)=\frac{۲x^{۲}-۲x}{x-۱}=\frac{۲x(x-۱)}{(x-۱)}\xrightarrow[D_g=R-\{۱\}]{\div(x-۱)}g(x)=۲x$$

می دانیم نقاط (۰ و ۰) و (۲- و ۱-) روی نمودار این تابع قرار دارند و در ضابطهٔ تابع $g(x)=۲x$ صدق می کنند:

$$g(x)=۲x \Rightarrow \begin{cases} ۰=۲\times ۰ \Rightarrow ۰=۰ \\ -۲=۲\times(-۱)\Rightarrow -۲=-۲ \end{cases}$$

توابع رادیکالی

کار در کلاس صفحهٔ ۵۲ کتاب درسی

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر S تندی جابه جایی یک سونامی برحسب کیلومتر بر ساعت باشد، می توان آن را از رابطهٔ $S=۳۵۶\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در آن d میانگین عمق دریا برحسب کیلومتر است.

الف) جدول زیر را کامل کنید. $(\sqrt{۳}\simeq ۱/۷ , \sqrt{۲}\simeq ۱/۴)$

d	۱	۲	۳	۴
$S=۳۵۶\sqrt{d}$	۳۵۶	۴۹۸/۴	تقریباً ۶۰۵/۲	۷۱۲

ب) عبارت زیر را کامل کنید.

چون هر عدد، تنها یک ریشهٔ دوم مثبت دارد، پس رابطهٔ سونامی یک تابع است.

پ) کدام یک از اعداد ۵- و ۵ عضو دامنهٔ تابع سونامی است؟

عدد ۵ عضو دامنهٔ تابع سونامی است.

فعالیت صفحهٔ ۵۳ کتاب درسی

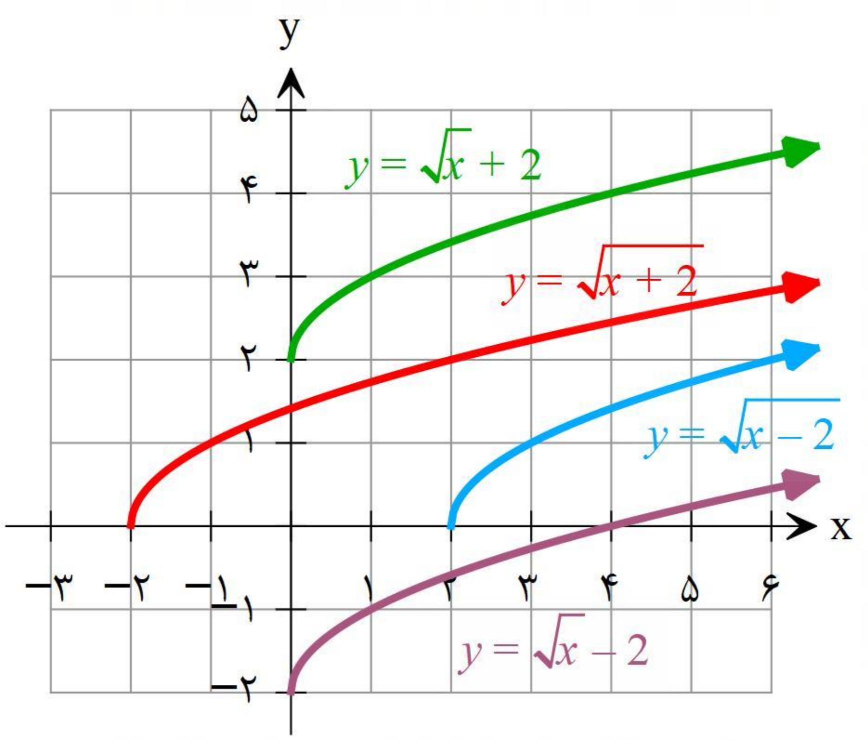
۱- در شکل مقابل با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ ، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر رسم شده است. مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است. سپس دامنهٔ آنها را تعیین کنید.

الف) $g(x)=\sqrt{x-۲}\quad D_g=[۲\,,+\infty)$

ب) $h(x)=\sqrt{x}+۲\quad D_h=[۰\,,+\infty)$

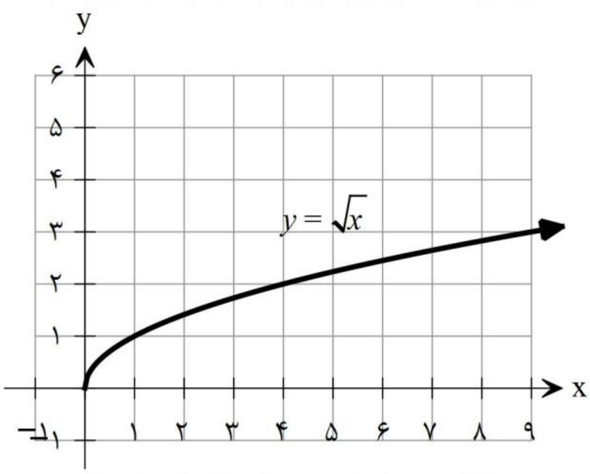
پ) $k(x)=\sqrt{x+۲}\quad D_g=[-۲\,,+\infty)$

ت) $l(x)=\sqrt{x}-۲\quad D_h=[۰\,,+\infty)$



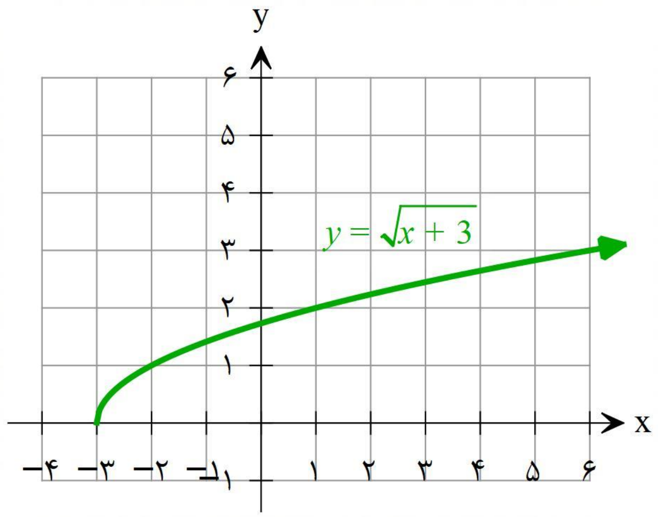
۲- می خواهیم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-۲+\sqrt{x+۳}$ را رسم کنیم.

الف) (مرحلهٔ اول) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x}$ در صفحهٔ قبل را در نظر بگیرید.

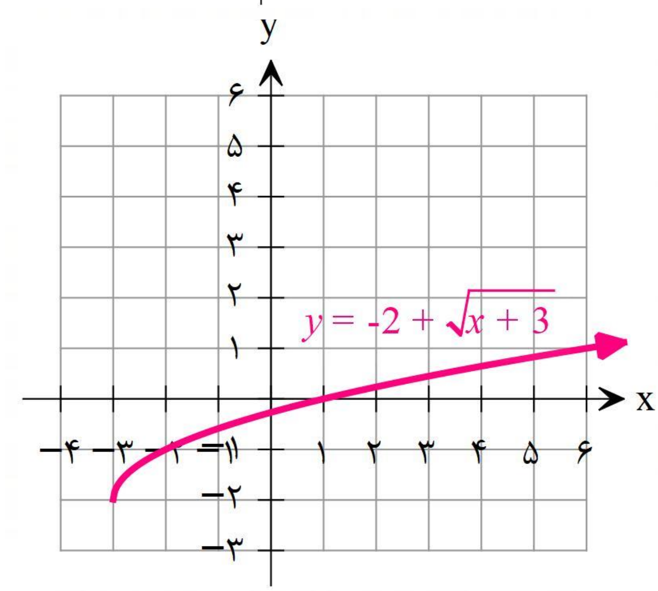


محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل سوم
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسه
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع»
۱۴۰۰–۱۴۰۱	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	نام طراح: جواد عسگری
	گروه ریاضی	

ب) (مرحلهٔ دوم) حال، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x+۳}$ را رسم کنید.

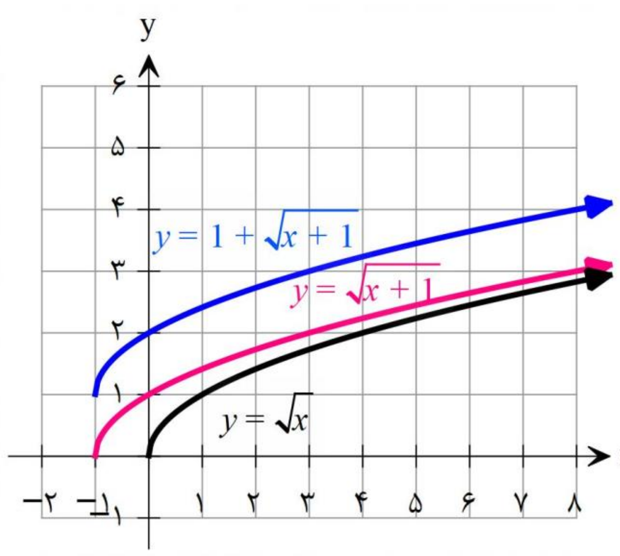


پ) (مرحلهٔ سوم) در پایان، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -۲ + \sqrt{x+۳}$ را رسم کنید.



با توجه به شکل می بینید که دامنهٔ این تابع $[-۳ , +\infty)$ است.

۳- نمودار تابع با ابطهٔ $f(x) = ۱ + \sqrt{x+۱}$ را رسم کنید؛ سپس دامنهٔ آن را بیابید.



$$D_f = [-۱ , +\infty)$$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری

فعالیت صفحهٔ ۵۴ کتاب درسی

هزینهٔ پارکینگ خودرو

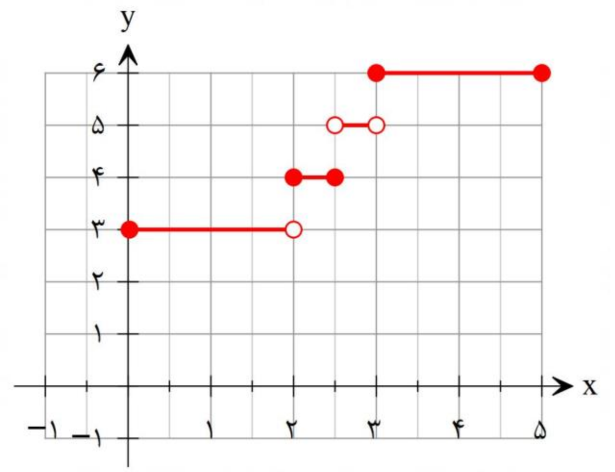
در یک پارکینگ، هزینهٔ پارک خودرو به این صورت محاسبه می شود:

زمان		هزینه (هزارتومان)
از هنگام ورود	تا کمتر از ۲ ساعت	۳
از ۲ ساعت	تا ۲/۵ ساعت	۴
از بیشتر از ۲/۵ ساعت	تا کمتر از ۳ ساعت	۵
از ۳ ساعت	تا ۵ ساعت	۶

الف) ضابطهٔ تابع هزینهٔ پارکینگ خودرو چیست؟

$$f(x)=\begin{cases} ۳ & ۰\leq x<۲ \\ ۴ & ۲\leq x\leq ۲/۵ \\ ۵ & ۲/۵<x<۳ \\ ۶ & ۳\leq x\leq ۵ \end{cases}$$

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.



به توابعی مانند تابع هزینهٔ پارکینگ، توابع پله ای می گویند. توابع پله ای در تجارت یا خرید و فروش نقش تعیین کننده ای دارند. مشهورترین تابع پله ای، تابع جزء صحیح است.

تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می دهد و به هر عدد غیر صحیح، بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از آن عدد را نسبت می دهد. ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می شود.

برای مثال داریم:

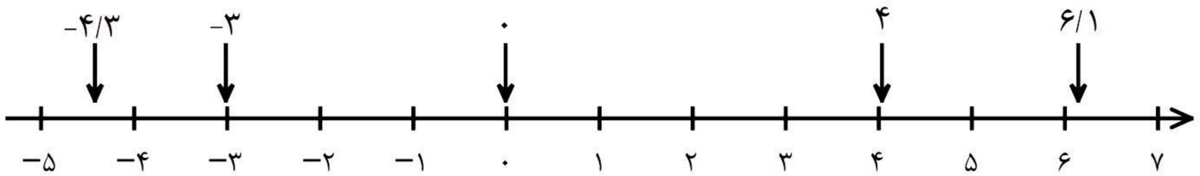
$$[-۳]=-۳ \qquad [-۴/۳]=-۵ \qquad [۰]=۰ \qquad [۶/۱]=۶ \qquad [۴]=۴$$

همان طور که در مثال دیدیم، جزء صحیح هر عدد غیر صحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

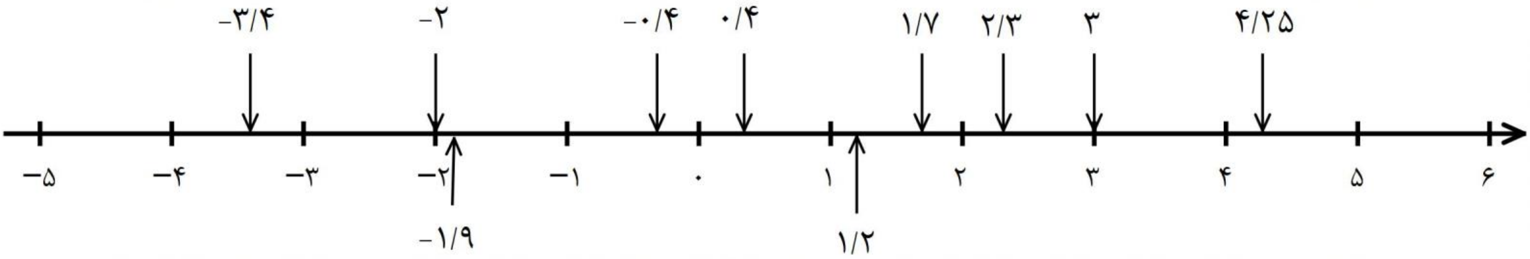
محتوای نوشتاری	به نام خدا	فصل سوم
کتاب ریاضی(۲)	اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی	هندسه
سال تحصیلی	معاونت آموزش متوسطه	درس اول «آشنایی با برخی از
۱۴۰۱-۱۴۰۰	اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی	انواع توابع»
	گروه ریاضی	نام طراح: جواد عسگری

کار در کلاس صفحهٔ ۵۵ کتاب درسی

۱- با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح اعداد خواسته شده را به دست آورید.



$[-۳/۴] = -۴$ $\quad [-۲] = -۲$ $\quad [-۱/۹] = -۲$ $\quad [۰/۴] = ۰$ $\quad [-۰/۴] = -۱$



$[۴/۲۵] = ۴$ $\quad [۳] = ۳$ $\quad [۲/۳] = ۲$ $\quad [۱/۷] = ۱$ $\quad [۱/۲] = ۱$

۲- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$\left[\frac{۴۱}{۳۷}\right] = [۱/۱۰۸] = ۱$ $\qquad \left[-\frac{۱۳}{۵۱}\right] = [-۰/۲۵۴] = -۱$

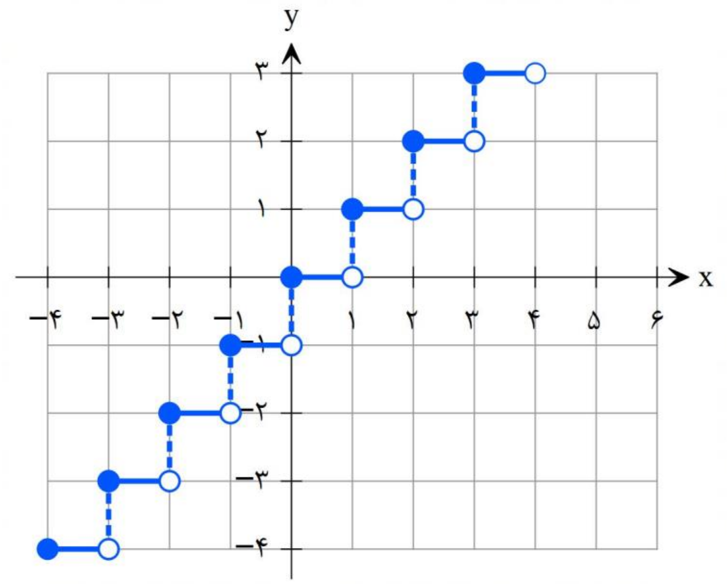
فعالیت صفحهٔ ۵۵ کتاب درسی

۱- اگر $[x] = ۲$، آنگاه x برابر چه اعدادی می تواند باشد؟مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید.

$[x] = ۲ \Rightarrow ۲ \leq x < ۳ \Rightarrow x \in [۲\,,۳)$

۲- برای رسم نمودار یک تابع جزء صحیح باید توجه کنیم که اعداد هر بازه ای از دامنه، به چه عددی نسبت داده می شود. برای مثال اگر $۰ \leq x < ۱$ ، آنگاه $[x] = ۰$؛ پس مقدار تابع $f(x) = [x]$ برای همهٔ اعداد عضو بازهٔ $[۰\,,۱)$ برابر صفر می شود. در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x]$ رسم شده است. نمودار این تابع در بازهٔ $[-۴\,,۴)$ تکمیل کنید.

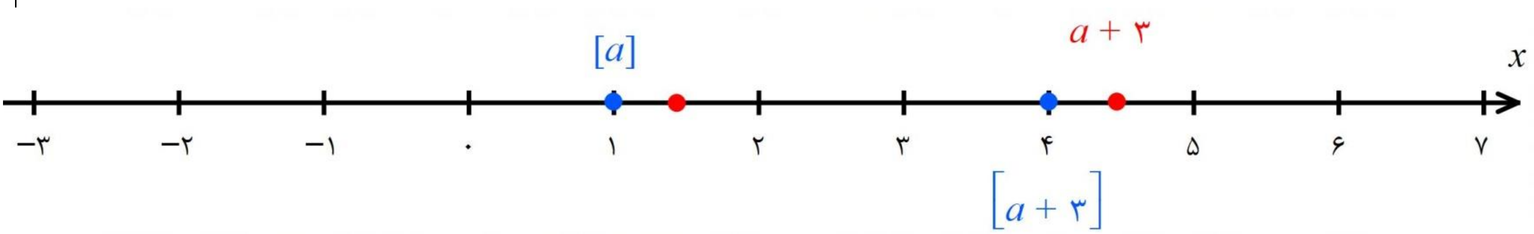
محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری



۳- الف) به دلخواه نقطه ای مانند a را روی محور اعداد داده شده مشخص کنید.

ب) نقطهٔ $a+۳$ را روی این محور مشخص کنید.

پ) نقاط $[a]$ و $[a+۳]$ را روی محور مشخص کنید.



ت) چه رابطه ای بین $[a]$ و $[a+۳]$ برقرار است؟

$[a+۳]=[a]+۳$

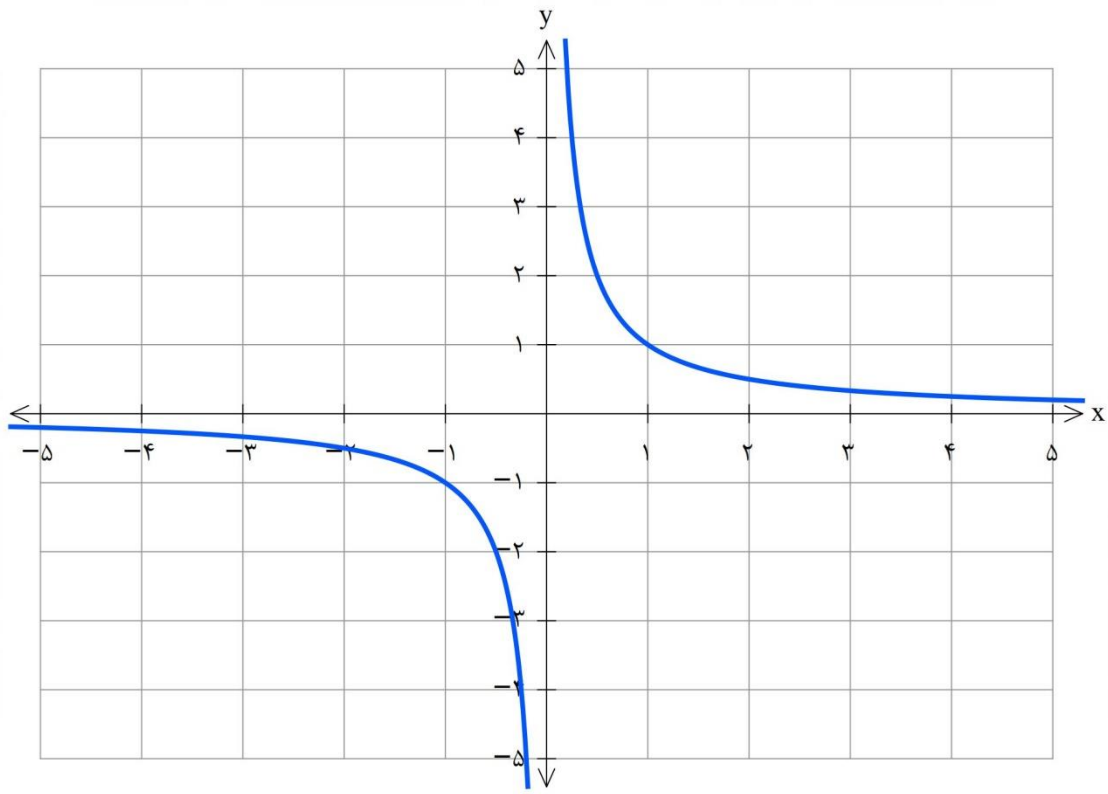
ث) چه نتیجه ای می گیرید؟

«اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آنگاه $[a+n]=[a]+n$»

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری

تمرین صفحه ۵۶ کتاب درسی

۱-نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{۱}{x}$ و با دامنه $D_f=[-۵,۵]-\{۰\}$ را رسم کنید.



۲-دامنه تابع گویای با ضابطه $f(x)=\frac{x+۳}{x-۳}$ را بدست آورید.

$$x-۳=۰\Longrightarrow x=۳\Longrightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$$

۳- در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x)=\begin{cases}-۱ & ,x<۰\\ ۱ & .\ x>۰\end{cases}$ ، $g(x)=\frac{|x|}{x}$

بله دو تابع برابرند چون $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$ و $g(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\frac{x}{x} & ,x>۰\\ \frac{-x}{x} & ,x<۰\end{cases}=\begin{cases}-۱ & ,x<۰\\ ۱ & .\ x>۰\end{cases}=f(x)$

ب) $f(x)=x-۲$ ، $g(x)=\frac{x^۲-۴}{x+۲}$

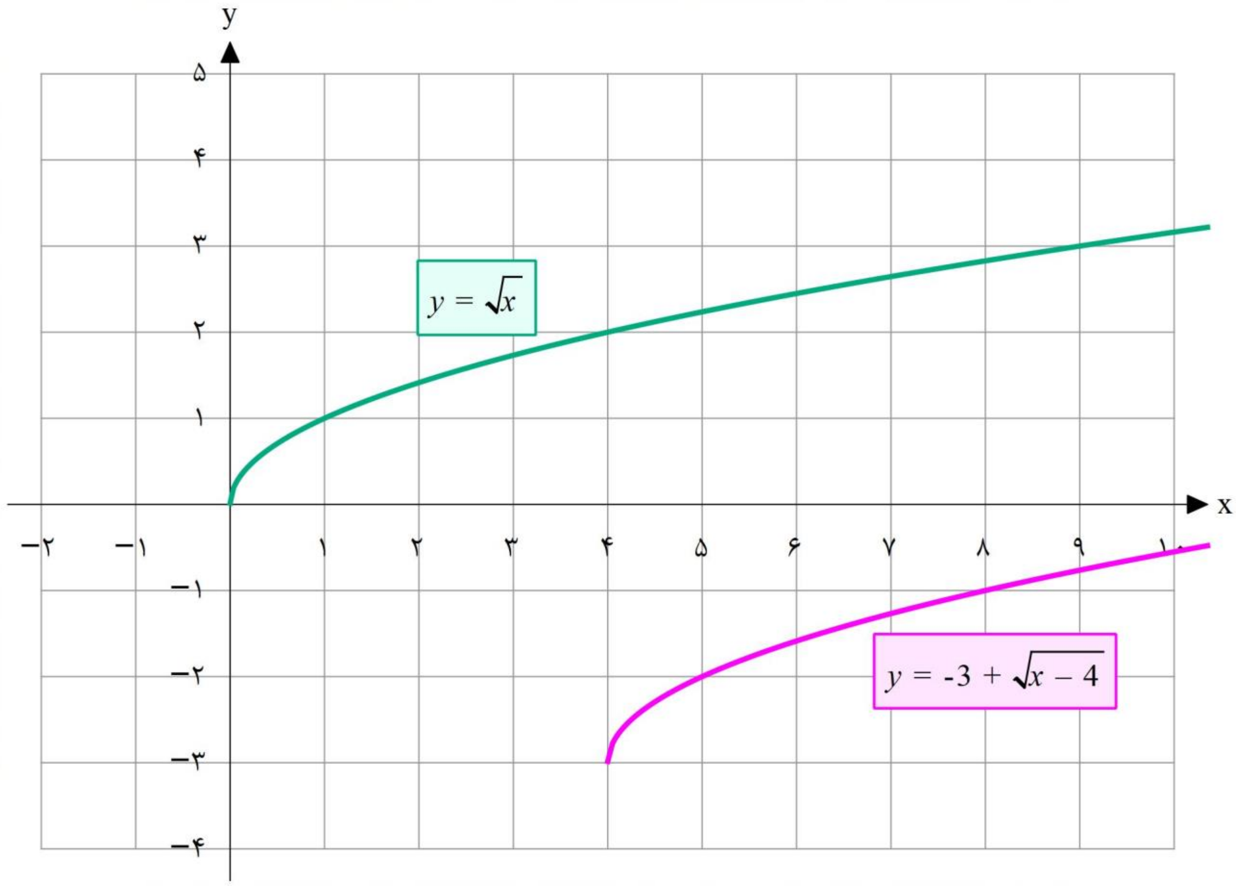
دو تابع برابر نیستند چون $D_f=\mathbb{R}$ ولی $D_g=\mathbb{R}-\{-۲\}$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱—۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری

۴- تابعی گویا بنویسید که دامنه اش برابر $\mathbb{R}$-{۱} باشد.پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

$$f(x)=\frac{x^{۲}}{x-۱} \quad ، \quad f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$$

۵- نمودار تابع با ضابطه $f(x)=-۳+\sqrt{x-۴}$ را رسم کنید.

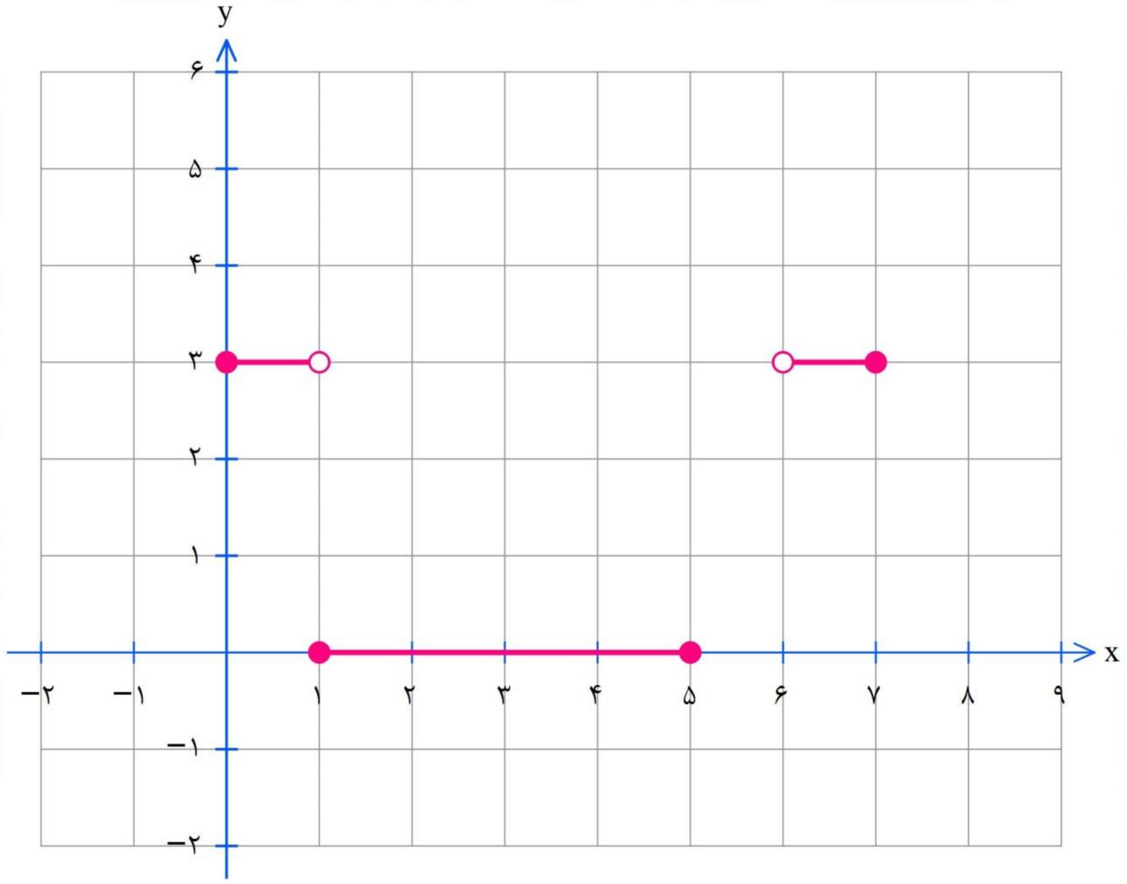


۶- حاصل عبارت های مقابل را حساب کنید.

$[-۲۳۰۹.۵۴]=-۲۳۱۰$ $\quad$ $[-۱۰۳.۰۰۳]=-۱۰۴$ $\quad$ $[۳۰۰.۴۰۰۲]=۳۰۰$

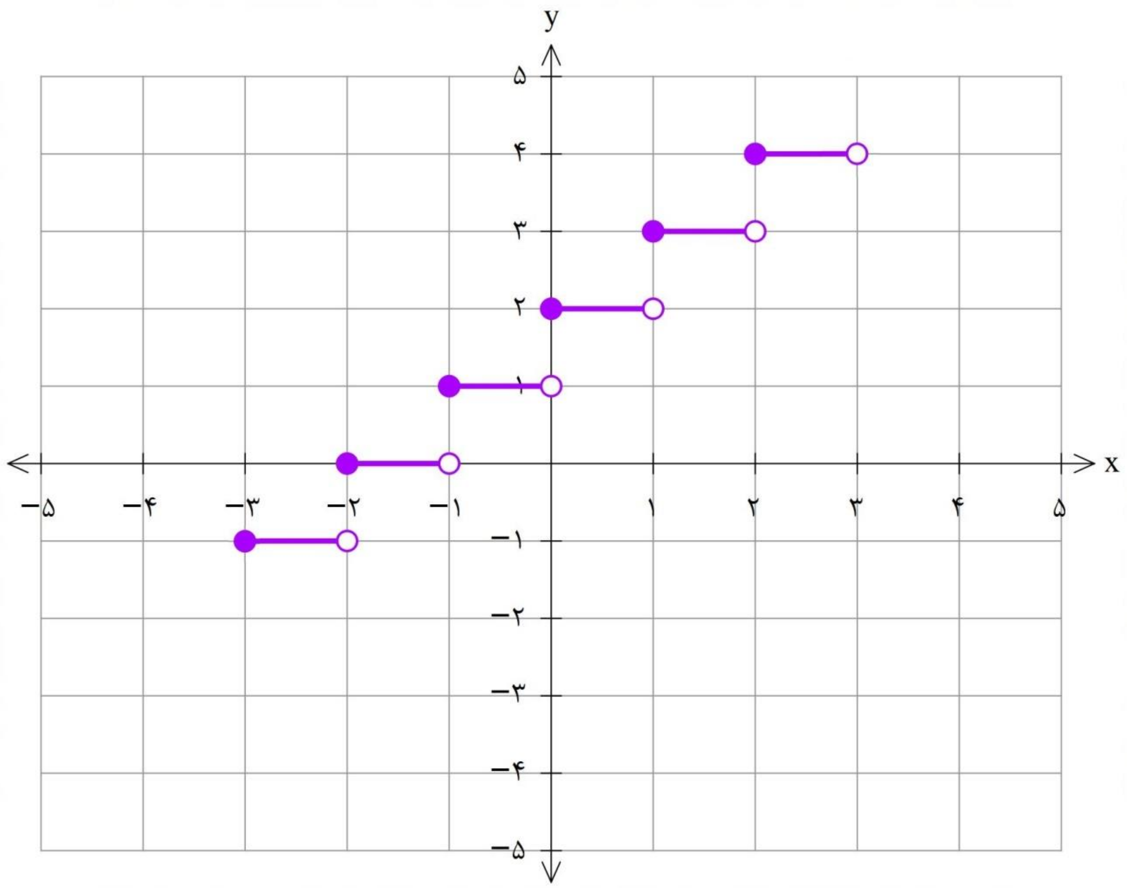
۷- تابع پله ای روبرو را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۳ & ,x\in[۰,۱)\\ ۰ & ,x\in[۱,۵]\\ ۳ & ,x\in(۶,۷]\end{cases}$$



فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱

۸- تابع با ضابطه $f(x) = [x] + ۲$ و دامنه $D_f = [-۳,۳)$ را رسم کنید.



سوالات امتحانی پر تکرارو مهم (نهایی/ کنکور/داخلی):

۱- دامنه ی توابع گویا ی زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{۲x}{x-۶}$

ب) $g(x) = \frac{۱}{x^۲-x-۶}$

ج) $h(x) = \frac{x-۱}{x^۲+۲x+۵}$

ج) $k(x) = \frac{۴x-۷}{x^۳-x}$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری

۲- آیا دو تابع $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ و $g(x)=\sqrt{x}+1$ مساویند؟ چرا؟

۳- آیا دو تابع $g(x)=x-2$, $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ باهم برابرند ؟چرا؟

۴- با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار تابع $g(x)=1+\sqrt{x-3}$ را رسم کنید.

۵- دامنه ی تابع $y=-1+\sqrt{x+4}$ را بیابید.

۶- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x<0\\ [x] & 0\le x<1\\ \sqrt{x-1} & x\ge 1\end{cases}$ را رسم کنید.

۷- تابع $f(x)=[x]+1$ را در دامنه ی $D_f=[-3,3)$ رسم کنید.

۸- حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

$$\left[\frac{6}{1}\right]+\left[\frac{6}{2}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]+\dots+\left[\frac{6}{600}\right]$$

۹- دامنه توابع زیر را بدست آورید.

الف) $h(x)=\frac{1}{[x]-5}$

ب) $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

سوالات تستی و کنکور:

۱-نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها ، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدا مختصات، کدام است؟(تجربی۹۹)

۱) $4\sqrt{15}$ ۲) $6\sqrt{7}$ ۳) $4\sqrt{17}$ ۴) $6\sqrt{10}$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۱–۱۴۰۰	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری

۲- نمودار $y=[x^{۲}]$ روی بازه ی $x \in (-۲\,,\,۲)$ ازچند پاره خط ، تشکیل شده است؟ [ ] نماد جزء صحیح است)(تجربی خارج ۹۱)

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۷

۳- در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+۴} & ; \; x>۳ \\ ۲\,x+۳ & ; \; x\le ۳ \end{cases}$ مقدار $f\big(f(۵)\big)+f\big(f(۱)\big)$ کدام است؟(تجربی ۹۰)

۱) ۹   ۲) ۷   ۳) ۸   ۴) ۶

۴- اگر جزء صحیح $(x^{۲}+x)$ برابر ۱- با شد آن گاه $[x^{۲۰}]$ کدام است؟ [ ] نماد جزء صحیح است)(تجربی۸۸)

۱) ۱-   ۲) صفر   ۳) ۱   ۴) ۲

۵- اگر $x^{۲}+x<۰$ باشد حاصل $[x]+[x^{۲}]+[x^{۳}]+[x^{۴}]$ کدام است؟ (تجربی خارج ۸۸)

۱) ۱-   ۲) صفر   ۳) ۱   ۴) ۲

۶- نمودار تابع $y=x-[x] \;\; ; x\in[-۲\,,\,۳)$ از n پاره خط مساوی به اندازه ی L تشکیل شده است . دو تایی مرتب $(n\,,L)$ کدام است ؟(تجربی۸۳)

۱)$(۴\,,\,۱)$ ۲) $(۴\,,\sqrt{۲})$ ۳) $(۵\,,\,۱)$ ۴)$(۵\,,\sqrt{۲})$

۷- اگر توابع $f(x)=\frac{bx+۲}{x^{۲}+ax+۴}$ و $g(x)=\frac{c}{x+۲}$ برابر باشند ،مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳   ۲)۴   ۳) ۶   ۴) ۸

۸- دامنه تابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}-(a^{۲}+۱)x-b^{۲}}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-۱,۶\}$ است. مقدار $a+b^{۲}$ کدام می تواند باشد؟

۱) ۸   ۲)۹   ۳) ۱۰   ۴)۵

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری

۹- برد تابع $f(x) = x - [x+1]$ کدام است؟([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $[0,1)$ ۲) $[1,2)$ ۳) $[-1,0)$ ۴) $[-1,1)$

۱۰- تابع f با ضابطه $y = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$ با کدام یک از توابع زیر مساوی است؟

۱) $y = \sqrt{\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}}$ ۲) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}}$ ۳) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$ ۴) $y = \frac{\sqrt{-x-2}}{\sqrt{3-x}}$

۱۱- اگر $[3x+1] = -1$ آن گاه حاصل $[x] - [-x]$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) -1 ۴) -2

۱۲- دامنه ی تعریف تابع $f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{[x]-4}$ کدام است؟([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $[-4,4]$ ۲) $[-4,3)$ ۳) $[-4,4)$ ۴) $[-4,3) \cup \{4\}$

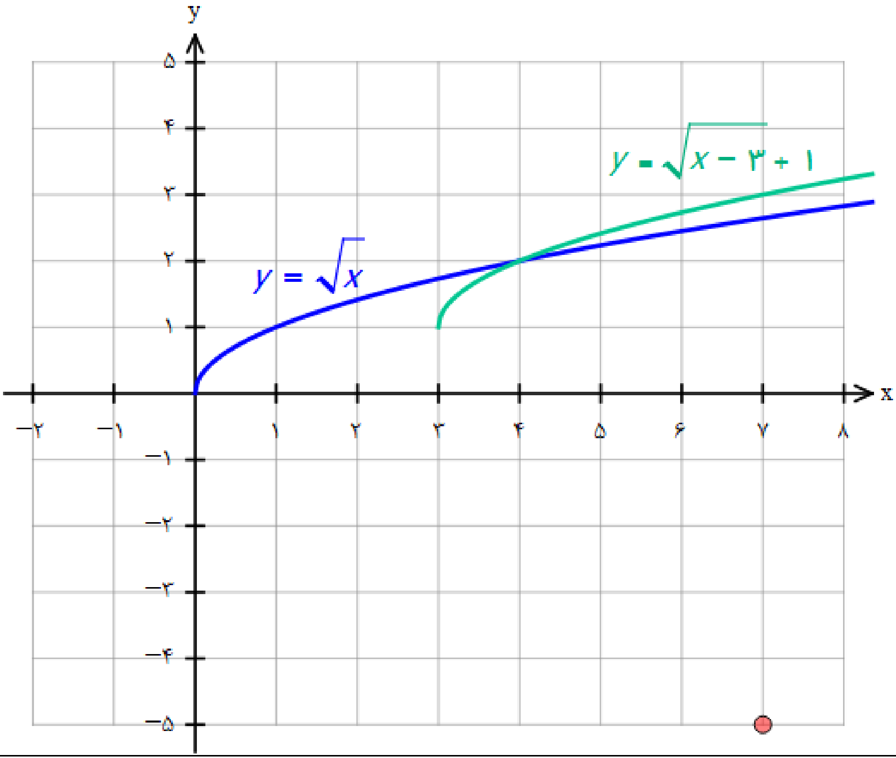
•پاسخ تشریحی سوالات امتحانی

۱- خیر چون دامنه ها برابر نیستند. $D_f = [0,+\infty) - \{1\}$ ولی $D_g = [0,+\infty)$

۲- خیر چون دامنه ها برابر نیستند.

$D_f = R - \{-2\}$ ولی $D_g = R$

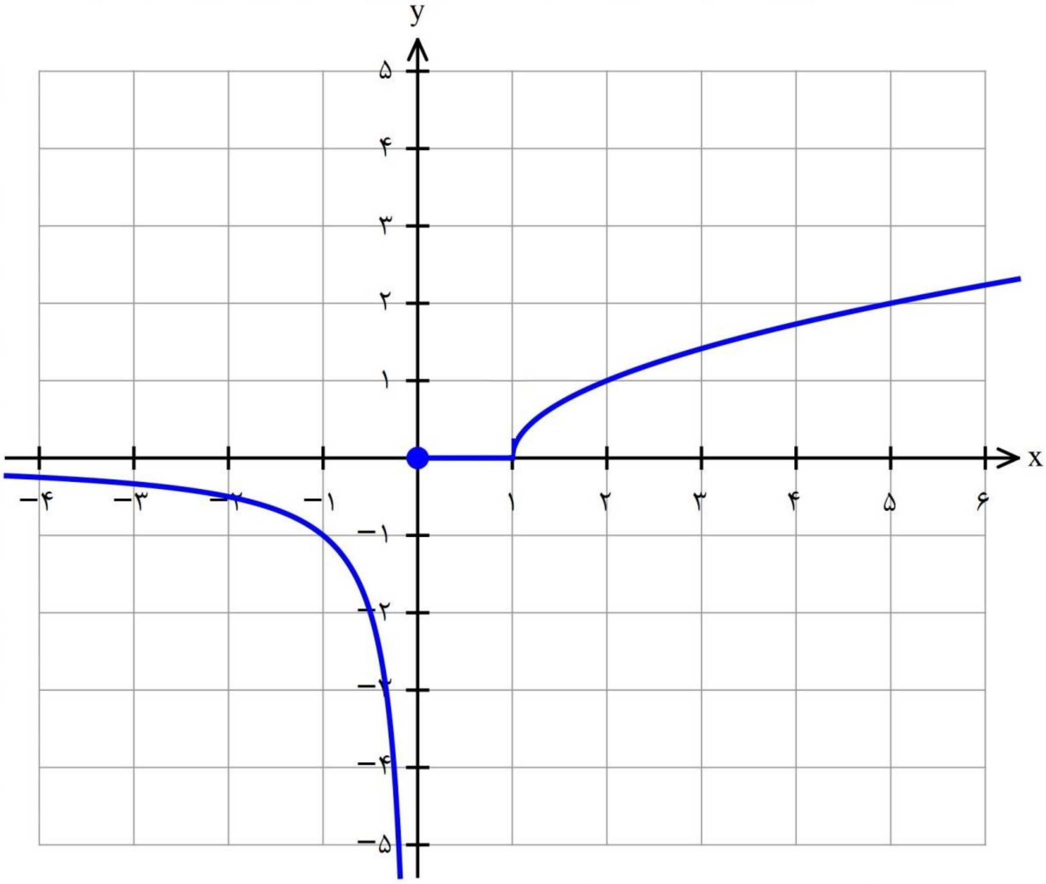
۳-



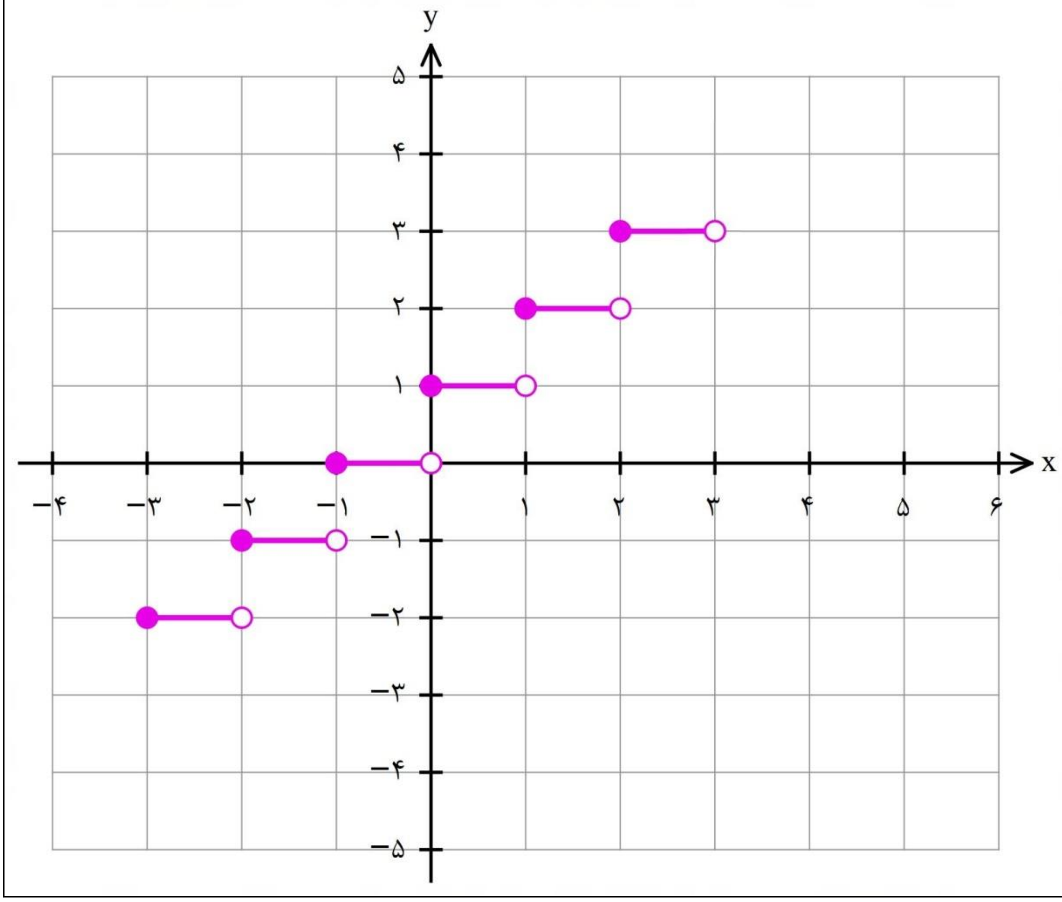
۴- $x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \Rightarrow$
$D_f = [-4,+\infty)$

محتوای نوشتاری کتاب ریاضی(۲) سال تحصیلی ۱۴۰۰–۱۴۰۱	به نام خدا اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی معاونت آموزش متوسطه اداره تکنولوژی و گروههای آموزشی گروه ریاضی	فصل سوم هندسه درس اول «آشنایی با برخی از انواع توابع» نام طراح: جواد عسگری

۵-



۶-



۷-

$$\left[\frac{۶}{۱}\right]+\left[\frac{۶}{۲}\right]+\left[\frac{۶}{۳}\right]+\ldots+\left[\frac{۶}{۶۰۰}\right]=۶+۳+۲+۱+۱+۱+۰+\cdots+۰=۱۴$$

۸- الف) $h(x)=\frac{۱}{[x]-۵}$

$$[x]-۵=۰\Longrightarrow [x]=۵\Longrightarrow ۵\leq x<۶$$
$$D_h=R-[۵,۶)$$

ب) $f(x)=\sqrt{۱۶-x^۲}$

$$۱۶-x^۲\geq ۰\Longrightarrow x^۲\leq ۱۶\Longrightarrow |x|\leq ۴\Longrightarrow -۴\leq x\leq ۴$$

منابع استفاده شده:

۱- کتاب درسی ریاضی ۲ چاپ پنجم ۱۴۰۰.

۲- کتاب معلم ریاضی (۲)پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه چاپ اول ۱۳۹۶