فصل ۸ .

1

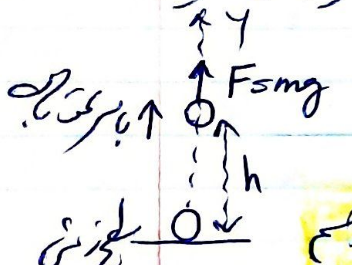
فصل هشتم هالیدی   کار و انرژی پتانسیل - پایستگی انرژی - نیروی پایستار

هدف: ارتباط بین کار و تغییر انرژی جنبشی را در فصل قبل بررسی کردیم. در این فصل، ارتباط بین کار و تغییر انرژی پتانسیل بررسی می‌شود. سپس قانون پایستگی انرژی کل را بررسی می‌کنیم.

□ - انرژی پتانسیل: انرژی است که درون جسم نهفته است.

□ انرژی پتانسیل و کار: نیروی پایستار و ناپایستار: رابطه بین

الف. انرژی پتانسیل ثقلی (گرانشی): اگر جسمی به جرم m را با سرعت ثابت بالا ببریم، نیروی ما کار $W_{ما} = mgh$ را انجام می‌دهد. ولی تغییری در انرژی جنبشی دستگاه به وجود نمی‌آید! در عوض انرژی پتانسیل دستگاه را افزایش داده‌ایم. انرژی پتانسیل گرانشی U_g جرم m را اینگونه می‌نویسند:



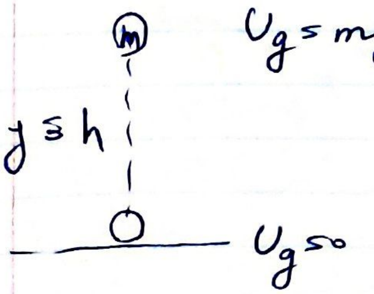
$$\boxed{U_g = mgh}$$

انرژی پتانسیل ذخیره شده در جسم

(با فرض اینکه سطح انرژی پتانسیل صفر را زمین بگیریم)

($U_g = 0$ در $y = 0$)

(تراز صفر مرجع)



$U_g = mgy$

$U_g = 0$

هنگام بالا رفتن m: $\Delta U_g = U_2 - U_1 = mgy > 0$ و

$W_g = -mgy < 0$

هنگام پایین آمدن m: $\Delta U_g = -mgy < 0$ و

$W_g = mgy > 0$

انرژی پتانسیل گرانشی $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta U_{mg} = -W_{mg}}$ *

mg: نیروی پایستار

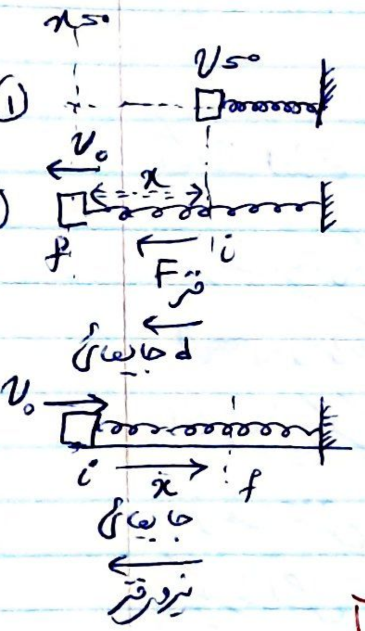
* تعریف: آن نیرویی که چنین رابطه‌ای * دارد را نیروی پایستار نام دارد.

ب: انرژی پتانسیل در یک فنر کشیده شده یا فشرده شده:

یک مثال دیگر از دستگاهی که انرژی پتانسیل را ذخیره می‌کند، فنر ایده‌آل تابع قانون هوک است.

- انتهای آزاد فنر را مبدأ محور x انتخاب می‌کنیم.

مثال: فنری فشرده شده است. حال رها می‌شود. کار W انجام شده توسط نیروی فنر هنگام باز شدن فنر به اندازه x ؟



$$W_{\text{فنر}} = \int_0^x F(x)\,dx = \frac{1}{2}kx^2 > 0 \quad \text{و} \quad \Delta U_{\text{فنر}} = U_f - U_i < 0$$

انرژی پتانسیل فنر، هنگام باز شدن، کم و کمتر می‌شود

مثال: به همین ترتیب، هنگام فشرده شدن فنر: کار نیروی فنر؟

$$W_{\text{فنر}} = \int_0^x F(x)\,dx = -\frac{1}{2}kx^2 < 0 \quad \text{و} \quad \Delta U_{\text{فنر}} = U_f - U_i > 0$$

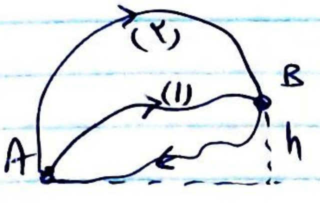
در حین فشرده شدن فنر، انرژی پتانسیل فنر بیشتر و بیشتر می‌شود.

$$\Rightarrow \boxed{\Delta U_{\text{فنر}} = -W_{\text{نیروی فنر}}} \Rightarrow$$ نیروی فنر یک نیروی پایستار است.

نکته: خیلی مهم: انرژی پتانسیل ذخیره شده در یک فنر کشیده شده یا فشرده شده به اندازه x: $+\frac{1}{2}kx^2$

☐ تعریف نیروی پایستار: نیرویی است که کار انجام شده توسط آن در یک مسیر بسته، صفر است.

(یا: کار نیروی پایستار، مستقل از مسیر حرکت است و فقط به نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد)



$$W_{mg\,AB} = -mgh$$
$$W_{mg\,BA} = mgh$$
$$\Rightarrow W_{\text{کل}} = W_{AB} + W_{BA} = 0$$
کار کل نیروی پایستار،

یا

$$W^{(1)}_{mg\,AB} = -mgh$$
$$W^{(2)}_{mg\,AB} = -mgh$$
$$\Rightarrow W^{(1)}_{mg\,AB} = W^{(2)}_{mg\,AB}$$

پشت برگه

فصل ۸

⇐ پس برای نیروهای پایستار داریم :

$$\boxed{\underset{\text{تغییرات انرژی پتانسیل}}{\Delta U} = -\underset{\text{نیروی پایستار}}{W}}$$

⇐ نیرو { پایستار (کنسرواتیو) : مثل نیروی فنر، نیروی ثقل
ناپایستار (غیرکنسرواتیو) : مثل اصطکاک.

نکات اضافه :

... یا گاهی اینگونه می‌نویسند:

$$\boxed{U(x) = +\frac{1}{2}kx^2}$$

انرژی پتانسیل فنری که x متر کشیده شده یا فشرده شده

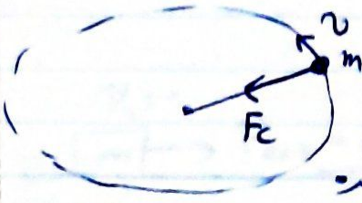
x : فاصله‌ای است که فنر از حالت عادی، کشیده شده یا متراکم شده است.

— $\Delta U_{\text{فنر}} = U(x) - U(0)$

فنر به اندازه x فشرده شده یا کشیده شده

فنر در حالت عادی

— مثال دیگر نیروی پایستار: نیروی مرکزی یا نیروی جانب مرکز.



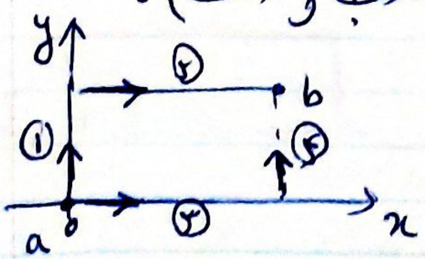
▫ نیروی جاذبه خورشید که بر سیارات اعمال می‌کند.

▫ یا در یک اتم: نیروی الکترواستاتیکی که هسته بر یک الکترون وارد می‌کند.

$W_{F_c} = 0$

— نیروی ناپایستار، نیرویی که پایستار نباشد: مثل نیروی اصطکاک جنبشی، نیروی برکشی، ...
با حرکت جسم روی مسیری که اصطکاک دارد، مقدار کار انجام شده به طول مسیر بستگی دارد.
پس کار انجام شده توسط f_k در حرکت از a به b، برای مسیرهای مختلف، تفاوت می‌کند.
و در نتیجه کار نیروی f_k در یک مسیر بسته، قطعاً صفر نیست.

— مثال دیگر نیروی ناپایستار: $\vec{F} = xy\,\hat{j}$ (حرکت جسم بر روی صفحه xy است و نیرو همواره در جهت $\hat{j}$ است).



$W_{\substack{\textcircled{1}\to\textcircled{2}\\ a\to b}} = 0$ (چون: $F = xy = (0)y = 0$ ①
$F\hat{j} \perp$ جابجایی $\hat{i}$ $= 0$ ②)

$W_{\substack{\textcircled{3}\to\textcircled{4}\\ a\to b}} \begin{cases} W_{\textcircled{3}} = 0\ (\vec{F}\perp\vec{d}) \\ W_{\textcircled{4}} \neq 0 \end{cases}$

← پس کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ داده شده به مسیر بستگی دارد ← پس $\vec{F}$ پایستار نیست.

[illegible]

فصل ۸

ادامه نکات اضافه:

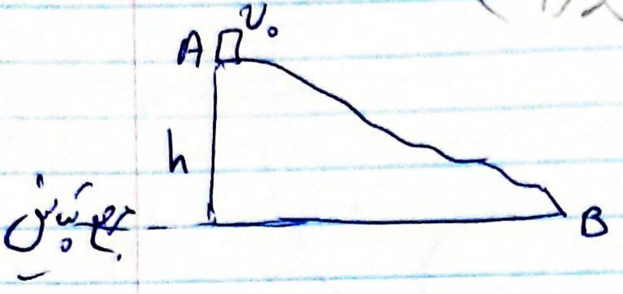
- نیروی پسکشی: به سرعت بستگی داره ← نیروی ناپایستار. چون کار انجام شده توسط چنین نیرویی فقط به محل نقطه اول و انتهای حرکت وابسته نیست.

- اگر نیرویی وابسته به زمان باشد، ناپایستار است. (نیروهای القای الکترومغناطیسی معینی وجود دارند که ناپایستارند).

- به طور کلی نیروهایی که به سرعت یا زمان بستگی دارند و یا اصطکاکی هستند ناپایستارند.

فصل ۸ ۶

□ پایستگی انرژی مکانیکی: (اتلاف نداریم، نیروی خارجی نداریم)



$$\boxed{E_A = E_B}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0$$

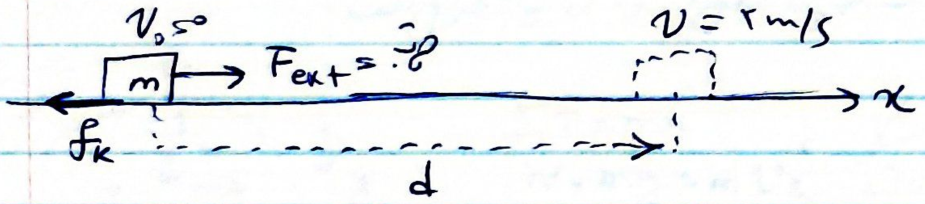
$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\rightarrow (K_B - K_A) + (U_B - U_A)$$

$$\rightarrow \text{یا } \boxed{\Delta K + \Delta U = 0}$$

□ پایستگی انرژی کل (اگر دستگاه شامل نیروی پایستار و نیروی ناپایستار مثل اصطکاک باشد)

مثال:



قانون دوم نیوتن برای جسم m : $F - f_k = ma$ ①

چون نیروها ثابت‌اند ⇐ شتاب ثابت : $v^2 - v_0^2 = 2ad \xrightarrow{\times \frac{1}{2}m} \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \boxed{mad}$

$$(F - f_k)d = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \rightarrow Fd = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + f_k d$$

$$\rightarrow \boxed{W_{F_{ext}} = \Delta K + \Delta E_{th}}$$

نشان‌دهنده کاری که توسط نیروی خارجی روی سیستم جسم-زمین انجام شده و باعث تغییر انرژی جنبشی جسم و گرم کردن جسم-سطح شده.

(گرمای تولید شده) افزایش انرژی گرمایی دستگاه است

$$\boxed{W_f = -f_k d}$$

نکته: $W_{\text{نیروی پایستار}} = -\Delta U$

به طور کلی: برای اصطکاک که داریم : $\boxed{W_f = -\Delta E_{th}}$

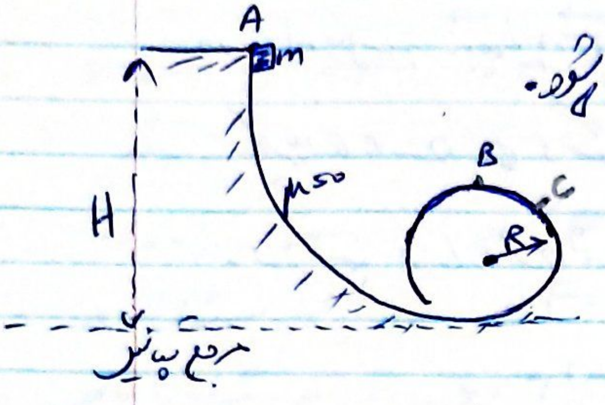
نشد: ΔE_{in} انرژی درونی جسم

حالت کلی → اگر مثلاً سطح شیب‌دار داشتیم، فنر داشتیم ...

$$\boxed{W_{F_{ext}} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_{\text{فنر}} + \Delta E_{thermal} + \ldots}$$

فصل ۸

م ۱۲
ف ۷ هورسول ۹



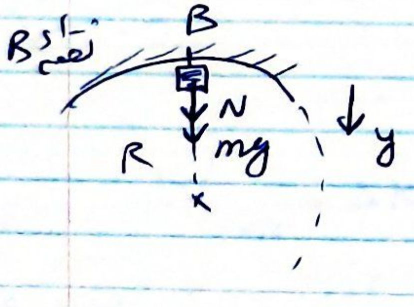
جسم m از A از حال سکون رها می‌شود.
حداقل ارتفاع H را طوری بیابید که در تمام
اوقات، جسم m در تماس با مسیر باقی بماند؟
(شعاع حلقه: R)   ب: نیروی عمودی در B
ج: نیروی کنار در C)

حل:
از روش پایستگی انرژی مکانیکی: [illegible]

$$E_A = E_B$$

$$0 + mgH = mg(2R) + \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad ①$$

H زمانی حداقل است که v_B حداقل باشد. که v_B حداقل کیست؟



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$N + mg = m\frac{v_B^2}{R} \xrightarrow[N=0]{v_B \text{ زمانی حداقل است که}}$$

$$\to mg = m\frac{v_B^2}{R} \to \boxed{v_{B\,min}^2 = Rg} \xrightarrow{\text{در معادله } ①}$$

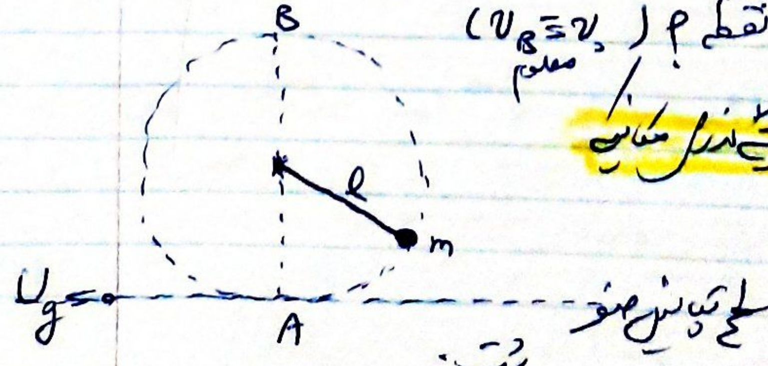
$$\Rightarrow \cancel{m}gH = \cancel{m}g2R + \frac{1}{2}\cancel{m}Rg$$

$$\boxed{H = 2R + \frac{1}{2}R = 2.5R}$$

حداقل H که در تمام لحظات
جسم m در تماس با مسیر باقی بماند.

مثال
هورسول ۷-۴

m به نخ سبک وصل است، طول نخ l. در مسیر دایره‌ای قائم حرکت می‌کند.
در همه لحظات حرکت ذره نخ کشیده و محکم باقی می‌ماند. سرعت ذره
در پایین‌ترین نقطه؟ ($v_B = v_0$ معلوم)



پایستگی انرژی مکانیکی:

$$E_A = E_B$$

$$0 + \frac{1}{2}mv_A^2 = mg2l + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\to \boxed{v_A = \pm\sqrt{4gl + v_0^2}}$$

ثبت:

در مثال قبل ، $\vec{T} \perp \overrightarrow{\text{جابجایی}}$ ⇐ $W_T =$ صفر ⇐ تنها نیروی باقیمانده ، mg است

که پایستار است ⇐ دستگاه شامل نیروهای پایستار است ⇐ پایستگی انرژی مکانیکی

برای سیستم برقرار است .

فصل ۸

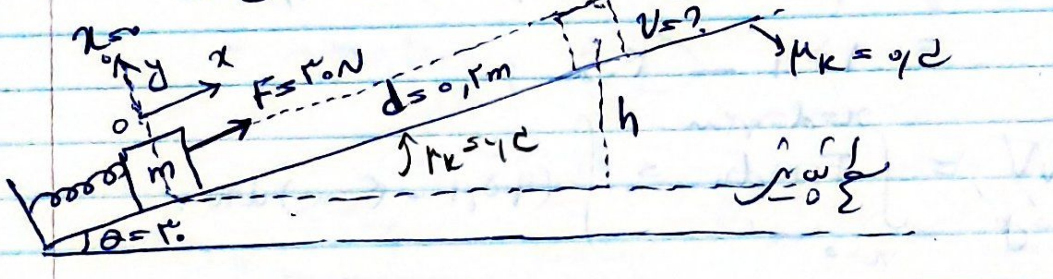
P.10

مثال

هورسون ۱۴-۷ جسم m به فنری سبک و با ثابت فنر $K = 40\ N/m$ متصل است و روی سطح شیبداری با $\mu_k = 0٫3$ و $\theta = 30$ قرار دارد. m از موضع فنر واهلیده ($x_0 = 0$) از حال سکون شروع به حرکت می‌کند توسط اعمال یک نیروی خارجی $F = 30\ N$ که به موازات سطح شیبدار است، سرعت جسم پس از طی مسافت ۰٫۲m ($= d$) به طرف بالای سطح شیبدار را بیابید.

$m = 2kg$

(از دو راه قضیه کار انرژی $W_{کل} = \Delta K$ و پایستگی انرژی مکانیکی).



حل: از طریق پایستگی انرژی مکانیکی:

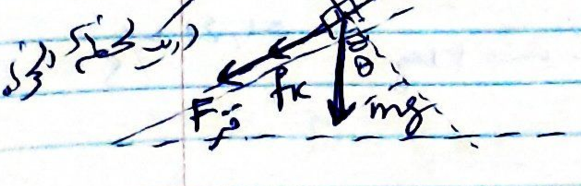
$$W_{F_{ext}} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta E_{th} + \Delta U_{\text{فنر}}$$

انرژی پتانسیل گرانشی جسم m — انرژی گرمایی به وجود آمده — انرژی پتانسیل فنر کشیده شده

$$Fd = (\tfrac{1}{2}mv^2 - 0) + (mgh - 0) + f_k d + \tfrac{1}{2}Kd^2$$

و $\frac{h}{d} = \sin\theta \rightarrow h = d\sin\theta = 0٫2 \times 0٫5 = 0٫1m$

و $f_k = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta = 0٫3 \times 2 \times 9٫8 \times 0٫87 = 5٫1\ N$



$$\Rightarrow 30^N \times 0٫2^m = \tfrac{1}{2} \times 2 \times v^2 + 2 \times 9٫8 \times 0٫1 + 5٫1 \times 0٫2 + \tfrac{1}{2}\, 40 \times 0٫2^2$$

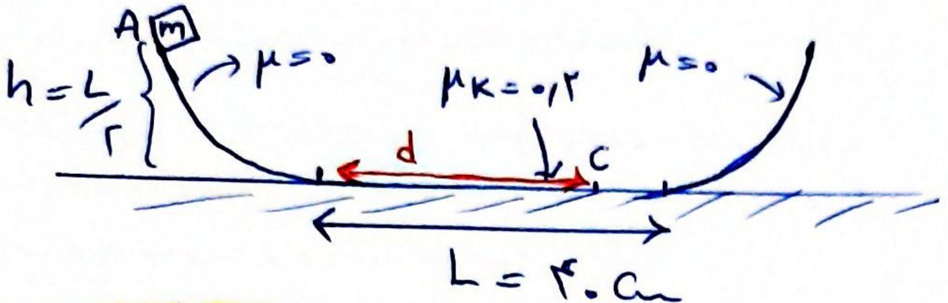
$$v^2 = 2٫22 \longrightarrow v = \sqrt{2٫22} = 1٫49\ m/s$$

م ۶۵

فصل ۸

m از حال سکون رها می‌شود.

الف) این جسم در چه فاصله‌ای از لبه‌ی چپ بخش تخت میز، متوقف می‌شود؟



حل:

راه ۱:

$$W_{F_{ext}} = \Delta U + \Delta K + \Delta E_{th}$$

تولید گرما

$$0 = (0 - mg\tfrac{L}{2}) + (0-0) + f_k L + f_k L + \dots + f_k d$$

$$0 = -mg\tfrac{L}{2} + f_k D$$

D = مسافت کلی که m طی کرده و در آن مسافت گرما تولید شده، تا بالاخره بایستد.

$$\Rightarrow D = \frac{mg\frac{L}{2}}{\mu_k N} = \frac{\cancel{mg}\frac{L}{2}}{\mu_k \cancel{mg}} = \frac{L}{2\mu_k} = \frac{10}{4}L = 2.5L$$

$$\Rightarrow \boxed{d = 0.5L}$$ یعنی جرم m در وسط مسیر تخت می‌ایستد

راه ۲:

E_A انرژی مکانیکی در نقطه‌ی A (نقطه‌ی اولیه حرکت) $= E_C$ انرژی مکانیکی در نقطه‌ی نهایی

$$mg\tfrac{L}{2} = 0 + 0 + \underbrace{f_k L + f_k L + \dots + f_k d}_{f_k D}$$

جنبشی و پتانسیل گرانشی

$$\rightsquigarrow D = 2.5L \rightarrow \boxed{d = 0.5L}$$

ب: کار نیروی اصطکاک از ابتدای حرکت تا لحظه توقف نهایی جسم (برحسب m و L)؟

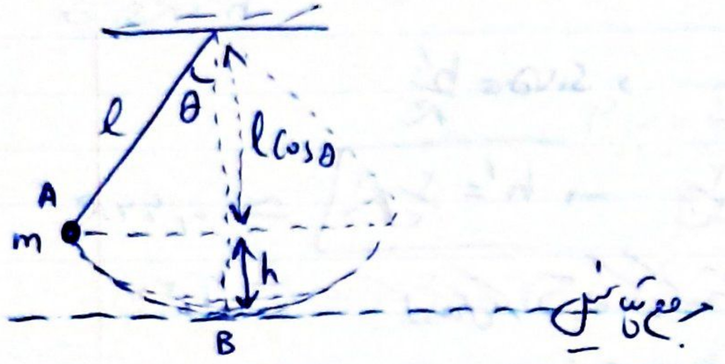
حل:

$$W_{f_k} = -f_k D = -\mu_k N D = -\mu_k mg D$$
$$= -0.2 \times m \times 10 \times 2.5L =$$
$$= -5mL$$ ژول

(کار نیروی اصطکاک، منفی است)

مثال

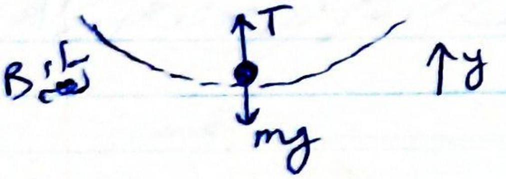
۲ در شکل روبرو V یک آونگی به جرم m و نخ سبک به طول l. وزنه m از زاویه θ، از حالت سکون رها می‌شود. الف. سرعت m در پایین‌ترین نقطه؟
ب. کشش نخ در لحظه‌ای که m به پایین‌ترین نقطه می‌رسد؟
(برحسب m و g و θ و l)



حل: از قانون پایستگی انرژی مکانیکی

$$E_A = E_B$$
$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v_B^2$$
$$, \quad l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta) = h$$
$$\rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}}$$

ب:

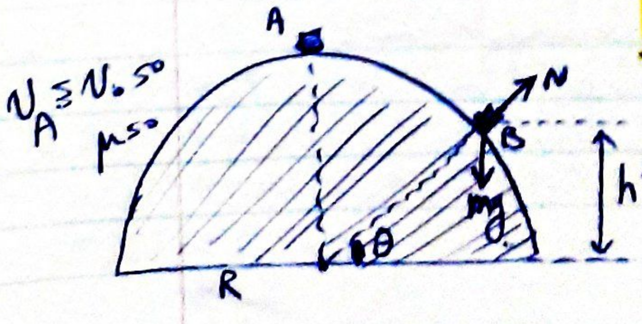


$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$
$$T - mg = m a_c = m \frac{v_B^2}{R \equiv l}$$
$$\rightarrow T = m\left(g + \frac{v_B^2}{l}\right)$$
$$= m\left(g + 2g(1-\cos\theta)\right)$$
$$\boxed{T = mg(3 - 2\cos\theta)}$$

کودکی در ابتدا در بالای تپه، در نقطه A، نشسته. شعاع کره $13/8\ m$. او شروع به سُر خوردن به طرف پایین می‌کند. یخ بدون اصطکاک. در چه ارتفاعی کودک تماس خود را با یخ از دست می‌دهد؟

م ۲۶ $\boxed{\text{م ۳۴}}$

ف ۸ هالیدی ۱۰ ف ۸ ویرایش ۸

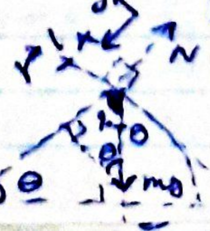


با پایستگی انرژی مکانیکی: $E_A = E_B$

$$mgR + 0 = mgh' + \frac{1}{2} m v_B^2 \quad ①$$

دو مجهول v_B و h'

در نقطه B:



$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$
$$-N + mg\sin\theta = m$$
$$\equiv F_C$$ [illegible]

در لحظه‌ای که کودک $\longrightarrow$ تماسش را از دست می‌دهد: $N=0$

$$\boxed{g\sin\theta = \frac{v_B^2}{R}} \quad ②$$

در ① $\to$

$$۲g\cancel{R} = ۲g\cancel{R}\sin\theta + \cancel{R}\,\cancel{g}\sin\theta \qquad , \qquad \frac{h'}{R} = \sin\theta$$

$$h' = R\sin\theta$$

$$۲ = ۳\sin\theta$$

$$\sin\theta = ۲/۳ \quad , \quad \sin\theta = \frac{h'}{R}$$

$$\to \frac{h'}{R} = ۲/۳ \to \boxed{h' = ۲/۳\,R} \simeq ۰{,}۶۶R$$

$$= ۹{,}۲\,m$$

ارتفاعی که در آن کودک تماس خود با یخ از دست می‌دهد.

②

م ۸۷
ف ۸ ویرایش ۱۰

م ۱۴۴
ف ۸ ویرایش ۸

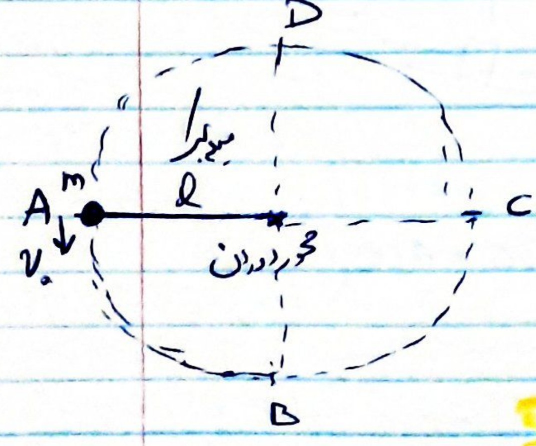
میله صلب، بی‌وزن و به طول l، جرم m به سر آن چسبیده. میله روی دایره‌ای قائم حرکت می‌کند. سیستم را از وضعیت افقی A با سرعت اولیه v_0 به حرکت درمی‌آوریم. در این حالت، گلوله به محض رسیدن به D، متوقف می‌شود.

الف. v_0 را برحسب m، l و g به دست آورید؟

ب. نیروی کشش میله در نقطه B؟

ج: محور دوران را کمی ماله می‌کشیم (اصطکاک داریم). در این حالت، وقتی سیستم از حالت افقی A و با همان سرعت قبلی، به حرکت درآید، گلوله به محض رسیدن به C، متوقف می‌شود. کاهش انرژی مکانیکی در حین حرکت چقدر است؟

د. وقتی گلوله پس از چند دور گردش در B متوقف شود، کاهش انرژی مکانیکی چقدر خواهد بود؟



الف: پایستگی انرژی مکانیکی : $E_A = E_D$

$$mgl + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 + mg2l$$

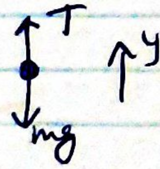
$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gl}}$$

ب: پایستگی انرژی $E_A = E_B$

$$mgl + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gl + v_0^2} = \sqrt{2gl + 2gl} = \boxed{2\sqrt{gl}}$$

در نقطه B :



$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$$T - mg = ma_c = m\frac{v_B^2}{l}$$

[illegible]

$$T = mg + m\frac{v_B^2}{l} = 5mg$$

ج: اصطکاک داریم

$$E_A = mgl + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$E_C = mgl + 0 \rightarrow \text{کاهش انرژی مکانیکی} = E_C - E_A$$

$$= -\frac{1}{2}mv_0^2$$

که همان اتلاف انرژی مکانیکی [illegible]

پشت →

$$\ldots = -\frac{1}{2}m(2gl) = -mgl$$

که به صورت انرژی گرمایی ظاهر شده است .

ج :

$$\mathcal{E}_A = mgl + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\mathcal{E}_B = 0 + 0 \quad \Longrightarrow$$

کاهش انرژی مکانیکی ≡ اتلاف کل انرژی مکانیکی $= \mathcal{E}_B - \mathcal{E}_A$

$$= -mgl - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$= \boxed{-}2mgl$$

نشان دهنده اتلاف انرژی است .

مساله ۲)

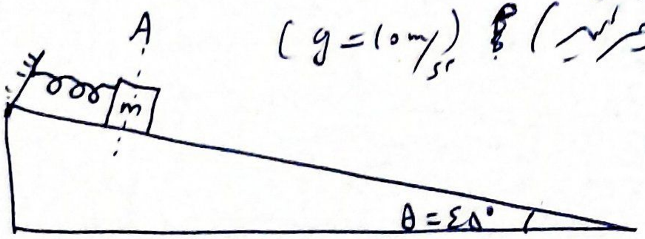
فصل ۸ هالیدی

۲- در شکل مقابل، جسم $m = 4\,kg$ به فنری با ثابت فنر $k = 100\sqrt{2}$ متصل است.

ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح شیبدار $\mu_k = 1/4$ است. در نقطه‌ی A در حالی که فنر در حالت عادی است، دستگاه را از حالت سکون رها می‌کنیم.

الف. حداکثر مقدار کشیدگی فنر را بیابید؟

ب. در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی A، سرعت جسم ماکزیمم می‌شود؟

ج. مجموعاً جرم m تقریباً چه طولی را رفت و برگشت می‌کند تا بالاخره به سکون نهایی برسد؟ (اصطکاک ایستایی وارد بر جسم را در این لحظه ناچیز فرض کنید)؟ ($g = 10\,m/s^2$)