



مرکز مشاوره سیب ترش
بزرگترین مرکز آنلاین آموزشی کشور

دقیقه

ریاضات و حسابان جامع



برگی از افتخارات و رتبه برترهای مرکز مشاوره ای - آموزشی سیب ترش

رتبه برتر های سیب ترشی در همه علوم پزشکی های کشور

نگین خان باباپور
پزشکی اصفهان



هیمن اخشیع
پزشکی تبریز



سینا حقیقی
پزشکی ایران



فردین مرادی
پزشکی شهید بهشتی



ثمین آذر
پزشکی تهران



مینا نظری
پزشکی کاشان



الهه گنجی
پزشکی همدان



عیسی طهماسبی
پزشکی کرج



مهلا تشکری
پزشکی مشهد



هستی فلاح
پزشکی شیراز



زهرا صادقی
پزشکی ایلام



محمد حسین عباسی
پزشکی کردستان



علیرضا متظهری
پزشکی کرمانشاه



حسین چند
پزشکی اراک



محمد حسین غلامی
پزشکی شهرکرد



معصومه جعفری
پزشکی گرگان



مهدی وحدانی
پزشکی ساری



آیدا بیک زاده
پزشکی بابل



فاطمه اسمعیلی
پزشکی اردبیل



الناز رضائی
پزشکی ارومیه



سروش رئیسی
پزشکی چهرم



هیوا صالحی
پزشکی آبادان



حسین شفیق پور
پزشکی دزفول



فائزه سلطان پور
پزشکی اهواز



محمد امین اسکندری
پزشکی گیلان



مهتاب باقرزاده
پزشکی سبزوار



غزل عباسی
پزشکی شاهرود



فاطمه صحرایی
پزشکی قم



تینا ذوالفقاری
پزشکی سمنان



محمد حسام روحانی
پزشکی زنجان



محمد سارانی
پزشکی ابرانشهر



نوشین ضاربان
پزشکی زاهدان



الناز براتی
پزشکی بجنورد



فاطمه طاهری
پزشکی بیرجند



سعید رضایی
پزشکی بندرعباس



کیما محمدی
پزشکی کرمان



حسین ترابی میرزائی
پزشکی یزد



مانیا کریم پور
پزشکی قزوین



نازنین غلامی
پزشکی یاسوج



محمد مهدی موسی پور
پزشکی لرستان



علی ترابیان
پزشکی شاهد تهران



محمد حیدری
پزشکی آجا تهران



محمد مهدی غلامی
پزشکی بقیه الله تهران



رضا دستخون
پزشکی رفسنجان



فریبا برفه ای
پزشکی بم



رتبه برتر بعدی میتونی تو باشی ! 🍏👉





مرکز کنکوری سیب ترش

مدیر دیپارتمان ریاضی : دکتر بهزاد محرمی

کانال تلگرام سیب ترش: @siiibtors

دقیقه ۹۰: ویژه تورق سریع

حسابان و ریاضی پایه: کل فصل ها

سیب ترش: موفق ترین خانواده کنکوری

تابع

۱- نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

سراسری- ۱۳۹۸

- ① (۳, ۴) ② (۲, ۵) ③ (۳, ۵) ④ (۲, ۶)

۲- قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

خارج از کشور- ۱۳۹۷

- ① -۲ ② ۰٫۵ ③ ۱ ④ ۱٫۵

۳- نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را، ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟

سراسری- ۱۳۹۳

- ① -۳٫۵ ② -۳ ③ -۲٫۵ ④ -۲

۴- اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه تعریف تابع $f \circ g$ کدام است؟

سراسری- ۱۳۹۴

- ① $[-4, 2]$ ② $[-2, 0]$ ③ $[-4, -1] \cup (1, 2]$ ④ $[-4, -2] \cup (0, 2]$

۵- اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ باشد، دامنه تابع $y = f(3-x)$ ، کدام است؟

سراسری- ۱۳۹۲

- ① $[0, 2]$ ② $[0, 3]$ ③ $[1, 2]$ ④ $[1, 3]$

۶- اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ ، برابر کدام است؟

سراسری- ۱۳۹۷

- ① $x^2 - x + 3$ ② $x^2 - 2x - 1$ ③ $x^2 - 2x + 1$ ④ $x^2 - x + 1$

۷- در بازه‌ای که تابع $f(x) = |x-2| + |x-3|$ روی آن اکیداً نزولی است، نمودار f با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 1$ چند نقطه مشترک دارد؟

سراسری- ۱۳۹۷

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ فاقد نقطه مشترک

۸- تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |x-1|$ ، روی کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

سراسری- ۱۳۹۸

- ① $(-\infty, -2)$ ② $(-\infty, 1)$ ③ $(-2, 1)$ ④ $(1, +\infty)$



سراسری- ۱۳۹۴

۹- تابع با ضابطه $f(x) = x|x-2|$ ، در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟

- ① $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}; x < 0$
 ② $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}; x < 1$
 ③ $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$
 ④ $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$

سراسری- ۱۳۹۷

۱۰- قرینه خط $4x - 3y = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- ① -۲
 ② -۱
 ③ ۱
 ④ ۲

مثلات

۱۱- اندازه دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویه 60° درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

خارج از کشور- ۱۳۹۶

- ① ۴۸
 ② ۵۴
 ③ ۶۴
 ④ ۷۲

سراسری- ۱۳۹۴

۱۲- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = 0.28$ ، کدام است؟

- ① $-\frac{16}{9}$
 ② $-\frac{9}{16}$
 ③ $\frac{9}{16}$
 ④ $\frac{16}{9}$

سراسری- ۱۳۹۸

۱۳- حاصل عبارت $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$ ، کدام است؟

- ① $-\frac{1}{4}$
 ② $-\frac{1}{2}$
 ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{1}{2}$

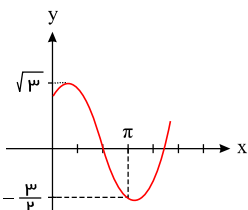
خارج از کشور- ۱۳۹۵

۱۴- اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$ ، کدام است؟

- ① -۲
 ② $-\frac{1}{2}$
 ③ $\frac{1}{2}$
 ④ ۲

سراسری- ۱۳۹۸

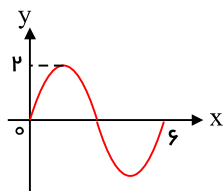
۱۵- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. b کدام است؟



- ① $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 ② $\frac{3}{2}$
 ③ $\sqrt{3}$
 ④ ۲



خارج از کشور- ۱۳۹۳

۱۶- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟

$$\frac{5}{3} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$\frac{8}{3} \quad (4)$$

$$\frac{7}{4} \quad (3)$$

سراسری- ۱۳۹۷

۱۷- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ ، کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \quad (4)$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \quad (3)$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (2)$$

$$x = \frac{k\pi}{4} \quad (1)$$

سراسری- ۱۳۹۱

۱۸- نمودار تابع $y = -4 \cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$ ، روی بازه‌ی $[-1, 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

سراسری- ۱۳۹۶

۱۹- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ ، کدام است؟

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (2)$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

سراسری- ۱۳۹۲

۲۰- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ ، به کدام صورت است؟

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

حد

خارج از کشور- ۱۳۹۷

۲۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}}$ ، کدام است؟

$$24 \quad (4)$$

$$16 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

خارج از کشور- ۱۳۹۵

۲۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

سراسری- ۱۳۹۸

۲۳- حد عبارت $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[3]{x}}$ ، وقتی $x \rightarrow -8$ ، کدام است؟

$$-6 \quad (4)$$

$$-12 \quad (3)$$

$$-18 \quad (2)$$

$$-24 \quad (1)$$



خارج از کشور- ۱۳۹۸

۲۴- حد عبارت $\frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16}$ وقتی $x \rightarrow 2$ ، کدام است؟

- ① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $-\frac{1}{8}$

سراسری- ۱۳۸۹

۲۵- حد عبارت $\frac{\cos x}{1 - \sin x}$ وقتی $x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+$ ، کدام است؟

- ① $+\infty$ ② ۲ ③ ۱ ④ $-\infty$

سراسری- ۱۳۹۸

۲۶- در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$ ، کدام بیان، درست است؟

- ① $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ ② $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ③ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ④ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

سراسری- ۱۳۹۸

۲۷- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{x^2 + ax + b} = -\infty$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- ① -۱ ② صفر ③ ۱ ④ ۲

خارج از کشور- ۱۳۹۸

۲۸- در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$ ، کدام بیان، درست است؟

- ① $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} f(x) = -\infty$ ② $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} f(x) = +\infty$ ③ $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} f(x) = -\infty$ ④ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = +\infty$

سراسری- ۱۳۹۴

۲۹- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

- ① -۶ ② -۴ ③ ۳ ④ ۵

خارج از کشور- ۱۳۹۸

۳۰- اگر $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، کدام است؟

- ① -۲ ② -۱ ③ ۲ ④ ۳

پیوستگی

سراسری- ۱۳۹۶

۳۱- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a ، در نقطه‌ای به طول $x = 0$ پیوسته است؟

- ① -۲ ② -۱ ③ ۱ ④ ۲



سراسری - ۱۳۹۸

۳۲- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{8+x^3}{|x+2|} & ; x \neq -2 \\ a & ; x = -2 \end{cases}$ در نقطه $x = -2$ ، فقط از چپ پیوسته است؟

- ① -۱۲ ② -۶ ③ ۶ ④ ۱۲

خارج از کشور - ۱۳۸۹

۳۳- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x-2} & ; x > 2 \\ 2x + b & ; x \leq 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار b همواره پیوسته است؟

- ① -۴ ② -۲ ③ ۲ ④ ۴

سراسری - ۱۳۹۷

۳۴- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} & ; x < 3 \\ a \log_2(1+x) & ; x \geq 3 \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x = 3$ پیوسته است، $f(2)$ کدام است؟

- ① -۲ ② -۱٫۵ ③ ۱ ④ صفر

سراسری - ۱۳۹۳

۳۵- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & ; \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

- ① $-2\sqrt{2}$ ② -۱ ③ $\sqrt{2}$ ④ ۲

خارج از کشور - ۱۳۸۹

۳۶- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = [4 \sin^2 \pi x]$ روی بازه $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳۷- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sin 3x & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos 2x & \frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$ با شرط $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ در بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته است $a - b$ کدام است؟

- ① -۵ ② -۴ ③ ۴ ④ ۵

سراسری - ۱۳۸۹

۳۸- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & ; x > 6 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از ۱، پیوسته است؟

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$

سراسری - ۱۳۹۴

۳۹- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & x > 2 \\ ax - 1 & x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

- ① هر مقدار حقیقی a ② هیچ مقدار a ③ فقط $a = -2$ ④ فقط $a = 2$

سراسری - ۱۳۹۱



سراسری- ۱۳۹۹

۴۰- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases}$ یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a ، کدام است؟

۵/۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۳/۲ (۱)

مشتق

سراسری- ۱۳۹۵

۴۱- در تابع با ضابطه $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ، کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

-۱۸ (۲)

-۲۱ (۱)

۴۲- منحنی‌های تابع $f(x) = -x^2 + bx + 3$ بر خط به معادله $y = 7$ مماس‌اند. فاصله‌ی دو نقطه‌ی تماس کدام است؟ خارج از کشور- ۱۳۸۵

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۴۳- تابع $f(x) = \frac{4x-5}{x+1}$ با دامنه $[0, 8]$ ، یکی از خطوط مماس بر نمودار موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای نمودار را به هم وصل کند.

خارج از کشور- ۱۳۹۸

این خط مماس، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

-۰٫۵ (۴)

-۱ (۳)

-۱٫۵ (۲)

-۲ (۱)

۴۴- خط مماس بر منحنی $y = x^3 + 3x^2 + 1$ ، بر خط $x - 3y = 2$ عمود است. کدام نقطه روی این خط مماس قرار دارد؟ سراسری- ۱۳۸۹

(۲ و -۶) (۴)

(۲ و -۴) (۳)

(۱ و ۴) (۲)

(۱ و ۳) (۱)

خارج از کشور- ۱۳۸۹

۴۵- خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ در نقطه $(2, \frac{1}{2})$ ، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۴/۳ (۴)

۷/۶ (۳)

۵/۶ (۲)

۲/۳ (۱)

۴۶- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ ، در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن، از نقطه $(-1, 0)$ می‌گذرد. α کدام است؟

خارج از کشور- ۱۳۸۷

۲ (۴)

۳/۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

سراسری- ۱۳۸۵

۴۷- به ازای کدام مقدار a ، منحنی به معادله $ay = x^2 + 5x + 4$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس است؟

۹ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)



سراسری- ۱۳۹۴

۴۸- اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

- ① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ مشتق ندارد.

خارج از کشور- ۱۳۹۸

۴۹- در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{8}{ax+b} & ; x > 2 \\ -x^3 + 6x & ; x \leq 2 \end{cases}$ اگر $f'(2)$ موجود باشد، a کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

خارج از کشور- ۱۳۹۰

۵۰- در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x > 1 \\ ax+b & ; x \leq 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است. b کدام است؟

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{10}{3}$

کاربرد مشتق

سراسری- ۱۳۸۵

۵۱- نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث اند. نوع این مثلث کدام است؟

- ① متساوی الاضلاع ② فقط متساوی الساقین ③ فقط قائم الزویه ④ قائم الزویه و متساوی الساقین

سراسری- ۱۳۸۰

۵۲- نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2}$ در بازه $(-1, 1)$ کدام است؟

- ① $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}$ ④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$

خارج از کشور- ۱۳۸۶

۵۳- نقطه بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$ روی بازه $(-1, 2)$ چگونه است؟

- ① مینیمم ② ماکسیمم ③ عادی ④ مشتق ناپذیر

سراسری- ۱۳۸۵

۵۴- ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$

خارج از کشور- ۱۳۸۷

۵۵- کمترین فاصله نقطه $(4, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x+9}$ کدام است؟

- ① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ ۳ ④ ۴



۵۶- از میان مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی‌متر است، مثلی را اختیار کرده‌ایم که مساحت آن ماکسیمم است. مساحت این مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

سراسری- ۱۳۸۴

- ① ۳۰ ② ۳۲ ③ ۳۴ ④ ۳۶

۵۷- بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

خارج از کشور- ۱۳۹۸

- ① ۱۸ ② ۲۴ ③ ۲۷ ④ ۳۶

۵۸- تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ همواره صعودی است. حدود تغییرات a کدام است؟

سراسری- ۱۳۸۲

- ① $0 \leq a < 2$ ② $-\sqrt{3} \leq a < 2$ ③ $|a| \leq \sqrt{3}$ ④ $|a| \leq 2$

۵۹- دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵- نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ هستند. مقدار مینیمم نسبی این تابع کدام است؟

خارج از کشور- ۱۳۸۹

- ① -۸۴ ② -۸۱ ③ -۵۷ ④ -۷۵

۶۰- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، حدود a کدام است؟

خارج از کشور- ۱۳۸۵

- ① $a < -2$ یا $a > 0$ ② $a > 2$ یا $a < 0$ ③ $-2 < a < 0$ ④ $0 < a < 2$

مباحث مقدماتی

سراسری- ۱۳۹۷

۶۱- در تجزیه عبارت $(x-2)(x^2-4x+4)-1$ ، کدام عامل ضرب، موجود است؟

- ① $x-3$ ② $x-2$ ③ $x-1$ ④ $x+3$

سراسری- ۱۳۹۶

۶۲- خلاصه شده عبارت $(x-2 - \frac{x^2+1}{x}) \div \frac{4x^2+4x+1}{2x^2+x}$ ، کدام است؟

- ① $\frac{1}{x-1}$ ② $\frac{-1}{x+1}$ ③ ۱ ④ -۱

سراسری- ۱۳۹۳

۶۳- در تجزیه عبارت $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$ ، کدام عامل ضرب وجود دارد؟

- ① $x-4$ ② $x-2$ ③ $x+2$ ④ $x+3$

۶۴- مجموع سه عدد a, b, c برابر ۱۱ و مجموع حاصل ضرب دوبه‌دوی آن‌ها برابر ۳ می‌باشد. مجموع مجزورات این سه عدد کدام است؟

خارج از کشور- ۱۳۹۱

- ① ۹۰ ② ۱۰۵ ③ ۱۱۰ ④ ۱۱۵



خارج از کشور- ۱۳۸۹

۶۵- اگر $a + 2b = 3$ باشد، حاصل $a(a + 2) + 4b(b + 1) + 4ab$ کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

سراسری- ۱۳۹۴

۶۶- اگر $x = 7 - 2\sqrt{6}$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{\frac{x+2}{25}} + \frac{1}{x}$ کدام است؟

۱٫۴ (۴)

۱٫۲ (۳)

۰٫۸ (۲)

۰٫۶ (۱)

سراسری- ۱۳۹۴

۶۷- ساده شده‌ی عبارت $\left(\sqrt[3]{5 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4} + (-\sqrt{2})^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(\sqrt[3]{2\frac{1}{4}}\right)^3$ کدام است؟

۴٫۵ (۴)

۳٫۷۵ (۳)

۳٫۵ (۲)

۳٫۲۵ (۱)

سراسری- ۱۳۹۲

۶۸- حاصل عبارت $\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$ کدام است؟

صفر (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

خارج از کشور- ۱۳۹۴

۶۹- ساده شده‌ی عبارت $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} + \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - 4\sqrt{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-0/25}$ کدام است؟

-۱٫۵ (۴)

-۱٫۷۵ (۳)

-۲٫۲۵ (۲)

-۲٫۵ (۱)

سراسری- ۱۳۹۳

۷۰- حاصل عبارت $\sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{9} + \frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} - \sqrt{80}$ کدام است؟

۳ - ۲√۵ (۴)

-۱ - ۲√۵ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

مجموعه - الگو - دنباله

۷۱- اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه اشتراک آنها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید، کدام است؟

سراسری- ۱۳۹۴

۲۶ (۴)

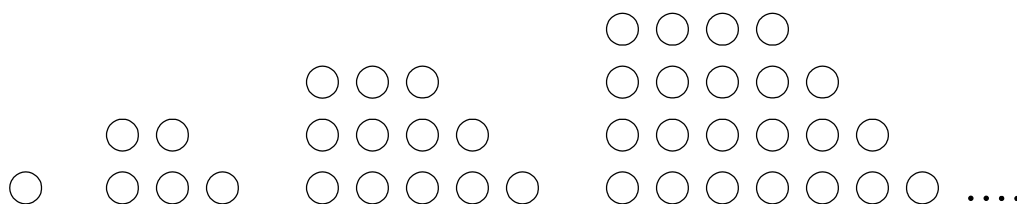
۲۴ (۳)

۲۳ (۲)

۲۲ (۱)

۷۲- در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل نهم، کدام است؟

سراسری- ۱۳۹۸



۱۲۵ (۴)

۱۲۳ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۱۷ (۱)



۷۳- اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی $\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \dots$. در این صورت جمله آخر واقع در دسته شماره چهل کدام است؟

① ۱۵۶۳

② ۱۵۸۹

③ ۱۶۳۹

④ ۱۶۵۱

خارج از کشور- ۱۳۹۴

۷۴- در دو دنباله حسابی $2, 7, 12, \dots$ و $8, 11, 14, \dots$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

① ۵۸

② ۵۹

③ ۶۰

④ ۶۱

۷۵- در دنباله‌های حسابی $2, 9, 16, 23, \dots$ و $12, 17, 22, 27, \dots$ چند عدد سه رقمی مشترک کوچک‌تر از 300 موجود است؟

① ۵

② ۶

③ ۷

④ ۸

خارج از کشور- ۱۳۹۵

۷۶- در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن 30 است. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

① ۷٫۵

② ۸

③ ۸٫۵

④ ۹

خارج از کشور- ۱۳۸۵

۷۷- در یک دنباله حسابی با جملات متمایز، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله‌ای هندسی باشند. چندمین جمله این دنباله حسابی، صفر است؟

① ۹

② ۱۰

③ ۱۱

④ ۱۲

سراسری- ۱۳۸۸

۷۸- در یک دنباله هندسی صعودی سه مقدار، «جمله دوم»، «دو برابر جمله پنجم» و «جمله هشتم» می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند؛ در بین این سه عدد بزرگ‌ترین مقدار چند برابر کوچک‌ترین مقدار است؟

① $2 + \sqrt{3}$ ② $5 + 2\sqrt{3}$ ③ $5 + 4\sqrt{3}$ ④ $7 + 4\sqrt{3}$

خارج از کشور- ۱۳۹۲

۷۹- اعداد $2^a, 2^b$ و $4\sqrt{2}$ سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی‌اند، واسطه عددی بین a و b کدام است؟

① ۲٫۵

② ۲

③ ۱٫۵

④ $\sqrt{2}$

سراسری- ۱۳۸۷

۸۰- در یک دنباله عددی، جملات اول و پنجم و یازدهم به‌ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی صعودی‌اند. قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$

خارج از کشور- ۱۳۸۷

معادلات

سراسری- ۱۳۸۸

۸۱- به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟① $-\frac{3}{2} < m < 2$ ② $0 < m < 2$ ③ $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$ ④ $\frac{3}{2} < m < 2$



۸۲- به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 - 2mx - 3 = (m - 6)x^2$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟ سراسری- ۱۳۹۷

- ① $m < -6$ ② $m > 3$ ③ $0 < m < 3$ ④ $3 < m < 6$

۸۳- مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + x - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟ سراسری- ۱۳۹۰

- ① ۴ ② -۲ ③ ۲ ④ -۴

۸۴- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟ سراسری- ۱۳۹۴

- ① $x^2 - 3x + 1 = 0$ ② $x^2 + 3x + 1 = 0$ ③ $x^2 - 5x + 2 = 0$ ④ $x^2 + 5x + 2 = 0$

۸۵- به ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^3 + (a - 1)x^2 + (4 - a)x = 4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟ خارج از کشور- ۱۳۹۴

- ① $(-\infty, -4)$ ② $(-\infty, -4)$ ③ $(4, +\infty)$ ④ $(4, +\infty)$
 $-\{-5\}$

۸۶- به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = 2x^2 + (m + 1)x + m + 6$ ، بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات، مماس است؟ خارج از کشور- ۱۳۹۳

- ① -۴ ② $-12, 4$ ③ $12, -4$ ④ ۱۲

۸۷- سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟ سراسری- ۱۳۹۸

- ① ۱۲ ② ۱۵ ③ ۲۰ ④ ۲۵

۸۸- پرنده‌ای فاصله یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟ خارج از کشور- ۱۳۹۸

- ① ۱۲ ② $12,5$ ③ $13,5$ ④ ۱۵

۸۹- بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟ سراسری- ۱۳۹۸

- ① ۳۲ ② ۳۳ ③ ۳۵ ④ ۳۶

۹۰- اگر $3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2$ باشد، حاصل $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟ سراسری- ۱۳۹۸

- ① $1,5$ ② $2,5$ ③ $3,5$ ④ $4,5$



تعیین علامت و نامعادله

خارج از کشور - ۱۳۹۶

۹۱- اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

- ① $[\frac{2}{3}, 2]$ ② $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ ③ $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$ ④ $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

سراسری - ۱۴۰۲

۹۲- نمودار تابع $y = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}$ ، به ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y = 0$ و $y = -2$ واقع می‌شود؟

- ① ۱ ② ۳ ③ ۴ ④ صفر

سراسری - ۱۳۹۸

۹۳- مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{2x-3}{x+1} < 1$ ، به کدام صورت است؟

- ① $\mathbb{R} - [-6, 4]$ ② $\mathbb{R} - [-4, 6]$ ③ $x > 4$ ④ $x < -6$

خارج از کشور - ۱۳۹۸

۹۴- مجموعه جواب نامعادله $\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$ ، به صورت بازه، کدام است؟

- ① $(-4, 1) \cup (2, 3)$ ② $(2, 4)$ ③ $(-1, 2) \cup (2, 4)$ ④ $(-1, 2)$

سراسری - ۱۳۹۵

۹۵- اگر مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{3x+4} > 2|x-1| - x$ ، بازه (a, b) باشد، طول وسط این بازه، کدام است؟

- ① $\frac{5}{2}$ ② ۳ ③ $\frac{7}{2}$ ④ ۴

۹۶- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ ، در بازه (a, b) زیر محور x هاست. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

سراسری - ۱۳۸۸

- ① ۵ ② ۳ ③ ۴ ④ ۲

۹۷- فرض کنید مجموعه جواب نامعادله $\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x-3} > 0$ به ازای $x > \frac{3}{2}$ بازه $[2, 4]$ باشد مقدار m کدام است؟

سراسری - ۱۴۰۰

- ① -۲ ② صفر ③ ۱ ④ ۲

۹۸- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ ، در بازه (a, b) پایین‌تر از خط به معادله $y = 2$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۸۸

- ① ۴ ② ۶ ③ ۸ ④ ∞



خارج از کشور- ۱۴۰۱

۹۹- اگر $0 < \frac{1-3x}{x+1} < 2$ باشد، مجموعه مقادیر $\left[\frac{x}{2}\right]$ چند عضو دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۰۰- فرض کنید مجموعه جواب نامعادله $\frac{((m^2-1)x^2-4mx+4)(2x-3)}{x-3\sqrt{x}+2} \geq 0$ فقط یک بازه باشد. مقدار m کدام است؟

خارج از کشور- ۱۴۰۰

 $\frac{7}{3}$ (۴)

۲ (۳)

 $\frac{1}{3}$ (۲)

-۱ (۱)

قدر مطلق

سراسری- ۱۳۹۹

۱۰۱- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^2-4x+4}$ و $y = \frac{1}{2}x + 2$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۱۰۲- اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y = 3$ کدام است؟

سراسری- ۱۳۹۵

۶ (۴)

۴٫۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

سراسری- ۱۳۹۷

۱۰۳- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x|$ و $y = 5 - |x-1|$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۱۰۴- در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ ، بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است. طول نقطه وسط این بازه کدام است؟

سراسری- ۱۳۹۷

-۰٫۵ (۴)

-۱ (۳)

-۱٫۵ (۲)

-۲ (۱)

خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱۰۵- مجموع جوابهای معادله $|2x-1| + |x+2| = 3$ ، کدام است؟

 $\frac{4}{3}$ (۴)

۱ (۳)

 $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۱)

خارج از کشور- ۱۳۹۵

۱۰۶- مجموعه جواب نامعادله $|x^2+1| > |x-2| + 2x+1$ ، به صورت کدام بازه ها است؟

(۱, ۲) (۴)

(-۱, ۲) (۳)

(-۱, ۱) (۲)

(-۲, ۱) (۱)

خارج از کشور- ۱۳۹۲

۱۰۷- مجموعه جواب نامعادله $|x-2| < x^2-2x$ ، به صورت کدام بازه است؟

(۱, ۲) (۴)

(۰, ۲) (۳)

(-۱, ۲) (۲)

(-۱, ۱) (۱)



خارج از کشور- ۱۳۸۴

۱۰۸- مجموعه جواب نامعادله $x + |x| \leq \frac{1}{2}x + 3$ به کدام صورت است؟

- ① $[-4, 2]$ ② $[-6, 8]$ ③ $[-6, 2]$ ④ $[-2, 6]$

۱۰۹- نمودارهای دو تابع $y = |x - 2| + |x + 1|$ و $y = x + 7$ در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB ، کدام است؟

خارج از کشور- ۱۳۹۹

- ① $8\sqrt{2}$ ② ۱۲ ③ ۱۳ ④ $10\sqrt{2}$

سراسری- ۱۳۹۲

۱۱۰- مجموعه جواب نامعادله $|x| < 2x - 5$ ، به کدام صورت است؟

- ① $(1, 5)$ ② $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$ ③ $(1, 5) \cup (1 + \sqrt{6}, +\infty)$ ④ $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$

براکت (جزء صحیح)

سراسری- ۱۳۸۹

۱۱۱- تابع $f(x) = \frac{1}{[\cos \pi x]}$ ، در کدام بازه قابل تعریف است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

- ① $[0, 1]$ ② $(0, 1)$ ③ $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ④ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

۱۱۲- برای هر عدد طبیعی $n > 2$ ، حاصل $\left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right] - 2 \left[\sqrt{n^2 - 2n} \right]$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

سراسری- ۱۳۹۱

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

خارج از کشور- ۱۳۸۹

۱۱۳- در تابع با ضابطه $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ ، مقدار $f\left(-\frac{1}{2}f(x)\right)$ کدام است؟

- ① -۱ ② ۱ ③ صفر ④ تعریف نشده

سراسری- ۱۴۰۱

۱۱۴- اگر $\frac{4 - 2x}{3x + 1} \geq 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟

- ① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

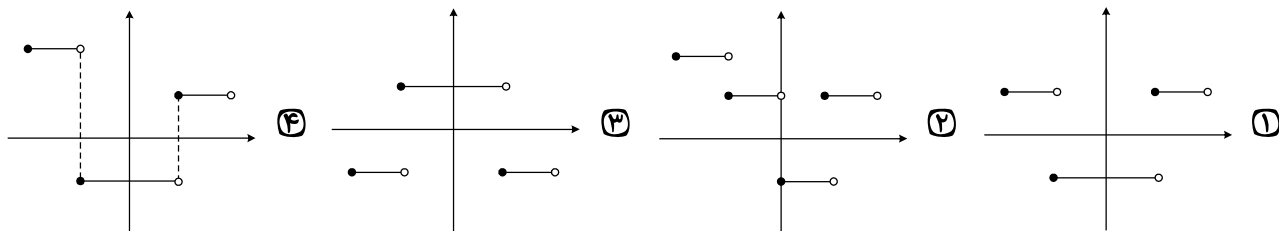
۱۱۵- نمودار تابع $y = x - [x]$ ؛ $x \in [-2, 3]$ از n پاره خط مساوی به اندازه l تشکیل شده است. دو تایی مرتب (n, l) کدام است؟

سراسری- ۱۳۸۳

- ① $(4, 1)$ ② $(4, \sqrt{2})$ ③ $(5, 1)$ ④ $(5, \sqrt{2})$



سراسری- ۱۴۰۰

۱۱۶- نمودار تابع $y = 2|3x| - 1$ به ازای $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ کدام است؟

سراسری- ۱۳۸۸

۱۱۷- اگر جزء صحیح $(x^2 + x)$ برابر ۱- باشد، آنگاه $[x^{20}]$ کدام است؟

- ① -۱ ② ۰ ③ ۱ ④ ۲

خارج از کشور- ۱۳۸۸

۱۱۸- اگر $x^2 + x < 0$ باشد، حاصل $[x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$ کدام است؟

- ① -۲ ② -۱ ③ ۰ ④ ۱

آشنایی با هندسه‌ی تحلیلی

سراسری- ۱۳۹۲

۱۱۹- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

- ① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{25}{8}$ ④ $\frac{25}{4}$

۱۲۰- سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$, $AC: y - 2x = 5$, $BC: 2y + 3x = 6$ هستند. معادله ارتفاع AH از مثلث

خارج از کشور- ۱۳۸۹

مفروض، کدام است؟

- ① $6y - 4x = 15$ ② $9y - 6x = 17$ ③ $3y - 2x = 7$ ④ $3y + 2x = 9$

۱۲۱- معادله سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$, $y = 2x$ و $x = 1$ است. معادله خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام

سراسری- ۱۳۸۴

است؟

- ① $y = \frac{2}{3}$ ② $x = \frac{2}{3}$ ③ $y + x = \frac{2}{3}$ ④ $y + x = \frac{1}{3}$

۱۲۲- به ازای کدام مقدار a ، سه خط به معادلات $y + 2x = 0$, $2y + ax + 5 = 0$, $y + 3x = a$ همگی از یک نقطه می‌گذرند؟

سراسری- ۱۳۸۸

- ① -۱ ② ۱ ③ ۲ ④ نشدنی

۱۲۳- نقطه $A(7, 6)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می‌باشند.

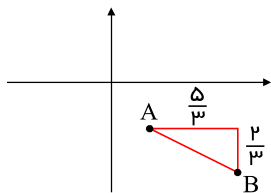
سراسری- ۱۳۹۰

مختصات وسط قطر آن کدام است؟

- ① $(4, 3)$ ② $(3, 4)$ ③ $(3, 5)$ ④ $(1, 5)$



سراسری- ۱۳۷۳

۱۲۴- در شکل زیر شیب خطی که از دو نقطه A, B می‌گذرد کدام است؟

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5} \quad (2) \\ & -\frac{5}{2} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2} \quad (1) \\ & -\frac{2}{5} \quad (3) \end{aligned}$$

خارج از کشور- ۱۳۹۲

۱۲۵- مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ کدام است؟

$$7.5 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$6.5 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

۱۲۶- مساحت متوازی‌الاضلاع محدود به خطوطی به معادلات $y = x + 3$ و $x = 4$ و محور y ها و نیمساز ناحیه اول برابر کدام است؟

سراسری- ۱۳۷۷

$$15 \quad (4)$$

$$14 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

خارج از کشور- ۱۳۸۸

۱۲۷- فاصله بین دو خط به معادلات $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟

$$2 + \sqrt{3} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} + 1 \quad (3)$$

$$\sqrt{3} - 1 \quad (2)$$

$$2 - \sqrt{3} \quad (1)$$

خارج از کشور- ۱۳۸۵

۱۲۸- به ازای کدام مقادیر a ، نقاط $(a, 3)$ و $(6, 4a + 1)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

$$2, -\frac{9}{4} \quad (4)$$

$$-2, -\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$-2, \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$-2, \frac{9}{4} \quad (1)$$

تابع نمایی و لگاریتمی

سراسری- ۱۳۹۳

۱۲۹- اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - 1$ از دو نقطه $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $B(1, 11)$ بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (1)$$

خارج از کشور- ۱۳۹۳

۱۳۰- فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ از نقطه $A(0, 4)$ کدام است؟

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

خارج از کشور- ۱۳۸۴

۱۳۱- اگر $2^{-x} < 0.000001$ و $\log 2 = 0.301$ ، کوچکترین عدد x با دو رقم اعشاری کدام است؟

$$19.97 \quad (4)$$

$$19.94 \quad (3)$$

$$19.91 \quad (2)$$

$$19.89 \quad (1)$$

خارج از کشور- ۱۳۹۰

۱۳۲- اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log \sqrt[3]{16}$ کدام است؟

$$1 - k \quad (4)$$

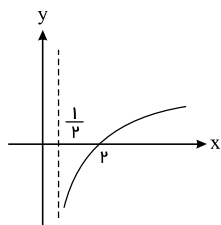
$$1 - 2k \quad (3)$$

$$2 - 5k \quad (2)$$

$$1 - 4k \quad (1)$$



خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱۳۳ - شکل زیر، نمودار تابع $y = -1 + \log_b^{(2x+a)}$ است. این منحنی خط $y = 1$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

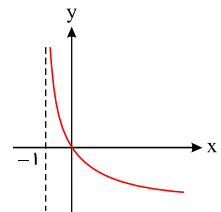
۵ (۲)

۴ (۱)

۷ (۴)

۶ (۳)

سراسری - ۱۳۹۸

۱۳۴ - شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = \log_p^{U(x)}$ است. $U(x)$ کدام است؟ $(x+1)^{-1}$ (۲) $x+1$ (۱) $1-x$ (۴) $x-1$ (۳)

سراسری - ۱۳۹۵

۱۳۵ - از معادله لگاریتمی $\log_3^{(2x^2+1)} - \log_3^{(x+2)} = 1$ ، مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایه ۸، کدام است؟ $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۱)

سراسری - ۱۳۸۹

۱۳۶ - از دو معادله $\log_3 x + \log_3 y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$ ، لگاریتم $(x+y)$ در پایه ۴ کدام است؟ $2,5$ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱,۵ (۱)

خارج از کشور - ۱۳۹۶

۱۳۷ - از دو معادله دوجمله‌ای $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log(x+2y) = 1 + \log y$ ، مقدار x کدام است؟ $1,6$ (۴) $1,5$ (۳) $1,4$ (۲) $1,2$ (۱)

خارج از کشور - ۱۳۸۹

۱۳۸ - از دو معادله $\log_p^x = 1 + \log_p^{y+1}$ ، $x^2 - y^2 = 32$ ، مقدار لگاریتم $(x+y)$ در پایه ۴، کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱ می‌دانیم: برای اینکه ۳ واحد به سمت x های مثبت منتقل شود باید به‌جای x عبارت $x - 3$ و برای اینکه به طرف y های منفی منتقل شود باید به کل تابع عدد ۲ - اضافه شود؛ بنابراین داریم:

$$y = -(x - 3)^2 + 2(x - 3) + 5 - 2 = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 6 + 3 \Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12$$

و برای اینکه این تابع بالای نیمساز ربع اول قرار گیرد باید:

$$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow (x - 3) \cdot (x - 4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

۲ - گزینه ۳

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{دو واحد به طرف } x\text{-های}} h(x) = \sqrt{-(x - 2)} = \sqrt{-x + 2}$$

$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{-x + 2} \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \sqrt{-x + 2} = x \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x + 2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$$

غشوق (در معادله صدق نمی‌کند) $x = -2$ $x = 1$ $y = x$ $y = 1$ $y = -2$

۳ - گزینه ۲ اگر نمودار تابع $y = \left|\frac{1}{2}x\right| - 2$ را $y = 4$ واحد به سمت چپ منتقل کنیم معادله به صورت $y = \left|\frac{1}{2}(x + 4)\right| - 2$ درمی‌آید و اگر یک واحد به بالا منتقل کنیم به صورت $y = \left|\frac{1}{2}(x + 4)\right| - 2 + 1$ درمی‌آید.

$$\begin{cases} y_{\text{قدیم}} = \left|\frac{1}{2}x\right| - 2 \\ y_{\text{جدید}} = \left|\frac{1}{2}x + 2\right| - 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \left|\frac{1}{2}x\right| - 2 = \left|\frac{1}{2}x + 2\right| - 1$$

$\times 2 \rightarrow |x| - 4 = |x + 4| - 2 \Rightarrow |x| - |x + 4| = 2 \xrightarrow{\text{مشاهده گزینه‌ها}} x = -3$

۴ - گزینه ۴ روش اول:

ابتدا دامنه تعریف دو تابع g , f را به دست می‌آوریم:

$$D_f: 3 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$$

$$D_g: x^2 + 2x = x(x + 2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$\begin{aligned} D_{fog} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid \log_p^{x^2+2x} \leq 3\} \\ &= \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid x^2 + 2x \leq 2^3\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid x^2 + 2x - 8 \leq 0\} \\ &= \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid (x + 4)(x - 2) \leq 0\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid -4 \leq x \leq 2\} \\ &= -4 \leq x < -2 \text{ یا } 0 < x \leq 2 \Rightarrow D_{fog} = [-4, -2) \cup (0, 2] \end{aligned}$$

البته می‌توانیم $fog(x)$ را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به دست آورید.

روش دوم:

$x = -1$ در دامنه تعریف g قرار ندارد. بنابراین در دامنه تعریف fog هم نباید باشد، یعنی هر گزینه‌ای که $x = -1$ دارد نادرست است. پس فقط گزینه چهارم درست است.

۵ - گزینه ۴

$$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2 - x) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

حال برای پیدا کردن دامنه $f(3 - x)$ کافی است $3 - x$ را بین صفر و ۲ قرار دهیم.

$$0 \leq 3 - x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow 3 \geq x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, 3]$$

البته می‌توانید ابتدا ضابطه $f(3 - x)$ را به دست آورید و سپس زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهید.

۶ - گزینه ۴ روش اول:

$$2x - 3 = t \Rightarrow 2x = t + 3 \Rightarrow x = \frac{t + 3}{2}$$

$$= t^2 + 9 + 6t - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t + 3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t + 3}{2}\right) + 13 = (t + 3)^2 - 7(t + 3) + 13$$

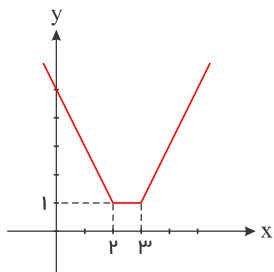
روش دوم: یک عدد دلخواه مانند $x = 2$ را انتخاب می‌کنیم.

$$f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13 \xrightarrow{x=2} f(1) = 16 - 28 + 13 \Rightarrow f(1) = 1$$



تنها گزینه چهارم است که اگر به جای x آن عدد یک قرار دهیم حاصل برابر یک می‌شود.

۷ - گزینه ۱ تابع f یک تابع گلدانی است که در $x < 2$ اکیداً نزولی است و ضابطه آن در این بازه $f(x) = -2x + 5$ است.



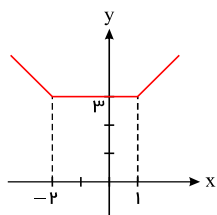
$$\begin{cases} f(x) = -2x + 5 \\ g(x) = 2x^2 - x - 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x^2 - x - 1 = -2x + 5 \Rightarrow 2x^2 + x - 6 = (2x - 3)(x + 2) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 12 = 13$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{4} = \frac{5}{2} \quad (x < 2 \text{ با توجه به}) \\ x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4} = -3 \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

تنها نقطه مشترک f و g در بازه $(-\infty, 2)$ نقطه $(-3, 11)$ است.

۸ - گزینه ۱ تابع داده شده یک تابع گلدانی است که در $x = -2$ و $x = 1$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.

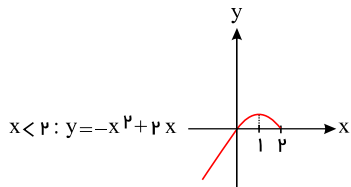
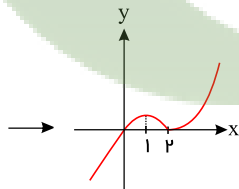
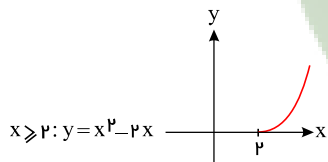


اکیداً نزولی: $x < -2$

۹ - گزینه ۳ ابتدا ضابطه f را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}$$

و نمودار آن نیز مطابق شکل زیر است:



پس تابع در $(1, 2)$ نزولی است. حال ضابطه معکوس را پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = -x^2 + 2x - (x-1)^2 + 1 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-y}$$

برد f^{-1} باید بازه $(1, 2)$ باشد، پس علامت + را قبول می‌کنیم:

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}$$

روش دوم:

متوجه شدیم که تابع $y = -x^2 + 2x$ ($1 < x < 2$) است. یک عدد دلخواه مثلاً $x = \frac{3}{2}$ در تابع قرار می‌دهیم.

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4} : \frac{3}{4} \in f \Rightarrow \frac{3}{4} \in f^{-1} \rightarrow \text{فقط در گزینه سوم صدق می‌کند.}$$



۱۰ - گزینه ۱ دو تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ متقارن هستند و می‌دانیم برای پیدا کردن ضابطه‌ای معکوس یک تابع، ابتدا رابطه را بر حسب x به دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$3y - 2x = 4 \rightarrow 2x = 3y - 4 \rightarrow x = \frac{3}{2}y - 2 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x - 2 \xrightarrow{x=0} = -2$$

۱۱ - گزینه ۴ مساحت هر چهار ضلعی از نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بینشان به دست می‌آید.

$$S = \frac{1}{2}(12)(8\sqrt{3})(\sin 60^\circ) = (48\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 24 \times 3 = 72$$

۱۲ - گزینه ۱ ابتدا تمام زوایا را بر حسب 15° می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \cos 285^\circ &= \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 525^\circ &= \sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ \\ \text{بنابراین داریم: } \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} &= \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} \end{aligned}$$

صورت و مخرج را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم. در نتیجه:

$$\frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

۱۳ - گزینه ۳ هرکدام از نسبت‌های مثلثاتی داده شده را حساب می‌کنیم.

$$\sin \frac{17\pi}{3} = \sin(6\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\frac{17\pi}{6}) = \cos \frac{17\pi}{6} = \cos(3\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{19\pi}{4} = \tan(5\pi - \frac{\pi}{4}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin(-\frac{11\pi}{6}) = -\sin \frac{11\pi}{6} = -\sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin(-\frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\frac{17\pi}{3}) \cos(-\frac{17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4}) \sin(-\frac{11\pi}{6}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-1)(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

بنابراین خواسته سوال به صورت زیر است:

۱۴ - گزینه ۱

$$\begin{aligned} 1 + \cos u &= 2\cos^2 \frac{u}{2} \\ \sin u &= 2\sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \end{aligned}$$

می‌دانیم:

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}) = -\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

۱۵ - گزینه ۳ می‌دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع، برابر $|a| + c$ است.

$$Max = \sqrt{3} \rightarrow |b| + a = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{چون شکل فرمت خود سینوس است، } b > 0} b + a = \sqrt{3}$$

نقطه $(\pi, -\frac{3}{2})$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$\left| \begin{aligned} \pi &\rightarrow -\frac{3}{2} = a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) \rightarrow -\frac{3}{2} = a - b \sin \frac{\pi}{3} \rightarrow -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b \rightarrow -3 = 2a - \sqrt{3}b \end{aligned} \right|$$

$$\begin{cases} b + a = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{cases} \rightarrow -2b - \sqrt{3}b = -2\sqrt{3} - 3 \rightarrow 2b + \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{3})b = 2\sqrt{3} + 3 \rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = \sqrt{3}$$



۱۶ - گزینه ۳ دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ می‌باشد.

$$y = a \sin(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

با توجه به شکل داده شده a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت می‌باشند پس $b = \frac{1}{3}$ قابل قبول است. بیشترین مقدار این تابع از روی شکل ۲ می‌باشد و بیشترین مقدار $y = a \sin(b\pi x)$ زمانی رخ می‌دهد که سینوس برابر ۱ باشد

$$a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

۱۷ - گزینه ۴

از رابطه $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

۱۸ - گزینه ۳ برای آنکه تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ روی بازه $[-1, 1]$ بیشترین مقدار را داشته باشد، باید حاصل $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ کمترین مقدار (-1) را به خود بگیرد. پس داریم:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right) = -1 \rightarrow \frac{\pi}{4} - 3\pi x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{-2k}{3} - \frac{1}{4}$$

حال برای تعیین تعداد جواب‌های این معادله در بازه $[-1, 1]$ کافی است به k اعداد صحیح را نسبت دهیم:

k	-۲	-۱	۰	۱	۲
x	$\frac{13}{12}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{12}$	$-\frac{19}{12}$
	غ ق ق	✓	✓	✓	غ ق ق

بنابراین معادله‌ی فوق در بازه $[-1, 1]$ ، دارای ۳ جواب است.

۱۹ - گزینه ۳ می‌دانیم: $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0 \rightarrow 2\cos 2x = -1 \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۲۰ - گزینه ۴

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad \text{می‌دانیم}$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

توجه کنید که $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۲۱ - گزینه ۳

روش اول: مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2} + \sqrt{3-x}} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+3)(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3-x})}{(4 - 2 - \sqrt{3-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(1)(4)(2 + \sqrt{3-x})}{(2 - \sqrt{3-x})(2 + \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(1)(4)(4)}{(4 - 3 + x)} = 16 \end{aligned}$$

روش دوم: با استفاده از هسپیتال:



$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x + 5}{\frac{-1}{2\sqrt{3-x}} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = 16$$

۲۲ - گزینه ۲ روش اول: با ضرب کسر در مزدوج صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} \times \frac{x + \sqrt{3x-2}}{x + \sqrt{3x-2}} = \frac{x^2 - 3x + 2}{(ax+b)(x + \sqrt{3x-2})} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{a(x + \frac{b}{a})(x + \sqrt{3x-2})} = \frac{1}{2}$$

با توجه به موجود بودن حد و اینکه عددی مخالف صفر است، نتیجه می‌گیریم که عدد ۲ ریشهٔ مخرج نیز می‌باشد.

$$x - 2 = x + \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)}{a(x + \sqrt{3x-2})} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{a(4)} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{0}{2a+b} \quad \begin{array}{l} \text{چون جواب حد، برابر عدد شده است پس این کسر حتما} \\ \text{صفر باشد پس از رفع ابهام جوابش} \end{array} \xrightarrow{0/0} 2a+b=0 \rightarrow b=-2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1(3)}{2\sqrt{3x-2}}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2} \xrightarrow{2a+b=0} 1+b=0 \rightarrow b=-1$$

۲۳ - گزینه ۳ روش اول:

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم $((a+b)(a^2+b^2-ab) = a^3+b^3)$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^3 + 10x + 16}{6(2 + \sqrt{x})} \times \frac{4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}}{4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+8)(x+2)(4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})}{6(8+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})}{6} = \frac{-6(12)}{6} = -12$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هوییتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^3 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[3]{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{3x + 10}{6(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})} = \frac{-6}{6(\frac{1}{12})} = -12$$

۲۴ - گزینه ۴ روش اول:

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم $((a-b)(a^2+b^2+ab) = a^3-b^3)$ و مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x-2$ تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt[3]{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} \times \frac{4 + \sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2}}{4 + \sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overbrace{8 - (3x+2)}^{-3x+6}}{(x-2)(5x-8)(4 + \sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{(x-2)(5x-8)(4 + \sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(5x-8)(4 + \sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2})}$$

$$= \frac{-3}{(2)(4+4+4)} = \frac{-3}{24} = \frac{-1}{8}$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هوییتال کمک می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt[3]{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{-3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}}{10x - 18} = \frac{\frac{-1}{4}}{2} = \frac{-1}{8}$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

۲۶ - گزینه ۴ گزینه چهارم صحیح است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + \underbrace{|x|}_{+}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

توجه کنید تابع در همسایگی چپ صفر، تعریف نمی‌شود زیرا مخرج به صورت $x - x$ یعنی صفر مطلق می‌شود.

۲۷ - گزینه ۲

هرگاه x به سمت عددی میل کند که به موجب آن جواب حد یک نوع بی‌نهایت شود (مثلاً فقط $-\infty$) آن عدد ریشه مضاعف مخرج است. یعنی $x = 2$ ریشه مضاعف مخرج است. بنابراین:

$$x^2 + ax + b = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow a = -4, b = 4$$

در نتیجه داریم:

$$a + b = -4 + 4 = 0.$$

۲۸ - گزینه ۱ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه اول: $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(\frac{-1}{2})^-} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-} = -\infty$ درست

گزینه سوم: $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(\frac{-1}{2})^+} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = +\infty$ نادرست

گزینه چهارم: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})^+} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})^-} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-} = +\infty \end{array} \right. \rightarrow \text{نادرست}$

توجه کنید:

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(\frac{2\pi}{3})^+ = (-\frac{1}{2})^- \\ \cos(\frac{2\pi}{3})^- = (-\frac{1}{2})^+ \end{array} \right.$$

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(\frac{4\pi}{3})^+ = (-\frac{1}{2})^+ \\ \cos(\frac{4\pi}{3})^- = (-\frac{1}{2})^- \end{array} \right.$$

۲۹ - گزینه ۱

می‌دانیم در ∞ ، عبارت $\sqrt{4x^2 + 15}$ هم‌ارز با $\sqrt{4x^2}$ است که برابر با $|2x|$ خواهد شد:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} \stackrel{\text{برنارد}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{3x - \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{3x - 2|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{5x}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n = 1$. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{5x} = \frac{a}{5} = -1 \rightarrow a = -5$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} &\times \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}}{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-5x + 15)(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{\underbrace{9x^2 - 4x^2 - 15x}_{5x^2 - 15x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5(x-3)(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{5x(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{x} = \frac{-(9+9)}{3} = -6 \end{aligned}$$

البته حد را می‌توان از قاعده هسپیتال نیز محاسبه کرد.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{1(8x+15)}{2\sqrt{4x^2+15x}}} = \frac{-5}{3 - \frac{39}{18}} = \frac{-5}{\frac{15}{18}} = -6$$

۳- گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + x}}{x} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

۳-۱ شرط اینکه تابع f در a پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در a موجود و متناهی و باهم برابر باشند.
راه حل اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times (1 + \sqrt{1-x})}{1 - (1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \times (1 + \sqrt{1-x})}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sqrt{1-x} = 2$$

به علاوه $f(0) = a$ در نتیجه $a = 2$.

راه حل دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1(-1)}{2\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$f(0) = a$$

پس $a = 2$ است.

۳-۲ گزینه ۱ کافی است حد چپ تابع در $x = -2$ و مقدار تابع در $x = -2$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1 + x^2}{\underbrace{|x+2|}_{-}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{-(x+2)} = -12$$

درضمن $f(-2) = a$ است پس $a = -12$ است.

۳-۳ گزینه ۱ می‌دانیم اگر $x = k$ یکی از ریشه‌های تابع $f(x)$ باشد آن‌گاه $f(x)$ بر $k - x$ بخش‌پذیر است.
کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x = 2$ اعمال کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x^2 + 4}{x-2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2-x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2-x-2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x+b) = 4+b \\ f(2) &= 4+b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 4+b \Rightarrow b = -4$$

۳-۴ گزینه ۲ شرط پیوستگی تابع f در a آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در a موجود و متناهی و باهم برابر باشند.



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (a \log_v^{1+x}) = a \log_v^3 = a \log_v^3 = 3a \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax + 3^{x-3}) = 3a + 1 \\ f(3) &= a \log_v^3 = a \log_v^3 = 3a \end{aligned} \right\} \rightarrow 3a + 1 = 3a \rightarrow a = -1$$

پس $f(2) = \frac{y}{x} = \frac{2a + 2^{-1}}{2} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} = -1,5$

۳۵- گزینه ۱ باید حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{4}$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} a \cos 3x = a \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = a \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

پس $-\frac{\sqrt{2}}{2}a = 2 \Rightarrow -a\sqrt{2} = 4 \Rightarrow a = -\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -2\sqrt{2}$

۳۶- گزینه ۴ روش اول: تابع به فرم $y = [f(x)]$ در نقاطی که داخل جزء صحیح مقداری صحیح شود و به شرط آنکه این نقطه طول Min نسبی تابع f نباشد ناپیوسته است.

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \rightarrow 0 \leq \pi x \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \leq \sin^2 \pi x \leq 1 \rightarrow 0 \leq 4 \sin^2 \pi x \leq 4$$

$$4 \sin^2 \pi x = 0 \rightarrow \sin \pi x = 0 \rightarrow \pi x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$4 \sin^2 \pi x = 1 \rightarrow \sin^2 \pi x = \frac{1}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{6} \rightarrow \pi x = \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$4 \sin^2 \pi x = 2 \rightarrow \sin^2 \pi x = \frac{1}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{4} \rightarrow \pi x = \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$4 \sin^2 \pi x = 3 \rightarrow \sin^2 \pi x = \frac{3}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{3} \rightarrow \pi x = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$4 \sin^2 \pi x = 4 \rightarrow \sin^2 \pi x = 1 = \sin^2 \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ابتدای بازه بسته پیوستگی راست و انتهای بازه بسته پیوستگی چپ اگر برقرار باشد نقطه، نقطه ناپیوستگی نمی‌باشد. تابع در $x = 0$ پیوستگی راست دارد پس $x = 0$ نقطه

ناپیوستگی نمی‌باشد و تابع در $x = \frac{1}{2}$ پیوستگی چپ ندارد پس نقطه ناپیوستگی محسوب می‌شود بنابراین مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع به صورت $\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ است.

۳۷- گزینه ۴ کافی است شرط پیوستگی را در $x = \frac{\pi}{2}$ بررسی کنید (تساوی حد راست و چپ و مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{2}$)

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} b \cos 2x = b \cos \pi = -b \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (a + \sin 3x) = a + \sin \frac{3\pi}{2} = a - 1 \\ f(\frac{\pi}{2}) &= 2 \end{aligned} \right.$$

پس: $-b = 2 \rightarrow b = -2$, $a - 1 = 2 \rightarrow a = 3 \rightarrow a - b = 5$

۳۸- گزینه ۲ چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از یک پیوسته است پس حتماً در $x = 6$ نیز باید پیوسته باشد. یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 6$ باید با هم برابر باشند.

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} (a + \cos^2 \frac{\pi x}{36}) = a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = a + \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ f(6) &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۳۹- گزینه ۱ چون هر دو ضابطه پیوسته هستند، برای آنکه تابع دو ضابطه‌ای f روی R (مجموعه اعداد حقیقی) پیوسته باشد، کافی است شرایط پیوستگی تابع را تنها در نقطه



مرزی آن، یعنی $x = 2$ برقرار نماییم.

$$\begin{cases} \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax - 5) = 4 + 2a - 5 = 2a - 1 \\ \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1 \end{cases}$$

چون به ازای هر مقدار a ، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 2$ با هم برابر هستند، پس نتیجه می‌گیریم که به ازای هر مقدار حقیقی a ، تابع f روی مجموعه‌ای اعداد حقیقی پیوسته است.

$$\text{۴۰ - گزینه ۱ می‌دانیم که } k > 0 \begin{cases} f(x) \geq k \\ \text{یا} \\ f(x) \leq -k \end{cases} \xrightarrow{k > 0} |f(x)| \geq k \text{ است.}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & -1 < x-1 < 1 \\ x^2 + ax + b & x-1 \geq 1 \text{ یا } x-1 \leq -1 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases}$$

چون تابع همواره پیوسته است، پس حتماً در $x = 2$ و $x = 0$ نیز پیوسته است.

$$\begin{aligned} x = 0 & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)[x] = -1[0^+] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + b) = b \rightarrow b = 0 \\ f(0) = b \end{cases} \\ x = 2 & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)[x] = 1[2^-] = 1 \rightarrow 4 + 2a = 1 \rightarrow a = -\frac{3}{2} \\ f(2) = 4 + 2a \end{cases} \end{aligned}$$

۴۱ - گزینه ۱

مشخص است که $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ می‌باشد. بنابراین، کافی است از تابع مشتق گرفته و به جای آن عدد ۲ را قرار دهیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3 \rightarrow f'(x) = 3 \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^2 \left(\frac{\frac{1(2x-3) - 2(x+2)}{(2x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right) \left(\frac{-7}{(2x-3)^2} \right) \rightarrow f'(2) = \frac{3}{2} (2) (-7) = -21 \end{aligned}$$

۴۲ - گزینه ۲ خط $y = 7$ بر سهمی f مماس است، این یعنی عرض رأس سهمی برابر ۷ است.

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 + 12}{-4} = \frac{b^2 + 12}{4} = 7 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

نقطه تماس به ازای $b = 4$ و $b = -4$ به ترتیب $(2, 7)$ و $(-2, 7)$ است که فاصله این دو نقطه برابر $4 - (-2) = 2$ است.

۴۳ - گزینه ۳ ابتدا شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل می‌کند را به دست می‌آوریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right|_{-5}^0 \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-5 - 3}{0 - 8} = \frac{-8}{-8} = 1 \xrightarrow{\text{موازی}} m_{\text{مماس}} = 1$$

کافی است از تابع، مشتق گرفته و برابر یک قرار دهیم.

$$y' = \frac{4(x+1) - 1(4x-5)}{(x+1)^2} = \frac{9}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{تابع}} y = 1 \Rightarrow C \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right. \\ x+1 = -3 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

اکنون باید معادله خط مماس را در نقطه C و با شیب یک بنویسیم.

$$y - y_C = m(x - x_C) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1$$

عرض از مبدأ این خط برابر -1 است.

۴۴ - گزینه ۴

$$x - 3y = 2 \rightarrow m_{\text{خط}} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{مماس}} = -3$$

شیب خط مماس همان مشتق است، بنابراین کافی است که از تابع، مشتق گرفته و مساوی -3 قرار دهیم.

$$y' = 3x^2 + 6x = -3 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \xrightarrow{\text{تابع}} y = -1 + 3 + 1 = 3$$

حال معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$A \left| \begin{array}{l} -1 \\ 3 \end{array} \right., m = -3 \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) : y - 3 = -3(x + 1) \Rightarrow y = -3x$$



فقط مختصات نقطه گزینه‌ی چهارم در معادله این خط صدق می‌کند.

۴۵ - گزینه ۱ برای تعیین عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ در نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ ، ابتدا باید معادله خط مماس در این نقطه را بنویسیم.

$$y' = \frac{-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}}{(\sqrt[3]{4x})^2} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{-\frac{1}{3}}{4} = -\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = -\frac{1}{12}(x - \frac{1}{2}) \xrightarrow{x=0} y - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

۴۶ - گزینه ۴ ابتدا شیب خط مماس بر منحنی را در نقطه به طول α محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow m = f'(\alpha) = \frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

با توجه به اینکه این خط از نقطه $(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1})$ می‌گذرد، معادله خط موردنظر به صورت زیر می‌شود:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(x - \alpha)$$

نقطه $(-1, 0)$ روی خط فوق است؛ بنابراین با قرار دادن مختصات نقطه $(-1, 0)$ به جای x و y در معادله این خط داریم:

$$0 - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(-1 - \alpha) \Rightarrow 2\alpha - 1 = 3 \Rightarrow \alpha = 2$$

۴۷ - گزینه ۴

منحنی داده شده و خط $y = x$ (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم) را تلاقی می‌دهیم.

$$\begin{cases} ay = x^2 + 5x + 4 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \text{معادله‌ی تلاقی: } x^2 + (5-a)x + 4 = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (5-a)^2 - 16 = 0 \Rightarrow a - 5 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$a = 9 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \checkmark$$

$$a = 1 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \times$$

دقت کنید در ناحیه‌ی اول، x مثبت است.

۴۸ - گزینه ۲ در ابتدا قدرمطلق‌های توابع f و g را از بین می‌بریم.

$$f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x| = \begin{cases} \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}x & ; x \geq 0 \\ \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = 4x + |x| = \begin{cases} 4x + x & ; x \geq 0 \\ 4x - x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 5x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0 : fog(x) = f(g(x)) = \frac{3}{5}(5x) = 3x$$

$$x < 0 : fog(x) = f(g(x)) = 3x$$

یعنی $fog(x) = 3x$ است، پس مشتق آن برابر ۳ می‌باشد.

۴۹ - گزینه ۳ شرط اینکه تابع f در a مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در a پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در a با هم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lambda}{ax+b} = \frac{\lambda}{2a+b} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 6x) = -\lambda + 12 = 4 \\ f(2) = -\lambda + 12 = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda}{2a+b} = 4 \Rightarrow 2a+b=2$$

$$f'(2^+) = f'(2^-) : \frac{-\lambda a}{(ax+b)^2} = -3x^2 + 6 \xrightarrow{x=2} \frac{-\lambda a}{(2a+b)^2} = -12 + 6$$

$$\xrightarrow{2a+b=2} \frac{-\lambda a}{4} = -6 \Rightarrow -\lambda a = -24 \Rightarrow a=3, b=-4$$

۵۰ - گزینه ۴ چون $f'(1)$ موجود است، لذا f در $x=1$ پیوسته است و مشتق چپ و راست f در $x=1$ با هم برابرند، پس داریم:



$$\text{شرط پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{(2x+6)^2} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b \\ f(1) = a+b \end{cases} \Rightarrow a+b=4 \quad (*)$$

$$\left. \begin{aligned} x > 1 : f(x) = \sqrt[3]{(2x+6)^2} &\Rightarrow f'(x) = \frac{2(2)}{3\sqrt[3]{2x+6}} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{4}{3(2)} = \frac{2}{3} \\ x < 1 : f(x) = ax+b &\Rightarrow f'(x) = a \Rightarrow f'_-(1) = a \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{10}{3}$$

۵۱- گزینه ۴

برای پیدا کردن طول نقاط بحرانی تابع، از تابع مشتق می‌گیریم، نقاطی که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد، طول نقاط بحرانی تابع هستند.

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$y = x^2(x-2)^2 \Rightarrow y' = 2x(x-2)^2 + 2(x-2) \cdot x^2 = \underbrace{2x(x-2)(x-2+x)}_{\text{فاکتور}} = 0 \Rightarrow 2x(x-2)(2x-2) = 0 \Rightarrow x=0, x=2, x=1$$

$$\begin{aligned} x=0 &\xrightarrow{\text{تابع}} y=0 \rightarrow A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \\ x=2 &\xrightarrow{\text{تابع}} y=0 \rightarrow B \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{4+0} = 2, AC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, BC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ x=1 &\xrightarrow{\text{تابع}} y=1 \rightarrow C \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

مثلث متساوی‌الساقین است و چون $2^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$ ، پس مثلث قائم‌الزاویه نیز هست.

۵۲- گزینه ۳

نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه تعریف هستند که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد.

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}(2x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}) = \frac{2}{3}(2\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) = \frac{2}{3}(\frac{2\sqrt[3]{x^4} - 1}{\sqrt[3]{x}}) \\ \text{مخرج} = 0 \Rightarrow 2\sqrt[3]{x^4} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt[3]{2}}{4} \in (-1, 1) \\ \text{مخرج} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \in (-1, 1) \end{aligned}$$

پس $\pm \frac{\sqrt[3]{2}}{4}$ و 0 طول نقاط بحرانی تابع هستند.

۵۳- گزینه ۲ نقاط بحرانی نقاطی از دامنه تعریف هستند که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 4} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)^2}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{ق ق} = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \text{ (در بازه قرار ندارد)} \\ \text{غ ق ق} = 0 \rightarrow (x+1)(x-2)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases} \text{ (در بازه قرار ندارد)} \end{cases}$$

کافی است مشتق را در اطراف $x=0$ (ریشه ساده مشتق) تعیین علامت کنیم.

x	-1	0	2
y'	+	0	-
y	$\nearrow$	max	$\searrow$

$x=0$ طول نقطه Max است $\rightarrow$

برای تجزیه عبارت درجه سوم $x^3 - 3x^2 + 4$ توجه کنید که چون $x=2$ عبارت را صفر می‌کند پس این عبارت بر $x-2$ بخش‌پذیر است. با تقسیم عبارت درجه سوم بر $x-2$ چندجمله‌ای تجزیه می‌شود.

۵۴- گزینه ۲ روش اول:

$$y = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5} = \frac{1}{x^2(x^2 - 4x + 4) + 5} = \frac{1}{x^2(x-2)^2 + 5}$$

کمترین مقدار عبارت $x^2(x-2)^2 + 5$ مساوی صفر است بنابراین کمترین مقدار مخرج کسر مساوی ۵ است پس ماکسیمم مطلق تابع $\frac{1}{5}$ است. (مورد کسر یک عدد مثبت است پس بیشترین مقدار کسر وقتی به دست می‌آید که مخرج کسر، کمترین مقدار را داشته باشد.)

روش دوم: از تابع مشتق می‌گیریم و نقاط بحرانی آن را به دست می‌آوریم:

$$D_f = R = (-\infty, +\infty)$$



$$y' = \frac{-(4x^2 - 12x^2 + 8x)}{(x^4 - 4x^2 + 4x^2 + 5)^2} = \frac{-4x(x^2 - 3x + 2)}{(x^4 - 4x^2 + 4x^2 + 5)^2} = \frac{-4x(x-1)(x-2)}{(x^4 - 4x^2 + 4x^2 + 5)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

حال مقادیر تابع را وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ و همچنین در طول‌های نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

$$f(0) = \frac{1}{5}, \quad \min \text{ مطلق } f(1) = \frac{1}{6}, \quad f(2) = \frac{1}{5}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{+\infty} = 0$$

توجه کنید که اگر بیشترین یا کمترین مقدار تابع به ازای $\pm\infty$ به دست می‌آیند تابع $\min$ یا $\max$ مطلق نداشت.

۵۵- گزینه ۴ فاصله نقطه $A(x, y)$ از نقطه $B(4, 0)$ برابر با $d = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ است، از طرفی نقطه A روی منحنی تابع $y = \sqrt{2x+9}$ است، بنابراین داریم:

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (2x+9)} = \sqrt{x^2 - 6x + 25}$$

در نتیجه داریم:

$$\xrightarrow{\text{مشق}} \frac{1(2x-6)}{2\sqrt{x^2-6x+25}} = 0 \rightarrow x=3$$

$$d_{\min} = \sqrt{9 - 18 + 25} = \sqrt{16} = 4$$

۵۶- گزینه ۲ اگر در این مثلث طول قاعده را a و ارتفاع وارد بر آن را h بنامیم. در این صورت $a+h=16$ است.

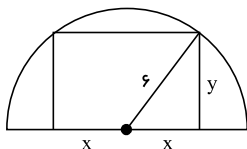
$$S = \frac{1}{2}ah \xrightarrow{h=16-a} S(a) = \frac{1}{2}a(16-a) = -\frac{1}{2}a^2 + 8a$$

تابع $S = -\frac{1}{2}a^2 + 8a$ یک تابع درجه دوم برحسب a است که چون ضریب a^2 منفی است، پس تابع ماکزیمم دارد. عرض رأس این سهمی که بیشترین مقدار آن نیز هست برابر با $-\frac{\Delta}{4a'}$ است.

$$S_{\max} = \frac{-\Delta}{4a'} = \frac{4a'c' - b'^2}{4a'} = \frac{4(-\frac{1}{2})(0) - 64}{4(-\frac{1}{2})} = \frac{-64}{-2} = 32$$

۵۷- گزینه ۴ روش اول:

مطابق شکل، معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۶ را نوشته و با اعمال شرط $y \geq 0$ معادله نیم‌دایره تبدیل می‌کنیم. طبق شکل x برابر با صفر طول مستطیل است.



$$x^2 + y^2 = 36 \rightarrow y^2 = 36 - x^2 \xrightarrow{y \geq 0} y = \sqrt{36 - x^2} \quad (1)$$

مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = 2xy \xrightarrow{(1)} S(x) = 2x \cdot \sqrt{36 - x^2} \quad \text{یک متغیره}$$

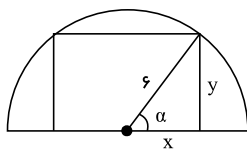
$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{36 - x^2} + \frac{1(-2x)}{2\sqrt{36 - x^2}}(2x) = 0$$

$$\rightarrow 2\sqrt{36 - x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{36 - x^2}} \rightarrow 36 - x^2 = x^2 \rightarrow 2x^2 = 36$$

$$\rightarrow x^2 = 18 \rightarrow x = 3\sqrt{2}, \quad y = 3\sqrt{2} \rightarrow S_{\max} = 2(3\sqrt{2})(3\sqrt{2}) = 36$$

روش دوم:

مطابق شکل زیر، از نسبت‌های مثلثاتی زاویه α استفاده می‌کنیم:





$$\sin \alpha = \frac{y}{\rho} \rightarrow y = \rho \sin \alpha, \cos \alpha = \frac{x}{\rho} \rightarrow x = \rho \cos \alpha$$

$$S = 2xy = 2(\rho \cos \alpha)(\rho \sin \alpha) = 2\rho^2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\rho^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) = \rho^2 \sin 2\alpha$$

این عبارت وقتی ماکزیمم است که $\sin 2\alpha = 1$ باشد، پس $S_{Max} = 36$ است.

۵۸ - گزینه ۳ برای اینکه تابع صعودی باشد مشتق باید همواره مثبت باشد و شرط آنکه یک عبارت درجه دوم، مثبت باشد آن است که $\Delta < 0$ و ضریب x^2 منفی باشد.

$$y' = 3x^2 + 2ax + 1 \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \rightarrow 3 > 0 \\ \Delta \leq 0 \rightarrow 4a^2 - 12 \leq 0 \rightarrow a^2 \leq 3 \rightarrow -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3} \rightarrow |a| \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

۵۹ - گزینه ۲ دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵ - نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ هستند. پس به ازای این دو طول، مشتق تابع برابر صفر می‌شود. داریم:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f'(3) = 0 \Rightarrow 27 + 6a + b = 0 \\ f'(-5) = 0 \Rightarrow 25 - 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -45$$

حال با معلوم شدن ضابطه f ، برای تعیین عرض مینیمم نسبی این تابع، ابتدا طول مینیمم نسبی را از روی ریشه‌های ساده f' مشخص می‌کنیم و با جایگذاری طول مینیمم نسبی در تابع، عرض آن را محاسبه می‌نماییم. اما با توجه به صورت تست، $x = 3$ ، $x = -5$ همان طول نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x - 45 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-5	3	$+\infty$
f'		$+$	$-$	$+$
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		Max	Min	

$$y_{Min} = f(3) = 27 + 27 - 135 = -81$$

۶۰ - گزینه ۱

از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 2)(x + a) - (x^2 - 2x)}{(x + a)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2ax - 2x - 2a - x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x^2 + 2ax - 2a = 0$$

معادله $f'(x) = 0$ باید دارای ریشه ساده باشد، پس Δ باید مثبت باشد.

$$\Delta > 0 \rightarrow 4a^2 + 8a > 0 \Rightarrow a^2 + 2a > 0 \Rightarrow a(a + 2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a < -2 \\ \text{یا} \\ a > 0 \end{cases}$$

۶۱ - گزینه ۱ می‌دانیم که $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ است. داریم:

$$(x - 2)(x^2 - 4x + 4) - 1 = (x - 2)(x - 2)^2 - 1 = (x - 2)^3 - 1$$

$$= ((x - 2) - 1)((x - 2)^2 + (x - 2) + 1) = (x - 3)(x^2 - 4x + 4 + x - 2 + 1) = (x - 3)(x^2 - 3x + 3)$$

۶۲ - گزینه ۴ روش اول:

هر عبارت را جداگانه ساده می‌کنیم.

$$\frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + x} = \frac{(2x + 1)^2}{x(2x + 1)} = \frac{2x + 1}{x}$$

$$x - 2 - \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{x(x - 2) - (x^2 + 1)}{x} = \frac{x^2 - 2x - x^2 - 1}{x} = \frac{-2x - 1}{x} = \frac{-(2x + 1)}{x}$$

$$\text{پس: } \frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + x} \div \left(x - 2 - \frac{x^2 + 1}{x}\right) = \frac{2x + 1}{x} \div \left(\frac{-(2x + 1)}{x}\right) = \frac{2x + 1}{x} \times \frac{x}{-(2x + 1)} = -1$$

روش دوم: کافی است یک عدد دلخواه مثلاً $x = 2$ را در عبارت قرار دهیم.

$$x = 2 \rightarrow \frac{16 + 8 + 1}{8 + 2} \div \left(2 - 2 - \frac{4 + 1}{2}\right) = \frac{25}{10} \div \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -1$$

بنابراین گزینه‌ی چهارم صحیح است.

۶۳ - گزینه ۳

$$\underbrace{x^4 - 3x^3 + 8x - 24}_{\text{فاکتور از } x^3} = x^3(x - 3) + 8(x - 3) \stackrel{\text{فاکتور از } (x-3)}{=} (x - 3)(x^3 + 8) = (x - 3)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

پس باتوجه به گزینه‌ها تنها، عامل $(x + 2)$ وجود دارد.

۶۴ - گزینه ۴

باتوجه به صورت مساله $ab + ac + bc = 3$ و $a + b + c = 11$ است.



طبق اتحاد مربع سه جمله ای داریم:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow (a + b + c)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_x + 2(ab + ac + bc)$$

$$\Rightarrow (11)^2 = x + 2(3) \Rightarrow 121 = x + 6 \Rightarrow 121 - 6 = x \Rightarrow x = 115 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 115$$

۶۵ - گزینه ۱

$$a(a + 2) + 4b(b + 1) + 4ab = a^2 + 2a + 4b^2 + 4b + 4ab$$

باتوجه به فرض مسأله که مقدار $a + 2b$ را داده است، بنابراین عبارت را باید طوری تجزیه کنیم که اتحادی حاصل شود که شامل عبارت $a + 2b$ باشد:

$$\underbrace{a^2 + 4ab + 4b^2}_{\text{اتحاد مربع کامل}} + \underbrace{2a + 4b}_{\text{فاکتور از ۲}} = (a + 2b)^2 + 2(a + 2b) \stackrel{a+2b=3}{=} (3)^2 + 2(3) = 9 + 6 = 15$$

۶۶ - گزینه ۲ ابتدا طرفین تساوی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} x = 7 - 2\sqrt{6} &\Rightarrow x^2 = (7 - 2\sqrt{6})^2 = 49 + 24 - 28\sqrt{6} = 73 - 28\sqrt{6} \\ \sqrt{\frac{x+2}{25}} + \frac{1}{x} &= \sqrt{\frac{x^2+2x+25}{25x}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{73-28\sqrt{6}+2(7-2\sqrt{6})+25}{7-2\sqrt{6}}} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{73-28\sqrt{6}+14-4\sqrt{6}+25}{7-2\sqrt{6}}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{112-32\sqrt{6}}{7-2\sqrt{6}}} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{16(7-2\sqrt{6})}{7-2\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{16}}{5} = \frac{4}{5} = 0.8 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\sqrt{\frac{x+2}{25}} + \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{9-2\sqrt{6}}{25}} + \frac{1}{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{9-2\sqrt{6}}{25}} + \frac{7+2\sqrt{6}}{25} = \left(\frac{1}{7-2\sqrt{6}} \times \frac{7+2\sqrt{6}}{7+2\sqrt{6}} = \frac{7+2\sqrt{6}}{25} \right) \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

۶۷ - گزینه ۳ حاصل هر یک از پراشته‌ها را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[3]{5 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3} + (-\sqrt{2})^2 \right)^{-\frac{2}{3}} &= \left(\sqrt[3]{5 + \frac{1}{9} + 2} \right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{64}{9}} \right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{9}} \right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{\sqrt[3]{9}} \right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} \right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} \right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{3^1}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} \\ \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \right)^3 &= \left(\sqrt[3]{\frac{9}{4}} \right)^3 = \left(\frac{3}{2} \right)^3 = \frac{27}{8} \\ \text{پس داریم: } &= \frac{3}{8} + \frac{27}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3.75 \end{aligned}$$

۶۸ - گزینه ۱ ابتدا هر یک از کسرها را ساده می‌کنیم و مخرج آن‌ها را به صورت عددی گویا می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} &= \frac{(1-\sqrt{2})^2}{1-2} = -(1-\sqrt{2})^2 = -(1+2-2\sqrt{2}) = -3+2\sqrt{2} \\ \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{12}} &= \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} \\ \Rightarrow \text{حاصل عبارت} &= -3 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -3 \end{aligned}$$

۶۹ - گزینه ۱ ابتدا حاصل تک‌تک عبارت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt[3]{-\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{3^3}{2^3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2}\right)^3} = -\frac{3}{2}$$



$$\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{1 + 2 + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}} = \sqrt{1 + 2 - 2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = \overbrace{|1 - \sqrt{2}|}^{\text{منفی}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}} = 4^{\frac{5}{4}} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل نهایی} = -\frac{3}{2} + (\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2} = -\frac{3}{2} - 1 - \frac{5}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}, \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

۷۰ - گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{24} &= \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3} \\ \sqrt[3]{9} &= \sqrt[3]{3^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{3^3} = 2 \times 3 = 6$$

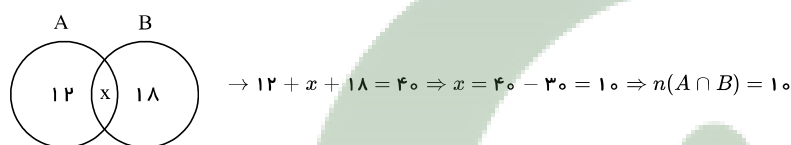
مخرج کسر را با استفاده از اتحاد مزدوج گویا می‌کنیم:

$$\frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} \times \frac{2 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} = \frac{(2 - \sqrt{5})^2}{2^2 - 5} = \frac{4 + 5 - 4\sqrt{5}}{-1} = 4\sqrt{5} - 9$$

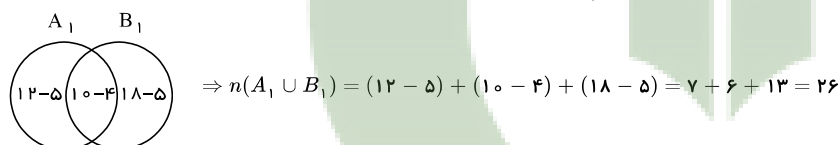
$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{4^2 \times 5} = 4\sqrt{5}$$

$$\text{پس داریم: } = 6 + 4\sqrt{5} - 9 - 4\sqrt{5} = 6 - 9 = -3$$

۷۱ - گزینه ۴ با توجه به اطلاعات مسئله، نمودار ون مقابل را داریم:



در برداشتن ۹ عضو از هر یک از مجموعه‌های A و B، چون از مجموعه $A \cap B$ ۴ عضو کم می‌شود، پس ۵ عضو دیگر از $A - B$ و $B - A$ کم می‌شود:



۷۲ - گزینه ۱

با کمی دقت متوجه می‌شویم که تعداد نقطه‌های هر شکل برابر با $[(n+0) + (n+1) + \dots + (n+n-1)]$ می‌باشد.

۱ : شکل اول ، ۲ + ۳ : شکل دوم ، ۳ + ۴ + ۵ : شکل سوم ، ۴ + ۵ + ۶ + ۷ : شکل چهارم ، ...

پس تعداد نقطه‌ها در شکل نهم می‌شود:

$$9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 = 117$$

۷۳ - گزینه ۳

چند دسته اول را نوشته و با جملات آخر هر دسته یک دنباله تشکیل داده و جمله چهارم دنباله را پیدا می‌کنیم:

دسته اول: {۱}

دسته دوم: {۳, ۵}

دسته سوم: {۷, ۹, ۱۱}

دسته چهارم: {۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹}

بنابراین دنباله جملات آخر دسته‌ها به صورت ۱, ۵, ۱۱, ۱۹, ... است که می‌توان به صورت $1, (2 \times 3) - 1, (3 \times 4) - 1, \dots$ نوشت، یعنی جمله عمومی

$$a_n = n(n+1) - 1 \text{ است، پس:}$$

$$a_{40} = 40 \times (41) - 1 = 1640 - 1 = 1639$$

۷۴ - گزینه ۳ جملات مشترک دو دنباله عددی، یک دنباله عددی است که قدر نسبت آن ک.م.م قدر نسبت‌های دو دنباله اصلی است.

۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ...

۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...

دنباله اعضای مشترک ۱۷, ۳۲, ۴۷, ...



$$a_n = 17 + (n - 1) \times 15 = 15n + 2$$

$$100 \leq a_n \leq 999 \rightarrow 100 \leq 15n + 2 \leq 999 \rightarrow \frac{98}{15} \leq n \leq \frac{997}{15}$$

$$\rightarrow 7 \leq n \leq 66 \rightarrow \text{تعداد جملات} = 66 - 7 + 1 = 60$$

۷۵ - گزینه ۲ قدرنسبت جملات مشترک دو دنباله برابر با ک.م.م قدرنسبت‌های ۲ دنباله اصلی است. با ادامه دادن دنباله‌ها، جمله اول مشترک را به دست آورده و جمله عمومی جملات مشترک را می‌نویسیم:

$$2, 9, 16, 23, 30, \boxed{37}, \dots \quad 12, 17, 22, 27, 32, \boxed{37}, \dots$$

$$\text{مشترک} \begin{cases} a_1 = 37 \\ d = [5, 7] = 35 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_n = 35n + 2$$

$$a_n < 300 \Rightarrow 35n + 2 < 300 \Rightarrow n < \frac{298}{35} \Rightarrow n \leq 8$$

اما ۲ جمله مشترک دورقمی

$$\rightarrow \text{تعداد جملات مشترک سه رقمی} = 8 - 2 = 6$$

دارد (۳۷، ۷۲)

۷۶ - گزینه ۲ جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $a_n = a_1 + (n - 1)d$ است. داریم:

$$\begin{cases} a_1 + a_7 + a_9 + a_{11} = 15 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 30 \end{cases} \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -20a_1 - 30d = -75 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases} \Rightarrow -15a_1 = -45 \Rightarrow a_1 = 3, d = \frac{1}{2}$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10\left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

۷۷ - گزینه ۳

در هر دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 + (n - 1)d$ به دست می‌آید و اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه $b^2 = ac$ است.

$$a_7, a_9, a_{11} \Rightarrow a_1 + 6d, a_1 + 8d, a_1 + 10d \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) = (a_1 + 8d)^2 \Rightarrow a_1^2 + 16a_1d + 24a_1d + 60d^2 = a_1^2 + 16a_1d + 64d^2$$

$$\Rightarrow 24a_1d + 60d^2 = 64d^2 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } 2d} 12a_1 + 30d = 32d \Rightarrow 12a_1 = 2d \Rightarrow a_{11} = 0$$

دقت کنید چون جملات دنباله حسابی متمایز هستند، پس $d \neq 0$ و می‌توانیم بر $2d$ تقسیم کنیم.

۷۸ - گزینه ۴

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه $a + c = 2b$ است. همچنین در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت r ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.

$$a_7, 2a_9, a_{11} \Rightarrow a_1 r^6, 2a_1 r^8, a_1 r^{10} \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} a_1 r^6 + a_1 r^{10} = 4a_1 r^8 \xrightarrow{\div a_1 r^6} 1 + r^4 = 4r^2 \Rightarrow r^4 - 4r^2 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{r^2=A} A^2 - 4A + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} = r^2 \\ A = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} = r^2 \end{cases}$$

اگر فرض کنیم دنباله، صعودی است، جمله هشتم بزرگترین جمله است.

$$\frac{a_8}{a_7} = \frac{a_1 r^7}{a_1 r^6} = r = r^2 = (r^2)^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 3 + 4\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3}$$

۷۹ - گزینه ۱

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند آنگاه: $b^2 = a \cdot c$ و واسطه هندسی است.

$$\left(\sqrt[4]{2}\right)^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a + b = 5 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

۸۰ - گزینه ۴ روش اول: نکته: اگر جملات a_k, a_m, a_n از یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، آنگاه:

$$q = \frac{k-m}{m-n} \text{ قدرنسبت دنباله هندسی}$$

بنابراین:

$$q = \frac{11-5}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

روش دوم: فرض کنیم a_n جمله عمومی دنباله حسابی می‌باشد:



$$a_1, a_d, a_{11} \Rightarrow \text{جمله متوالی تصاعد هندسی} \Rightarrow a_d^2 = a_1 \times a_{11}$$

$$\Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = a_1(a_1 + 10d) \Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 10ad \Rightarrow 16d^2 = 2a_1d$$

$$\Rightarrow a_1 = 8d \Rightarrow q (\text{قدر نسبت تصاعد هندسی}) = \frac{a_d}{a_1} = \frac{a_1 + 4d}{a_1} = \frac{8d + 4d}{8d} = \frac{3}{2}$$

۸۱ - گزینه ۲

$$mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \Rightarrow m(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^2 - 3t + m - 2 = 0$$

اگر این معادله دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد، معادله I فقط یک ریشه دارد (زیرا امکان ندارد $\sqrt{x}$ برابر یک مقدار منفی باشد) و شرط آن که یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه متمایز مختلف‌العلامت باشد آن است که $0 < \frac{c}{a}$ باشد.

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2$$

دقت کنید اگر معادله $mt^2 - 3t + m - 2 = 0$ دارای یک ریشه مضاعف مثبت باشد نیز معادله I فقط یک جواب دارد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 9 - 4m(m-2) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 8m - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \\ m = \frac{2 - \sqrt{13}}{2} \end{cases} \\ \frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{3}{2m} > 0 \Rightarrow m > 0 \end{array} \right.$$

ریشه مضاعف

پس جواب می‌شود: $\left\{ \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \right\} \cup \{m < 2\}$. بنابراین گزینه دوم می‌تواند صحیح باشد.

۸۲ - گزینه ۴ شرط آنکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی منفی متمایز باشد آن است که $0 < \Delta$ ، $0 < S$ و $P > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac > 0} 4m^2 - 4(m-6)(-3) > 0 \Rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0 \Rightarrow (m+6)(m-3) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -6 \quad \text{یا} \quad m > 3 \quad (I)$$

$$S < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{3m}{m-6} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < m < 6 \quad (II)$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \Rightarrow m-6 < 0 \Rightarrow m < 6 \quad (III)$$

از اشتراک جواب‌های I و II و III به جواب $3 < m < 6$ می‌رسیم.

۸۳ - گزینه ۲ $x^2 + x$ را متغیر جدید A در نظر می‌گیریم. معادله به صورت زیر خواهد شد:

$$A^2 - 18A + 72 = 0 \Rightarrow (A - 12)(A - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1 \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = -2 \\ A = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha' + \beta' = -\frac{b}{a} = -1 \end{cases}$$

۸۴ - گزینه ۴ روش اول:

می‌دانیم برای نوشتن معادله درجه دوم که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده‌ای باشد باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده‌ای باشد، باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \xrightarrow[\text{جای } a, c \text{ عوض}]{\text{معکوس}} -x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow[\text{یک واحد کمتر}]{x \rightarrow x+1} -(x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x - 1 - 3x - 3 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

۸۵ - گزینه ۱

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = 0$$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه معادله $x = 1$ است و داریم:

$$(x-1)(x^2 + ax + 4) = 0$$

بنابراین عبارت درجه سوم به صورت $(x-1)(x^2 + ax + 4) = 0$ تجزیه می‌شود یک ریشه این معادله $x = 1$ است پس معادله درجه دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه

متمايز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه حقیقی متمایز مثبت باشد) ۴۳



$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow a^2 - 16 > 0 \rightarrow a^2 > 16 \rightarrow a > 4 \text{ یا } a < -4 \quad (I)$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -a > 0 \rightarrow a < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow 4 > 0 \quad (III) \text{ همواره برقرار است}$$

از اشتراک I, II, III به جواب $a < -4$ می‌رسیم.

توجه نمایید که به ازای $a = -5$ معادله دارای دو ریشه خواهد بود.

۸۶ - گزینه ۱ کافی است نمودار تابع درجه‌ی دوم داده شده را با نیمساز ناحیه اول ($y = x$) تلاقی دهیم و معادله تلاقی باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow \boxed{2x^2 + mx + m + 6 = 0} \text{ معادله تلاقی}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(2)(m+6) = m^2 - 8m - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, -4$$

حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m ، طول نقطه تماس مثبت است (در ناحیه اول x مثبت است).

$$m = 12: 2x^2 + 13x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ غ ق}$$

$$m = -4: 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ق ق}$$

۸۷ - گزینه ۳ می‌دانیم که $x = vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{v}$ است. اگر سرعت جریان آب را v در نظر بگیریم سرعت قایق در جهت حرکت آب $100 + v$ و در خلاف جهت حرکت آب $100 - v$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_1 = \frac{1200}{100+v} \\ \text{مسیر برگشت } t_2 = \frac{1200}{100-v} \end{cases} \Rightarrow t_2 - t_1 = 5 \Rightarrow \frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1200(100+v) - 1200(100-v)}{(100-v)(100+v)} = \frac{120000 + 1200v - 120000 + 1200v}{10000 - v^2} = 5$$

$$\Rightarrow 2400v = 5(10000 - v^2) \Rightarrow 480v = 10000 - v^2$$

$$\Rightarrow v^2 + 480v - 10000 = (v-20)(v+500) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 20 \text{ ق ق} \\ v = -500 \text{ غ ق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب $v = 20$ برسید.

۸۸ - گزینه ۴ می‌دانیم که $x = vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{v}$ است. اگر سرعت پرواز پرنده را v در نظر بگیریم، در این صورت سرعت رفت $5 + v$ و سرعت برگشت $5 - v$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_1 = \frac{1}{v+5} \\ \text{مسیر برگشت } t_2 = \frac{1}{v-5} \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = \underbrace{9}_{\text{دقیقه}} \rightarrow \frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \underbrace{\frac{9}{60}}_{\text{ساعت}}$$

$$\Rightarrow \frac{v-5+v+5}{(v+5)(v-5)} = \frac{2v}{v^2-25} = \frac{3}{20} \Rightarrow 3v^2 - 75 = 40v$$

$$\Rightarrow 3v^2 - 40v - 75 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 1600 + 900 = 2500} \begin{cases} v_1 = \frac{40+50}{6} = 15 \text{ ق ق} \\ v_2 = \frac{40-50}{6} = -\frac{5}{3} \text{ غ ق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب $v = 15$ برسید.

۸۹ - گزینه ۴ اگر بهروز بتواند به تنهایی این کار را در k ساعت انجام دهد، فرهاد همان کار را به تنهایی در $k+9$ ساعت انجام می‌دهد؛ آنگاه داریم:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2k+9}{k \cdot (k+9)} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow k^2 + 9k = 40k + 180 \Rightarrow k^2 - 31k - 180 = (k-36)(k+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 36 \\ k = -5 \text{ غ ق} \end{cases}$$

۹۰ - گزینه ۴ برای حل معادلات گنگ طرفین را به توان مناسب می‌رسانیم تا رادیکال‌ها از بین بروند.

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a^2 + 4a = 4 - 12a + 9a^2 \Rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$$



$$\Delta = b^2 - 4ac = 256 - 112 = 144 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{16 + 12}{14} = 2 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند.)} \\ a = \frac{16 - 12}{14} = \frac{2}{7} \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7} + 1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4.5$$

۹۱ - گزینه ۴ روش اول:

چون یک چندجمله‌ای در زیررادیکال با فرجه فرد قرار دارد، بنابراین رادیکال با فرجه فرد به ازای تمام مقادیر x تعریف شده است و فقط باید عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \text{صورت} = 0 \rightarrow 9x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \rightarrow x = \pm \frac{2}{3} \\ \text{مخرج} = 0 \rightarrow 2x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & +\infty \\ \hline \text{عبارت} & - & + & - & + & - \end{array} \rightarrow x \in [-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$$

ت.ن

روش دوم:

اگر $x = 1$ باشد زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج منفی می‌شود بنابراین گزینه‌های اول و سوم که شامل $x = 1$ هستند حذف می‌شوند در ضمن $x = 0$ مخرج را صفر می‌کند و گزینه دوم که شامل $x = 0$ است نیز حذف می‌شود.

۹۲ - گزینه ۴ طبق فرض داریم:

$$-2 < \frac{2}{x^2 - 3x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{2} < \frac{-1}{2} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < -1 \Rightarrow x^2 - 3x + 3 < 0 \quad (*)$$

در عبارت درجه دوم $x^2 - 3x + 3$ داریم $\Delta = 9 - 12 < 0$, $a = 1 > 0$, پس این عبارت همواره مثبت بوده و نامعادله (*) هیچ جواب حقیقی ندارد.

۹۳ - گزینه ۱ هر نامعادله را جداگانه حل کرده و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{2x - 3}{x + 1} > 1 \Rightarrow \frac{2x - 3}{x + 1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x - 4}{x + 1} > 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 4 & +\infty \\ \hline & + & \text{ت.ن} & - & + \end{array} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 4$$

$$\frac{2x - 3}{x + 1} < 3 \Rightarrow \frac{2x - 3}{x + 1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-x - 6}{x + 1} < 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -6 & -1 & +\infty \\ \hline & - & \text{ت.ن} & + & - \end{array} \Rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1$$

$$\Rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $x > 4$ یا $x < -6$ می‌رسیم که همان $\mathbb{R} - [-6, 4]$ است.

۹۴ - گزینه ۳ روش اول:

$$\frac{7x - 8}{x^2 - x - 2} > \frac{x}{x - 2} \rightarrow \frac{7x - 8}{(x - 2)(x + 1)} - \frac{x}{x - 2} > 0$$

$$\rightarrow \frac{7x - 8 - x^2 - x}{(x - 2)(x + 1)} > 0 \rightarrow \frac{-x^2 + 6x - 8}{(x - 2)(x + 1)} > 0$$

$$\rightarrow \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 2)(x + 1)} < 0 \rightarrow \frac{(x - 4)(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{x - 4}{x + 1} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -1 & 2 & 4 & +\infty \\ \hline & + & - & + & - & + \end{array}$$

توجه کنید $x = 2$ مخرج را صفر می‌کند.

$$\rightarrow -1 < x < 2 \text{ یا } 2 < x < 4 \rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$$

روش دوم:

به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$$x = 0 \rightarrow \frac{-8}{-2} > 0 : \text{درست} \rightarrow \text{گزینه دوم حذف می‌شود}$$

$$x = 3 \rightarrow \frac{13}{4} > 3 : \text{درست} \rightarrow \text{گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند}$$



برای حل اینگونه از نامعادلات، پس از تعیین علامت و حذف نماد قدرمطلق، طرفین را به توان فرجه رادیکال رسانده و با توجه به محدوده تغییرات x جواب را می‌یابیم.

$$\begin{aligned}
 3x + 4 &\geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{4}{3} \\
 \sqrt{3x+4} &> 2|x-1| - x \\
 -\frac{4}{3} < x < 1 &\rightarrow \sqrt{3x+4} > -3x+2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3x+4 > 9x^2 - 12x + 4 \\
 \rightarrow 9x^2 - 15x < 0 &\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} 0 < x < \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} < x < 1 \end{cases} \rightarrow 0 < x < 1 \quad (1) \\
 x \geq 1 &\rightarrow \sqrt{3x+4} > x-2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3x+4 > x^2 - 4x + 4 \\
 \rightarrow x^2 - 7x < 0 &\rightarrow \begin{cases} 0 < x < 7 \\ x \geq 1 \end{cases} \rightarrow 1 \leq x < 7 \quad (2) \\
 (1) \cup (2) &\xrightarrow{\text{نقطه میانی}} \frac{7}{2} \\
 \text{جواب: } (0, 7) &= (0, 7) \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4 < 0 &\Rightarrow (x^3 - x) - 4(x^2 - 1) < 0 \\
 x(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) < 0 &\Rightarrow (x^2 - 1)(x - 4) < 0 \\
 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x-4) < 0 &\xrightarrow{x > -1} (x-1)(x-4) < 0 \\
 \Rightarrow x \in (1, 4) &\Rightarrow b-a = 4-1 = 3
 \end{aligned}$$

$-\infty$	1	4	$+\infty$
	$+$	$-$	$+$

۹۷ - گزینه ۲ البته مجموعه نامعادله باید بازه $(2, 4)$ باشد نه $[2, 4]$ از طرفی مخرج کسر به ازای $x > \frac{3}{2}$ همواره مثبت است.

$$x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

در بازه $(1, 4)$ عبارت فوق، منفی است و برای آن که جواب نامعادله $(2, 4)$ باشد در این بازه پراکنش اول نیز باید منفی باشد. در ضمن $x = 2$ ریشه این عبارت است.

$$x = 2 \Rightarrow 4m^2 - 4 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\text{if } m = 0 \Rightarrow (-x^2 + 4)$$

این عبارت در بازه $(2, 4)$ همواره منفی است و قابل قبول است.

$$\text{if } m = 2 \Rightarrow (3x^2 - 8x + 4)$$

این عبارت در بازه $(2, 4)$ مثبت است و قابل قبول نیست. بنابراین فقط $m = 0$ مورد قبول است.

۹۸ - گزینه ۲ می‌دانیم اگر نمودار تابع f پایین‌تر از نمودار تابع g باشد، در این صورت $f < g \Rightarrow g - f > 0$. بنابراین برای این که نمودار تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ پایین

خط $y = 2$ باشد:

$$\begin{aligned}
 2 > \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} &\Rightarrow 2 - \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} > 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 8 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 4} > 0 \\
 \Rightarrow \frac{-x^2 + 2x + 8}{x^2 + 4} &> 0 \xrightarrow{\text{مخرج همواره مثبت}} -x^2 + 2x + 8 > 0 \\
 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 < 0 &\Rightarrow (x-4)(x+2) < 0 \\
 \Rightarrow x \in (-2, 4) = (a, b) &\Rightarrow a = -2, b = 4
 \end{aligned}$$

بنابراین بیشترین مقدار $b - a$ (بیشترین طول بازه) برابر است با $4 - (-2) = 6$

تذکر: در بازه (a, b) ، منظور از $b - a$ ، طول بازه (a, b) است.

۹۹ - گزینه ۲ ابتدا نامعادله دوطرفه $0 < \frac{1-3x}{x+1} < 2$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{1-3x}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x}{\frac{1-3x}{x+1}} > 0 \Rightarrow \frac{x}{-1} > 0 \Rightarrow x < -1 \quad (1)$$

$$\frac{1-3x}{x+1} > -2 \Rightarrow \frac{1-3x}{x+1} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1-3x+2x+2}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x}{\frac{3-x}{x+1}} > 0 \Rightarrow -1 < x < 3 \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) جواب نامعادله است.

$$(1) \cap (2) \cdot \frac{1}{3} < x < 3$$



حال حدود $\frac{x}{2}$ و سپس $\left[\frac{x}{2}\right]$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1}{6} < \frac{x}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0, 1$$

۱۰۰ - گزینه ۲ گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم. توجه کنید که به دلیل وجود $\sqrt{x}$ باید $x \geq 0$ باشد.

$$m = -1 \Rightarrow P = \frac{\overbrace{(4x+4)}^{\text{مثبت}}(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$

x	0	1	$\frac{3}{2}$	4
P	■	-	+	-
		ن	ن	ن

$\Rightarrow$ جواب: $(1, \frac{3}{2}] \cup (4, +\infty)$

$$m = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \frac{(-\frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \xrightarrow{\times(-\frac{9}{4})} P = \frac{(2x^2 + 3x - 9)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(2x-3)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \leq 0$$

عبارت $(2x-3)^2$ همواره نامنفی است، پس $x = \frac{3}{2}$ یکی از جواب‌های نامعادله است. از طرفی به دلیل $x \geq 0$ عبارت $x+3$ مثبت است، پس:

$$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) < 0 \Rightarrow 1 < x < 4$$

$x = \frac{3}{2}$ در بازه $(1, 4)$ قرار دارد، پس این بازه جواب نامعادله است.

$$m = 1 \Rightarrow P = \frac{(-4x+4)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$

x	0	1	$\frac{3}{2}$	4
P	■	-	-	+
		ن	ن	ن

$\Rightarrow$ جواب: $[\frac{3}{2}, 4)$

$$m = \frac{5}{3} \Rightarrow P = \frac{(\frac{4}{9}x^2 - \frac{28}{3}x + 4)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \xrightarrow{\times(\frac{9}{4})} P = \frac{(10x^2 - 21x + 9)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{(5x-3)(2x-3)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$

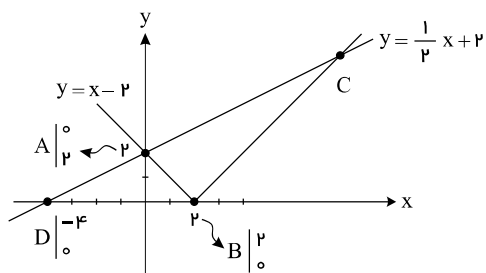
عبارت $(2x-3)^2$ همواره نامنفی است، پس:

$$x = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{5x-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \Rightarrow$$

x	0	$\frac{3}{5}$	1	4
P	■	-	+	-
		ن	ن	ن

$\Rightarrow$ جواب: $[\frac{3}{5}, 1) \cup (4, +\infty) \cup \{\frac{3}{2}\}$

۱۰۱ - گزینه ۴ دو تابع $y = \frac{1}{2}x + 2$ و $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ را رسم می‌کنیم.



نقطه C محل برخورد شاخه $y = x - 2$ با خط $y = \frac{1}{2}x + 2$ است:

$$\frac{1}{2}x + 2 = x - 2 \Rightarrow x = 4, y = 4 \Rightarrow C \begin{vmatrix} 4 \\ 4 \end{vmatrix}$$

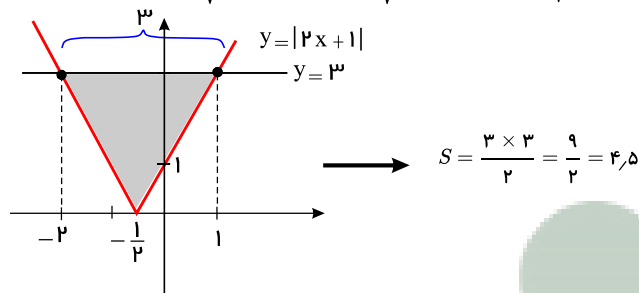


پس مساحت مثلث ABC (سطح محصور بین دو نمودار) برابر است با:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle BDC} - S_{\triangle ABD} \\ &= \left(\frac{1}{2}BD \times y_C\right) - \left(\frac{1}{2}BD \times y_A\right) = \frac{1}{2}BD(y_C - y_A) \\ &= \frac{1}{2}(2-4)(6-2) = 12 \end{aligned}$$

۱۰۲ - گزینه ۳ ابتدا تابع $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 + x) + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1|$$

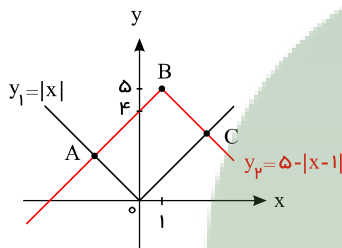


دقت کنید که نقاطی به طول‌های $x = -2$ و $x = 1$ از تلاقی تابع $y = |2x + 1|$ با خط $y = 3$ به‌دست آمده‌اند.

$$|2x + 1| = 3 \rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \\ 2x + 1 = -3 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

۱۰۳ - گزینه ۴

ابتدا نمودار این دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم تا شکل ناحیه محدود مشخص شود.



با توجه به شکل، ناحیه محدود به دو تابع یک مستطیل است که برای محاسبه مساحت آن باید ابتدا نقاط برخورد آنها را بیابیم:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow |x| = 5 - |x - 1|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{نقطه } C \xrightarrow{x > 1} x = 5 - (x - 1) \rightarrow x = 3 \Rightarrow C(3, 3) \\ \text{نقطه } A \xrightarrow{x < 0} -x = 5 + (x - 1) \rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 2) \end{cases}$$

$$OC = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18}, OA = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$S = \text{عرض} \times \text{طول} = \sqrt{18} \times \sqrt{8} = \sqrt{144} = 12$$

۱۰۴ - گزینه ۳ برای این منظور باید نامعادله $2x + |x| > \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ را حل کنیم.

$$x \geq 0 \rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + x \rightarrow x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{2} < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	1	$+\infty$		
عبارت	< 0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\rightarrow \frac{-9}{2} < x < 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 0 \leq x < 1 \quad (I)$

$$x < 0 \rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x - x \rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} < 0$$

x	$-\infty$	-3	$\frac{3}{2}$	$+\infty$		
عبارت	< 0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\rightarrow -3 < x < \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -3 < x < 0 \quad (II)$



از اجتماع I و II به جواب $1 < x < 3$ می‌رسیم که طول نقطه وسط بازه $-1 = \frac{-3+1}{2}$ است.

۱۰۵ - گزینه ۲

ریشه‌های داخل قدر مطلق‌ها $x = -2$ و $x = \frac{1}{2}$ هستند.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$		-	-	+
$x+2$		-	+	+

$$\text{غ ق ق} \quad x < -2 \Rightarrow -2x + 1 - x - 2 = 3 \Rightarrow -3x = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

$$\text{ق ق} \quad -2 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2x + 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{ق ق} \quad x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

۱۰۶ - گزینه ۴

روش اول:

$$2x + 1 - |x - 2| > |x^2 + 1| \rightarrow 2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1$$

$$x \geq 2: 2x + 1 - (x - 2) > x^2 + 1 \rightarrow 2x + 1 - x + 2 > x^2 + 1 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \emptyset \quad (I)$$

$$x < 2: 2x + 1 - (-x + 2) > x^2 + 1 \rightarrow 2x + 1 + x - 2 > x^2 + 1 \rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \rightarrow (x - 1)(x - 2) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x < 2$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 < x < 2 \quad (II)$$

از اجتماع جواب‌های I و II به جواب $1 < x < 2$ یا $x \in (1, 2)$ می‌رسیم.

روش دوم:

در نامعادله داده شده به جای x ، عدد صفر قرار می‌دهیم.

$$x = 0 \rightarrow 0 + 1 - 2 > 1 \rightarrow -1 > 1$$

به نتیجه غلطی رسیدیم، پس گزینه‌های ۱ و ۳ که همگی شامل صفر هستند حذف می‌شوند و گزینه چهارم، جواب صحیح است.

۱۰۷ - گزینه ۲ روش اول:

قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x \geq 2 \Rightarrow x^2 - 2x < x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset \quad (I)$$

$$x < 2 \Rightarrow x^2 - 2x < -x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -1 < x < 2 \quad (II)$$

$$(I) \cup (II): -1 < x < 2$$

روش دوم:

نامعادله را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$$x = 0 \xrightarrow{\text{نامعادله}} 0 < 2 \quad \text{درست است گزینه‌های (۳ و ۴ حذف می‌شوند)}$$

$$x = 1 \xrightarrow{\text{نامعادله}} -1 < 1 \quad \text{درست است (گزینه ۱ حذف می‌شود)}$$

۱۰۸ - گزینه ۳ داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$x \geq 0 \rightarrow x + x \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 2x \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 4x \leq x + 6$$

$$\rightarrow 3x \leq 6 \rightarrow x \leq 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 0 \leq x \leq 2 \quad (I)$$

$$x < 0 \rightarrow x - x \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 0 \leq x + 6$$

$$\rightarrow x \geq -6 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -6 \leq x < 0 \quad (II)$$



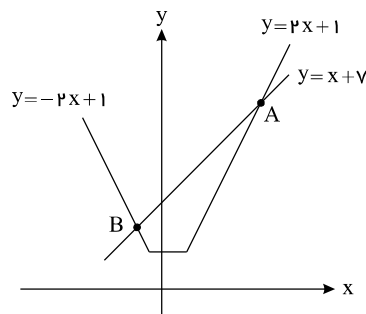
از اجتماع جواب‌های I و II به جواب $-6 \leq x \leq 2$ یا $x \in [-6, 2]$ می‌رسیم.

۱۰۹ - گزینه ۴ تابع $y = |x - 2| + |x + 1|$ یک تابع گلدانی است که به ازای $x < -1$ اکیداً نزولی و به ازای $x > 2$ اکیداً صعودی و در فاصله $-1 \leq x \leq 2$ ثابت است.

$$x < -1: y = -x + 2 - x - 1 \rightarrow y = -2x + 1$$

$$-1 \leq x \leq 2: y = -x + 2 + x + 1 \rightarrow y = 3$$

$$x > 2: y = x - 2 + x + 1 \rightarrow y = 2x - 1$$



$$\left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = x + 7 \end{array} \right. \rightarrow x = 8, y = 15 \rightarrow A \left(\begin{array}{c} 8 \\ 15 \end{array} \right), \left\{ \begin{array}{l} y = -2x + 1 \\ y = x + 7 \end{array} \right. \rightarrow x = -2, y = 5 \rightarrow B \left(\begin{array}{c} -2 \\ 5 \end{array} \right)$$

$$\text{پس: } AB = \sqrt{(8+2)^2 + (15-5)^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

۱۱۰ - گزینه ۴

با کمک ریشه داخل قدر مطلق که $x = 0$ است بازه‌بندی را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$x \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x < 2x - 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-5) < 0 \Rightarrow x \in (1, 5)$$

$$x < 0 \Rightarrow -x^2 + 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0 \xrightarrow{x < 0} x \in (-\infty, 1 - \sqrt{6})$$

$$\text{مجموعه جواب: } x \in (-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$$

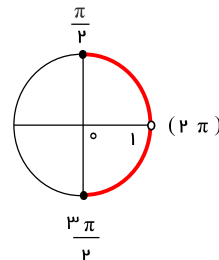
	1	5
$x - 5$	-	-
$x - 1$	-	+
p	+	+

۱۱۱ - گزینه ۳

$$[\cos \pi x] = 0 \Rightarrow 0 \leq \cos \pi x < 1$$

بازه‌ای را قبول می‌کنیم که در آن، $\cos \pi x$ در رابطه $0 \leq \cos \pi x < 1$ صدق نکند.

$$0 \leq \cos \pi x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \pi x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \leq \pi x < 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \leq x < 2 \end{cases}$$



این بازه ریشه‌های مخرج هستند و می‌دانیم که در توابع کسری ریشه‌های مخرج نباید در دامنه تابع باشند. با توجه به گزینه‌ها، در گزینه ۳ ریشه‌های مخرج وجود ندارد.

۱۱۲ - گزینه ۳ روش اول:

$$\underbrace{4n^2 - 4n + 1}_{(2n-1)^2} < \underbrace{4n^2 - 4n + 1}_{(2n)^2} < 4n^2 \rightarrow 2n - 1 < \sqrt{4n^2 - 4n + 1} < 2n \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2 - 4n + 1} \right] = 2n - 1$$

$$\underbrace{n^2 - 4n + 4}_{(n-2)^2} < \underbrace{n^2 - 4n + 1}_{(n-1)^2} < n^2 \rightarrow n - 2 < \sqrt{n^2 - 4n + 1} < n - 1 \Rightarrow \left[\sqrt{n^2 - 4n + 1} \right] = n - 2$$

$$\left[\sqrt{4n^2 - 4n + 1} \right] - 2 \left[\sqrt{n^2 - 4n + 1} \right] = (2n - 1) - 2(n - 2) = 3$$

روش دوم: کافی است یک عدد طبیعی بزرگتر از ۲ مثلاً $n = 3$ را قرار دهیم.

$$n = 3 \rightarrow \left[\sqrt{36 - 9 + 1} \right] - 2 \left[\sqrt{9 - 6} \right] = \left[\sqrt{28} \right] - 2 \left[\sqrt{3} \right] = 5 - 2(1) = 3$$

$$113 - \text{گزینه ۱ می‌دانیم } [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ و باتوجه به این که عبارت } \sin \pi x - 1 \text{ زیر رادیکال با فرجه زوج قرار دارد، بنابراین باید نامنفی باشد، داریم:}$$

$$\sin \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin \pi x \geq 1$$

می‌دانیم همواره $\sin u \leq 1$ است، بنابراین تنها در صورتی نامساوی فوق برقرار است که $\sin \pi x = 1$ باشد، لذا داریم:

$$\sin \pi x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص معادلات سینوسی}} \pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \in \left\{ 2k + \frac{1}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

بنابراین دامنه تابع f به صورت زیر است:



$$D_f = \left\{ x \mid x = 2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

باتوجه به دامنه فوق، تمام ورودی‌های تابع f ، اعدادی غیر صحیح هستند، لذا داریم:

$$f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1} = -1 + 0 = -1 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}f(x)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + 0 = -1$$

بنابراین برای هر x از دامنه f ، حاصل $f\left(-\frac{1}{2}f(x)\right)$ برابر با -1 است.

۱۱۴ - گزینه ۴

$$\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$$

با تعیین علامت عبارت $\frac{4-2x}{3x+1}$ ، معادله داده شده را حل می‌کنیم:

$$4-2x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$3x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$\frac{4-2x}{3x+1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

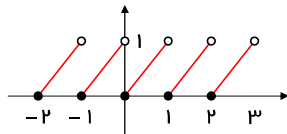
بنابراین $-\frac{1}{3} < x \leq 2$ و داریم:

$$-\frac{1}{3} < x \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -1 < 3x \leq 6 \Rightarrow [3x] = -1, 0, 1, 2, \dots, 6$$

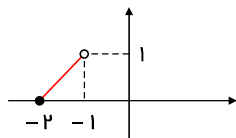
مجموعه مقادیر $[3x]$ شامل ۸ عضو است.

۱۱۵ - گزینه ۴

نمودار تابع $y = x - [x]$ به صورت زیر است واضح است در فاصله $(-2, 3)$ ، ۵ پاره‌خط به اندازه $\sqrt{2}$ وجود دارد.



اینگونه توابع به توابع دندان اره‌ای معروف هستند.
توجه:



$$\text{طول پاره خط} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

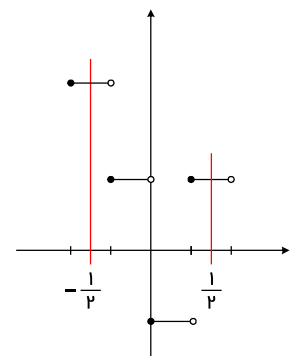
۱۱۶ - گزینه ۲ روش اول: چون داخل براکت $3x$ داریم طول پله‌ها $\frac{1}{3}$ است تابع را در باز $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ رسم می‌کنیم که بازه سؤال را شامل می‌شود.

$$\text{اگر } -\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = -2 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{اگر } -\frac{1}{3} \leq x < 0 \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{اگر } 0 \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\text{اگر } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \Rightarrow [3x] = 1 \Rightarrow y = 1$$

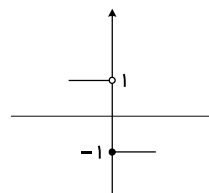


روش دوم: کافی است در حوالی صفر تابع را بررسی کنیم:



$$if: x \rightarrow \circ^+ \Rightarrow [3x] = \circ \Rightarrow y = -1$$

$$if: x \rightarrow \circ^- \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$



فقط در گزینه ۲ تابع در نقطه $x = \circ$ ناپیوسته است.

۱۱۷ - گزینه ۲

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 + x < \circ \begin{cases} x^2 + x < \circ \Rightarrow x(x+1) < \circ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < \circ \\ -1 \leq x^2 + x \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq \circ \xrightarrow{a > \circ, \Delta < \circ} x \in R \end{cases}$$

اشتراک

$$\longrightarrow -1 < x < \circ$$

$$-1 < x < \circ \xrightarrow{\text{توان } 2} \circ < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = \circ$$

۱۱۸ - گزینه ۱ اگر $x^2 + x < \circ$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $-1 < x < \circ$ است.

$$x^2 + x < \circ \Rightarrow x(x+1) < \circ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -1 & \circ & +\infty \\ \hline \text{عبارت} & + & \circ & - & + \end{array} \Rightarrow -1 < x < \circ$$

حال برای تعیین حاصل $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کافی است حدود عبارت‌های داخل جزء صحیح را مشخص کنیم. داریم:

$$\begin{cases} -1 < x < \circ \Rightarrow [x] = -1 \\ -1 < x < \circ \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌زنیم}} \circ < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = \circ \\ -1 < x < \circ \xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌زنیم}} -1 < x^3 < \circ \Rightarrow [x^3] = -1 \\ -1 < x < \circ \xrightarrow{\text{به توان ۴ می‌زنیم}} \circ < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = \circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = (-1) + \circ + (-1) + \circ = -2$$

۱۱۹ - گزینه ۳

شیب هر دو خط یک است یعنی این دو خط موازی‌اند یعنی دو ضلع مقابل یک مربع هستند و فاصله بین این دو ضلع مربع را می‌دهد.

$$\begin{array}{c} x - y + 1 = \circ \\ \hline \hline x - y - \frac{3}{2} = \circ \end{array}$$

(در محاسبه فاصله بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادله خط باید یکسان باشند.)

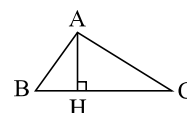
$$\text{ضلع مربع} = d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - (-\frac{3}{2})|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{مربع}} = (\text{ضلع})^2 = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

برای محاسبه فاصله بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = \circ$ و $ax + by + c' = \circ$ از رابطه $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می‌کنیم.

۱۲۰ - گزینه ۲

با توجه به مثلث زیر خواهیم داشت:



برای پیدا کردن مختصات نقطه A کافی است معادلات خطوط اضلاع AB و AC را تلافی دهیم.

$$BC: 2y + 3x = 6 \rightarrow m_{BC} = -\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ارتفاع } AH \text{ بر ضلع } BC \text{ عمود است}} m_{AH} = \frac{2}{3}$$

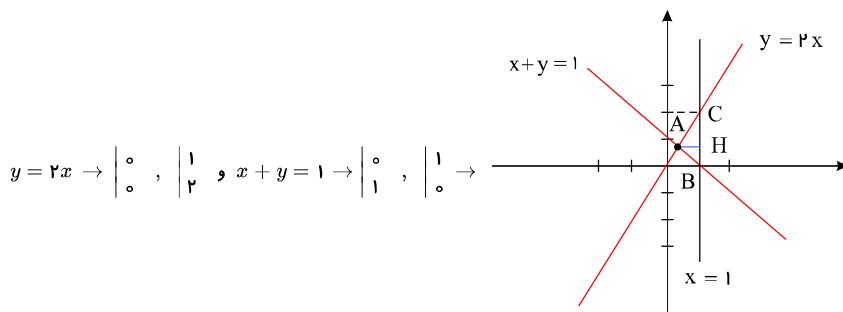
$$\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} x = -\frac{7}{3}, y = \frac{1}{3}$$

حال معادله ارتفاع AH را با داشتن شیب و یک نقطه می‌نویسیم.



$$A \left| \begin{array}{c} -\frac{y}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{array} \right|, m_{AH} = \frac{2}{3} \rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \left(x + \frac{y}{3} \right) \rightarrow 3y - 1 = 2x + \frac{2y}{3} \xrightarrow{\times 3} 9y - 3 = 6x + 2y \rightarrow 9y - 6x = 14 \rightarrow 9y - 6x = 17$$

۱۲۱ - گزینه ۱ سه خط داده شده را رسم می‌کنیم.



کوچک‌ترین ارتفاع مثلث ABC پاره‌خط AH است که معادله‌اش $y = \frac{2}{3}$ است، زیرا اگر با دو خط $y = 2x$ و $x + y = 1$ تشکیل دهیم، داریم:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$$

یعنی مختصات نقطه A به صورت $A \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ است، پس معادله ارتفاع AH به صورت $y = \frac{2}{3}$ است.

۱۲۲ - گزینه ۴ شرط آنکه سه خط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند آن است که محل تلاقی دو خط در معادله خط سوم صدق کند.

$$\begin{cases} y + 2x = 0 \\ y + 3x = a \end{cases} \Rightarrow x = a, y = -2a$$

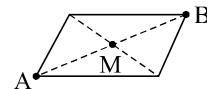
$$A \left| \begin{array}{c} a \\ -2a \\ 2y + ax + 5 = 0 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق در خط سوم}} -4a + a^2 + 5 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 5 = 0$$

این سه خط هیچ‌گاه متقارب نیستند. $\rightarrow$ ریشه حقیقی ندارد $\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$

۱۲۳ - گزینه ۳

مختصات نقطه A در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه B به دست آید.

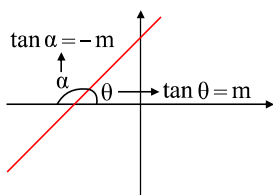
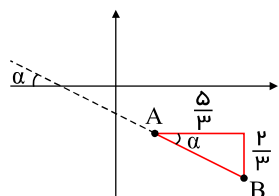
$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \rightarrow -17x = 17 \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow B \left(-1, 4 \right)$$



می‌دانیم نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB قرار دارد یعنی:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{y - 1}{2} = 3, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

۱۲۴ - گزینه ۳



شیب خط عبارت است از تانژانت زاویه‌ای که خط با سمت راست محور طول‌ها تشکیل می‌دهد.

$$\tan \alpha = -m = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} \rightarrow m = -\frac{2}{5}$$

۱۲۵ - گزینه ۲ روش اول: هرگاه مختصات سه رأس یک مثلث را داشته باشیم می‌توانیم مساحت مثلث را از این رابطه حساب کنیم.



$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$= \frac{1}{2} |2(0 - 2) + 3(2 - 5) + 0(5 - 0)| = \frac{1}{2} |-4 - 9 + 0| = \frac{13}{2} = 6,5$$

روش دوم: ابتدا طول یکی از اضلاع مانند BC را به دست می‌آوریم و آن را به عنوان قاعده مثلث در نظر می‌گیریم. سپس با پیدا کردن معادله ضلع BC فاصله A را تا این خط پیدا می‌کنیم تا ارتفاع مثلث (AH) معلوم شود و در نهایت مساحت مثلث به دست آید.

$$B(3, 0), C(0, 2) \quad m_{BC} = \frac{2 - 0}{0 - 3} = -\frac{2}{3}$$

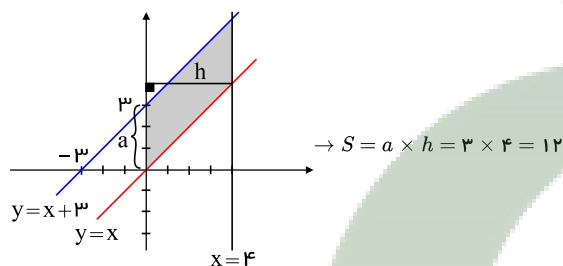
$$BC \text{ معادله خط: } y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow y + \frac{2}{3}x - 2 = 0$$

$$AH = \frac{|5 + (\frac{2}{3} \times 2) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (\frac{2}{3})^2}} = \frac{3 + \frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{13}{9}}} = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(3 - 0)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{13} = \frac{13}{2} = 6,5$$

۱۲۶ - گزینه ۲ بهترین روش برای حل این تست رسم شکل است.



۱۲۷ - گزینه ۳ شیب هر دو خط $\sqrt{3}$ است پس با هم موازی‌اند و می‌دانیم برای محاسبه فاصله بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می‌کنیم (فرایب x , y در هر دو معادله خط باید یکسان باشند).

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 2 \xrightarrow{\times \sqrt{3}} 3x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \rightarrow 3x - \sqrt{3}y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|2\sqrt{3} - (-6)|}{\sqrt{9 + 3}} = \frac{2\sqrt{3} + 6}{\sqrt{12}} = \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

۱۲۸ - گزینه ۴

برای آنکه ۳ خط در یک امتداد باشند، شیب دوبره‌دوی آنها باید با هم برابر باشد:

سه نقطه $A \left(\frac{a}{3}, \frac{6}{4a+1} \right)$, $B \left(\frac{6}{4a+1}, \frac{6}{4a+1} \right)$, $C \left(\frac{6}{4a+1}, \frac{6}{4a+1} \right)$ را در نظر می‌گیریم.

$$\text{شرط هم‌راستا بودن: } \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \rightarrow \frac{3 - 4a - 1}{a - 6} = \frac{4a + 1}{6 - 0} \rightarrow \frac{2 - 4a}{a - 6} = \frac{4a + 1}{6}$$

$$\rightarrow 4a^2 + a - 24a - 6 = 12 - 24a \rightarrow 4a^2 + a - 18 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 1 - 4(4)(-18) = 289 \rightarrow a = \frac{-1 \pm 17}{8} = 2, -\frac{9}{4}$$

۱۲۹ - گزینه ۳

دو نقطه داده‌شده را در تابع $f(x) = ab^x - 1$ مدق می‌دهیم.

$$A \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \xrightarrow{\text{صنق}} \frac{1}{2} = ab^{-\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{a^2}{b} \rightarrow a^2 = \frac{9}{4}b \rightarrow a = \frac{3}{2}\sqrt{b}$$

$$B \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{11} \right) \xrightarrow{\text{صنق}} \frac{1}{11} = ab - 1 \Rightarrow ab = \frac{12}{11} \Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{b}b = \frac{12}{11}$$

$$\rightarrow b\sqrt{b} = 8 \rightarrow b = 4 \rightarrow a = 3$$



$$\text{پس: } f(x) = 3 \times 4^x - 1 \Rightarrow f(-1) = 3 \times 4^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

۱۳۰ - گزینه ۴ باید دو منحنی داده شده را با هم تلاقی دهیم و نقطه تلاقی را به دست آوریم.

$$2^x = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \rightarrow 2^x = (2^{\frac{1}{2}})^{x+1} + 4 \rightarrow 2^x = (2^{\frac{x+1}{2}}) + 4$$

$$\rightarrow 2^x = (2^x \times 2)^{\frac{1}{2}} + 4 \xrightarrow{2^x=A} A = \sqrt{2A} + 4 \rightarrow A - 4 = \sqrt{2A}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2 - 8A + 16 = 2A \rightarrow A^2 - 10A + 16 = 0 \rightarrow (A-8)(A-2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=8 \rightarrow 2^x=8 \rightarrow x=3 \\ A=2 \end{cases} \xrightarrow{y=2^x} y=8$$

(در معادله رادیکالی صدق نمی‌کند) غ ق ق

حال باید فاصله نقطه $A \left(\frac{3}{8} \right)$ را از $B \left(\frac{3}{8} \right)$ حساب کنیم.

$$AB = \sqrt{(0-3)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

۱۳۱ - گزینه ۳

$$2^{-x} < 0.000001 \rightarrow 2^{-x} < 10^{-6}$$

از طرفین رابطه داده شده در مبنای ۱۰، لگاریتم می‌گیریم.

$$\log 2^{-x} < \log 10^{-6} \rightarrow -x \log 2 < -6 \xrightarrow{\text{در منفی ضرب می‌کنیم}} x \log 2 > 6 \rightarrow x \left(\frac{301}{1000} \right) > 6$$

$$\rightarrow x > \frac{6000}{301} \rightarrow x > 19.934$$

پس کوچک‌ترین عدد x با دو رقم اعشار، ۱۹٫۹۴ است.

۱۳۲ - گزینه ۱

$$\log_k a^n = n \log_k a, \log_k \frac{a}{b} = \log_k a - \log_k b, \log 5 = 1 - \log 2$$

می‌دانیم:

$$\log \sqrt[3]{1/6} = \log (1/6)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 1/6 = \frac{1}{3} \log \frac{1}{10} = \frac{1}{3} (\log 10^{-1}) = \frac{1}{3} (-1) = -\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} (\log 10 - \log 6) = \frac{1}{3} (1 - \log 6) = \frac{1}{3} (1 - (\log 2 + \log 3)) = \frac{1}{3} (1 - \log 2 - \log 3)$$

$$= \frac{1}{3} (1 - \log 2 - 1) = -\frac{1}{3} \log 2 = -\frac{1}{3} (\log 2)$$

۱۳۳ - گزینه ۲

$$2x + a > 0 \rightarrow 2x > -a \rightarrow x > -\frac{a}{2} \xrightarrow{x > \frac{1}{2} \text{ با توجه به شکل}} a = -1$$

بنابراین تابع به صورت $y = -1 + \log_b^{(2x-1)}$ است، از طرفی مقدار تابع در $x=2$ برابر صفر است.

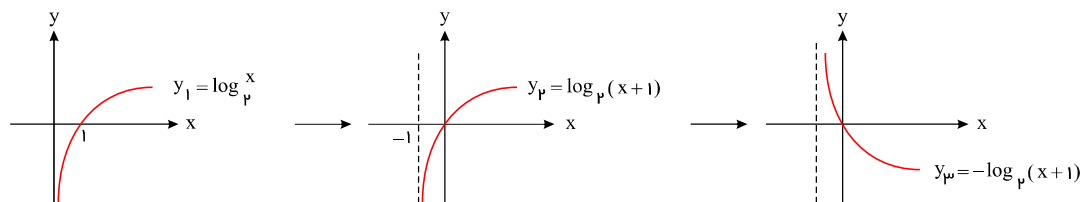
$$0 = -1 + \log_b^2 \rightarrow \log_b^2 = 1 \rightarrow b = 3 \rightarrow y = -1 + \log_3^{(2x-1)}$$

اکنون کافی است که به جای y مقدار ۱ را قرار دهیم.

$$1 = -1 + \log_3^{(2x-1)} \rightarrow \log_3^{(2x-1)} = 2 \xrightarrow{\log_b^a = c \rightarrow a = b^c} 2x-1 = 3^2 \rightarrow 2x-1 = 9 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5$$

۱۳۴ - گزینه ۲ روش اول:

نمودار تابع داده شده $y = \log_p^x$ است که یک واحد به سمت چپ برده شده و سپس نسبت به محور x ها قرینه شده است.



$$\text{پس: } y = -\log_p^{(x+1)} \rightarrow y = \log_p^{(x+1)^{-1}} \rightarrow U(x) = (x+1)^{-1}$$

روش دوم:

با توجه به شکل، دامنه تابع داده شده $x > -1$ است بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند. با توجه به شکل وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ نمودار تابع به سمت $+\infty$ می‌رود.

$$\text{گزینه اول: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \log_p(x+1) = \log_p 0^+ = -\infty$$



درست : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \log_r \frac{1}{x+1} = \log_r \frac{1}{0^+} = \log_r(+\infty) = +\infty$: گزینه دوم

توجه کنید اگر $a > 1$ باشد $\log_a^+ = -\infty$ و $\log_a^{+\infty} = +\infty$ است.

۱۳۵ - گزینه ۴

$$\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}, \quad \log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a, \quad \log_b^N = x \Rightarrow N = b^x$$

می‌دانیم:

$$\log_r^{2x^2+1} - \log_r^{x+2} = 1 \rightarrow \log_r^{\frac{2x^2+1}{x+2}} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{2x^2+1}{x+2} = 3^1$$

$$\rightarrow 2x^2 + 1 = 3x + 6 \rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

هر دو جواب به‌دست‌آمده، قابل قبول هستند، ولی برای محاسبه $\log_k^{x-1}$ فقط به‌جای x ، می‌توانیم مقدار $x = \frac{5}{2}$ را جایگزین کنیم، زیرا $x = -1$ عددی که می‌خواهیم از آن

لگاریتم بگیریم را منفی می‌کند.

$$\log_k^{2x-1} \stackrel{x=\frac{5}{2}}{=} \log_k^{2(\frac{5}{2})-1} = \log_k^5 = \log_{\frac{2}{3}}^5 = \frac{5}{3}$$

۱۳۶ - گزینه ۱

می‌دانیم:

$$a^r + b^r = (a+b)^r - rab, \quad \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_b^N = x \rightarrow b^x = N, \quad \log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$$

$$\log_r^x + \log_r^y = 2 \rightarrow \log_r^{xy} = 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} xy = 3^2 = 9$$

$$x^r + y^r = 46 \rightarrow (x+y)^r - 2xy = 46 \rightarrow (x+y)^r - 18 = 46$$

$$\rightarrow (x+y)^r = 64 \rightarrow x+y = 8 \text{ یا } x+y = -8 \text{ (غ ق ق ۸)}$$

$$\log_r^{x+y} = \log_r^8 = \log_{\frac{2}{3}}^8 = \frac{3}{2}$$

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$$

۱۳۷ - گزینه ۴ می‌دانیم:

$$3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y} \rightarrow 3^{2x+y} = 3^2 \times 3^{x-y} \rightarrow 3^{2x+y} = 3^{2+x-y}$$

$$\rightarrow 2x + y = 2 + x - y \rightarrow x + 2y = 2 \rightarrow x = 2 - 2y$$

$$\text{از طرفی: } \log(x + 2y) = 1 + \log y \rightarrow \log(x + 2y) = \log 10 + \log y \rightarrow \log(x + 2y) = \log 10y$$

$$\rightarrow x + 2y = 10y \rightarrow x = 8y \xrightarrow{x=2-2y} 2 - 2y = 8y \rightarrow 10y = 2 \rightarrow y = \frac{2}{10} \xrightarrow{x=8y} x = \frac{16}{10} = 1,6$$

۱۳۸ - گزینه ۳

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$$

می‌دانیم:

$$\log_r^x = 1 + \log_r^{y+1} \Rightarrow \log_r^x = \log_r^y + \log_r^{y+1} \Rightarrow \log_r^x = \log_r^{y+y} \Rightarrow x = 2y + 2$$

$$x^r - y^r = 32 \Rightarrow (2y+2)^r - y^r = 32 \Rightarrow (4y^2 + 8y + 4) - y^r = 32 \Rightarrow 3y^2 + 8y - 28 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{6} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = 6 \\ y = -\frac{14}{3} \end{cases}$$

$$\log_r^{x+y} \stackrel{x=6}{y=2} \log_r^{6+2} = \log_{\frac{2}{3}}^8 = \frac{3}{2}$$